Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2005/06**

2. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Binomialkoeffizienten, Vollständige Induktion, Ungleichungen

Aufgabe 1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q};\ q \in \mathbb{R},\ q \neq 1,\ n \in \mathbb{N}_0$

b)* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};\ n \in \mathbb{N}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};\ n \in \mathbb{N}$

d)* $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k};\ n \in \mathbb{N}$

e)* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(6+k)(7+k)} = \frac{n}{7(7+n)};\ n \in \mathbb{N}$

f)* $\sum\limits_{k=2}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

g)* $\sum\limits_{k=0}^{n} (3k+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2};\ n \in \mathbb{N}_0$

h)* $\sum\limits_{k=1}^{n} (3k^2-k) = n^2(n+1);\ n \in \mathbb{N}$

i)* $\sum\limits_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} j^2 = n(2n-1);\ n \in \mathbb{N}$

j) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} ij;\ n \in \mathbb{N}$

k)* $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$ für $n \geq 2$

l) $\prod_{k=0}^{n}(1+a^{2^k}) = \frac{1-a^{2^{(n+1)}}}{1-a}$ für $a \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 2.

a)* Berechnen Sie $\binom{4}{2}$, $\binom{1860}{1}$, $\binom{4711}{4710}$, $\binom{10}{4}$

Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

b)* $\sum\limits_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1,\ n \in \mathbb{N}$

c)* $\sum\limits_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1};\ n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$

d) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n,\ n \in \mathbb{N}_0$

e)* $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,\ n \in \mathbb{N}$

f)* $\binom{n+m}{k} = \sum\limits_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l},\ n, k, m \in \mathbb{N}_0$

g)* $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{(p+k)!}{k!} = \frac{(p+m+1)!}{(p+1)m!};\ p, m \in \mathbb{N}_0$

h)* $(1+x)^n \geq (n+1)x,\ x \geq 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

Lösung:
a) 6, 1860, 4711, 210 f) Hinweis: Überlegen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus $n+m$ Elementen k zu wählen.

Aufgabe 3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gelten folgende Ungleichungen?

a)* $n^2 \leq 2^n$ b)* $n^2 - 1 > \frac{(n+1)^2}{2}$ c)* $3^n < n!$

d)* $3^n > n^3$ e)* $n^2 + 8 \geq 6n$ f)* $2^{n-1} > 100n$

g)* $n^n + 2^n - 1 \leq 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} k^k$ h)* $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$ i)* $n^3 + 7n > 6n^2 + 1$

j) $n(n-1)2^n \leq 3^{n+1}$

Lösung:
a) $n = 1, 2$ und $n \geq 4$ b) $n \geq 4$ c) $n \geq 7$ d) $n = 1, 2$ und $n \geq 4$
e) $n = 1, 2$ und $n \geq 4$ f) $n \geq 12$ g) $n = 1$ und $n \geq 4$ h) $n \geq 2$
i) $n = 1$ und $n \geq 5$ j) alle $n \in \mathbb{N}$

Information:
Bilden Sie zur Bearbeitung der schriftlichen Hausaufgaben Vierergruppen und geben Sie pro Vierergruppe eine Lösung ab.
Achtung: Um später als Vierergruppe erkannt zu werden, vergessen Sie nicht, die Namen und Matrikelnummern aller Teilnehmer der Gruppe anzugeben (auch in dem Fall, dass Sie die erste schriftliche Hausaufgabe nicht bearbeiten)!

Abgabeort: Zettelkasten im Foyer des Erdgeschosses im Seminargebäude.
Abgabeschluss: Mittwoch, der 16.11.2005 um 16.00 Uhr.

Am Mittwoch, den 23.11.2005, werden die korrigierten und bewerteten Hausaufgaben mittags auf einem Tisch gegenüber dem Zettelkasten deponiert. Auf den korrigierten Hausaufgabenzetteln finden Sie eine Gruppennummer. Bei allen weiteren Abgaben werfen Sie bitte Ihre schriftlichen Hausaufgaben in den Schlitz des Zettelkastens mit der entsprechenden Nummer.

1. Hausaufgabe:

1) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$|x-3|+|x+2| \geq 7.$$

2) (5 Punkte) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}(4n^3-n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Abgabe bis Mittwoch, den 16. November, 16.00 Uhr, Einwurfkasten SG.