1. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Gleichungen, Ungleichungen, Beträge, Supremum, Infimum, Maximum, Minimum

Aufgabe 1. Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

a)* $a^2 < b^2 \Leftrightarrow |a| < |b|$
b)* $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b,\ b > 0$
c)* $|a| > b \Leftrightarrow a < -b$ oder $a > b$
d)* $2|ab| \leq a^2 + b^2$
e)* $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$
f) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|} \quad (a, b \geq 0)$
g)* $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$
h)* $|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}| \geq 2 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

Aufgabe 2. * Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dass $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Lösungsmengen L der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

a) $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$
b)* $\sqrt{4x^2} - x + 2 = 0$
c)* $\sqrt{2x^2 + 3} + x = 0$
d)* $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - 1 = 0$
e)* $\sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{x^2 - 6x + 5} = 0$
f)* $\sqrt{9x^4} + 12x + 9 = 0$
g)* $-x - |x| + \sqrt{x^2 - 1} \leq 0$
h)* $\sqrt{x^4} = 2|x| - 1$
i)* $\sqrt{x^2 - 9} \leq \frac{x + 3}{2}$
j)* $\sqrt{x + 5} \geq |x + 1| - 2$
k)* $\sqrt{x + 1} \leq \sqrt{3 - x}$
l)* $\sqrt{x + 4} > x + 2$

Lösung:

a) $L = \{-1\}$
b) $L = \emptyset$
c) $L = \emptyset$
d) $L = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$
e) $L = \emptyset$
f) $L = \{-3, -1\}$
g) $L = \{x \in \mathbb{R} | x = -1 \vee x \geq 1\}$
h) $L = \{-1, 1\}$
i) $L = \{x \in \mathbb{R} | x = -3 \vee 3 \leq x \leq 5\}$
j) $L = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 4\}$
k) $L = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$
l) $L = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x < 0\}$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Lösungsmengen L der folgenden Ungleichungen:

a)* $3 - x^2 + 2x > 0$
b) $x < \frac{9}{6 - x}$
c)* $x^2 + 6x > 7$
d)* $x + 3 > \frac{x + 18}{3x - 2}$
e)* $x < \frac{4}{4 - x}$
f)* $3 + 2x \leq \frac{3}{2 - x}$
g)* $\frac{x}{x - 2} > \frac{x - 3}{3x - 1}$
h)* $x^3 > 2x^2 - x$
i)* $|x - 1| + x \leq 5$
j)* $|x - 2| - 2x \geq 11$
k)* $|x - 1| + |x + 3| \leq 4$
l)* $|x - 2| + |x + 3| \geq 5$
m)* $\frac{(x + 2)|x^2 - 1|}{x + 1} > 4$
n) $|x - 1| < \frac{x^2 - 11x}{x + 16}$
o)* $\frac{8(x - 1)}{x^2} < |3x - 3| + x - 1.$

Lösung:

a) $L = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 3\}$
b) $L = \{x \in \mathbb{R} | x < 6 \wedge x \neq 3\}$
c) $L = \{x \in \mathbb{R} | x < -7 \vee x > 1\}$
d) $L = \{x \in \mathbb{R} | -4 < x < \frac{2}{3} \vee x > 2\}$
e) $L = \{x \in \mathbb{R} | x < 4 \wedge x \neq 2\}$
f) $L = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \vee \frac{3}{2} \leq x < 2\}$
g) $L = \{x \in \mathbb{R} | x < -3 \vee \frac{1}{3} < x < 1 \vee 2 < x\}$
h) $L = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \wedge x \neq 1\}$
i) $L = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$
j) $L = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3\}$
k) $L = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 1\}$
l) $L = \mathbb{R}$
m) $L = \{x \in \mathbb{R} | x < -3 \vee x > 2\}$
n) $L = \{x \in \mathbb{R} | -16 < x < -4\}$
o) $L = \{x \in \mathbb{R} | (x < 1 \wedge x \neq 0) \vee x > \sqrt{2}\}$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie, falls diese existieren, die Suprema, Infima, Maxima und Minima der folgenden Mengen, und begründen Sie Ihre Aussage:

a) $\left\{1, 5, 3, \frac{7}{2}, \sqrt{2}\right\}$ b)* $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ c)* $\left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } p < q\right\}$

d)* $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ e)* $\left\{n + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ f)* $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}\right\}$

Lösung:

a) $\sup = \max = 5, \ \inf = \min = 1$ b) $\sup = \max = 1, \ \inf = 0$

c) $\sup = 1, \ \inf = 0$ d) $\sup = \max = \frac{1}{4}, \ \inf = \min = -\frac{1}{2}$

e) $\inf = \min = 2$ f) $\sup = \max = 2, \ \inf = 0$

Aufgabe 6. Geben Sie 3 disjunkte nichtleere Mengen an, deren Infimum gleich 0 ist.

Information: Die Diskussionsstunden finden zu folgenden Terminen statt:

Mo,	14.00	–	15.30 Uhr,	im kl. Physik	(Hansberg)
Di,	08.15	–	09.45 Uhr,	im SG 23	(Pinell)
Do,	10.00	–	11.30 Uhr,	im Rogowski 108	(Conrads)
Fr,	10.00	–	11.30 Uhr,	im SG 23	(Kerkmann)
Fr,	10.00	–	11.30 Uhr,	im SG 203	(Hansberg)