

Lutz Volkmann

Graphen an allen Ecken und Kanten

zweite Version

2011



In Liebe für

**Hannelore**

**Andrea und Kira**

**Tom, Dina und Mats**

Prof. Dr. Lutz Volkmann

Lehrstuhl II für Mathematik

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

52056 Aachen

Germany

volkm@math2.rwth-aachen.de

[http://www.math2.rwth-aachen.de/files/gt/buch/graphen\\_an\\_allen\\_ecken\\_und\\_kanten.pdf](http://www.math2.rwth-aachen.de/files/gt/buch/graphen_an_allen_ecken_und_kanten.pdf)

# Vorwort

Im Jahre 2006 habe ich mein Buch

## “Graphen an allen Ecken und Kanten”

[25] ins Netz gestellt. Hier ist nun die zweite Version dieses Werkes, das aus Vorlesungen, Seminaren und Ergebnissen meiner Forschungsgruppe hervorgegangen ist. Meinen phantastischen 13 Schülern

**Prof. Dr. Peter Dankelmann,**  
**Dr. Miranca Fischermann,**  
**Prof. Dr. Yubao Guo,**  
**Dr. Adriana Hansberg,**  
**Dr. Angelika Hellwig,**  
**Dr. Arne Hoffmann,**  
**Dr. Dirk Meierling,**  
**Dr. Thomas Niessen,**  
**Prof. Dr. Bert Randerath,**  
**Prof. Dr. Dieter Rautenbach,**  
**Dr. Ulrich Teschner,**  
**Dr. Meike Tewes,**  
**Dr. Stefan Winzen,**

danke ich herzlich für die tatkräftige Unterstützung, verschiedene Anregungen und viele interessante und schöne gemeinsame Stunden.

Die Darstellung eines so umfangreichen Gebietes wie die Graphentheorie zwingt natürlich jeden Verfasser zu einer Auswahl und zur gelegentlichen Betonung dessen was er (mit mehr oder weniger Recht) für wichtig hält. Trotzdem glaube ich nicht allzu stark von der orthodoxen Linie abgewichen zu sein. Ich habe einen Teil derjenigen Ergebnisse neu aufgenommen, die mir besonders interessant oder attraktiv erschienen und sich organisch in den Aufbau der ersten Version einfügen ließen. Insbesondere wurden die Kapitel 5 (Turniere und multipartite Turniere), Kapitel 10 (Dominanz und Irredundanz), Abschnitt 9.3 (Perfekte Graphen), Abschnitt 14.4 (Anwendungen der Mengerschen Sätze) und das Literaturverzeichnis erheblich erweitert. Der Abschnitt 2.2 (Faktoren gleicher Parität) wurde neu hinzugefügt. Selbstverständlich habe ich auch alle anderen Kapitel überarbeitet und zum Teil ergänzt.

Besonderen Wert hat der Autor auf die historischen Ursprünge der einzelnen Sätze gelegt, wobei Lücken und Fehleinschätzungen natürlich nicht zu vermeiden sind. Für geschichtliche

Hinweise, die die Zeit vor 1936 betreffen, hat mir das erste Lehrbuch über Graphentheorie, das im Jahre 1936 von *Dénes König* [3] veröffentlicht wurde, wertvolle Hilfe geleistet. Denn dieser ungarische Mathematiker (1884 – 1944) faßte nahezu alle am Anfang der 1930er Jahre bekannten, in verschiedenen Zeitschriften weit verstreuten Einzelresultate in seinem vorbildlich geschriebenen Werk zu einer einheitlichen Disziplin – eben der Graphentheorie – zusammen.

Genau 200 Jahre vor dem Erscheinen von Königs Buch, war es dem produktivsten und fruchtbarsten Mathematiker aller Zeiten, dem Schweizer Genie *Leonhard Euler* (1707 – 1783) vorbehalten, den historisch ersten graphentheoretischen Artikel zu publizieren. Euler verfaßte seine großen Abhandlungen so leicht, wie ein gewandter Stilist einen Brief an einen Freund schreibt. Sogar die völlige Blindheit während der letzten siebzehn Jahre seines Lebens hemmte in keiner Weise seine unvergleichliche Produktivität. Angeregt durch das bekannte Königsberger Brückenproblem (man vgl. Abschnitt 3.1), stellte Euler [1] 1736 Untersuchungen an, die gerade heute von großem praktischen Nutzen sind. Ein weiteres wichtiges Resultat trägt ebenfalls Eulers Namen, dem wir heute einen Platz in der Theorie der planaren Graphen eingeräumt haben (man vgl. Kapitel 11), nämlich die berühmte Polyederformel  $n + l = m + 2$ , wobei  $n$ ,  $l$  und  $m$  die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten eines (konvexen) Polyeders bedeuten. Diese von Euler 1750 gefundene und 1752 [2], [3] publizierte Formel sowie seine Arbeit über das Königsberger Brückenproblem lösten aber noch keine systematische Beschäftigung mit Graphen aus.

Der erste starke Anstoß ging dann im 19. Jahrhundert von den sich schnell entfaltenden Naturwissenschaften aus. Im Jahre 1847 erschien die grundlegende Arbeit von *Gustav Robert Kirchhoff* (1824 – 1887) über elektrische Ströme und Spannungen in Netzwerken, deren Zweige mit Ohmschen Widerständen behaftet sind. Hier ist der Graph durch das elektrische Netzwerk unmittelbar gegeben. In Kirchhoffs Abhandlung [1] findet man den Ursprung der heute so bedeutungsvollen Netzwerktheorie, die sich vor allem mit Verkehrs- und Transportproblemen befaßt (man vgl. Kapitel 15).

Sowohl *Arthur Cayley* (1821 – 1895) als auch *James Joseph Sylvester* (1814 – 1879) gelangten über die Chemie zu graphentheoretischen Strukturen. Ausgangspunkt für Cayleys Untersuchungen war die Frage nach der Anzahl isomerer Alkane gleicher Summenformel. Dieses Problem aus der organischen Chemie stand zu jener Zeit im Mittelpunkt des Interesses. Unabhängig von chemischen Überlegungen entwickelte Cayley [1], [2] von 1874 bis 1875 die ersten systematischen Methoden zur Anzahlbestimmung von Isomeren und schaffte damit die mathematische Grundlage für eine allgemeine Abzählungstheorie, die 1937 von *George Pólya* (1887 – 1985) durch seine fundamentale Arbeit [1] voll entfaltet wurde. Als Bezeichnung für graphische Darstellungen von Molekülen benutzte Sylvester [1] im Jahre 1878 erstmalig das Wort “Graph” in dem heutigen Sinne.

Die heftigsten Impulse gingen jedoch von dem berühmt-berüchtigten Vierfarbenproblem aus, das Mitte des 19. Jahrhunderts von dem Studenten Francis Guthrie aufgeworfen wurde. Es fragt danach, ob man die Länder einer Landkarte stets mit höchstens vier Farben so färben kann, daß benachbarte Länder verschiedene Farben tragen (man vgl. dazu Abschnitt 11.3).

Derjenige, der vielleicht die Zukunft voraussah und der – allen Widerständen und Anfeindungen zum Trotz – zum Bahnbrecher für die Graphentheorie wurde, war *Dénes König* mit seinem wundervollen Buch “Theorie der endlichen und unendlichen Graphen” aus dem Jahre 1936. Damit hat König der wissenschaftlichen Anerkennung und Entfaltung der Gra-

phentheorie einen unschätzbaren Dienst erwiesen.

Inzwischen hat sich die Graphentheorie außerordentlich stürmisch entwickelt, und sie besitzt heute, eingebettet in die Diskrete Mathematik, einen unverrückbar wichtigen Platz in der reinen wie auch in der angewandten Mathematik. Wesentlichen Anteil an der rasanten Entfaltung der Graphentheorie in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts hatte das Bestreben nach einer diskreten Modellierung unserer Welt und der Möglichkeit der Optimierung durch Einzug des Computers. In erster Linie sind hier Probleme aus der Informatik und der diskreten Optimierung zu nennen, die sich als graphentheoretische Probleme formulieren und mit graphentheoretischen Methoden lösen lassen.

Mein Hauptziel ist es, dem Leser, insbesondere dem Studierenden, Methoden zu übermitteln und ihn für graphentheoretisches Denken zu interessieren. Obwohl der Text nur Vertrautheit mit Elementarmathematik (Grundbegriffe der Mengenlehre, vollständige Induktion, elementare Kombinatorik) verlangt, stellt der konsequent abstrakte Aufbau Anforderungen. Neben dem klassischen Bestand der Graphentheorie, enthält der Text eine Fülle moderner und aktueller Forschungsergebnisse, die zum Teil erstmalig in Lehrbuchform zusammengefaßt worden sind. Häufig werden auch die algorithmischen Aspekte betont, die hochinteressante Anwendungen in Wirtschaft, Technik und Naturwissenschaften besitzen. Aufgaben, Beispiele und gezielte Literaturhinweise sind zum Nutzen des Lesers vielfältig eingefügt.

Dieses Werk, das 17 Kapitel umfaßt, die in verschiedene Abschnitte unterteilt sind, wurde vom Autor mit dem Satzsystem  $\text{\LaTeX}$  erstellt. Ein Hinweis auf das Literaturverzeichnis, wie z.B. Euler [1], ist bei dem Namen Euler unter der Ziffer [1] zu finden. Das Ende eines Beweises wird mit  $\parallel$  gekennzeichnet.

Aachen, im November 2011

LUTZ VOLKMANN

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zusammenhang und Abstand</b>	<b>1</b>
1.1	Graphen und Digraphen . . . . .	1
1.2	Wege, Kreise und Zusammenhang . . . . .	7
1.3	Gradsequenzen und Gradmengen . . . . .	12
1.4	Abstandsmaße . . . . .	15
1.5	Bewertete Graphen . . . . .	18
1.6	Starker Zusammenhang . . . . .	22
1.7	Aufgaben . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Wälder, Kreise, Faktoren und Gerüste</b>	<b>28</b>
2.1	Bäume, Wälder und Kreise . . . . .	28
2.2	Faktoren gleicher Parität . . . . .	33
2.3	Anzahl der Gerüste . . . . .	36
2.4	Minimalgerüste . . . . .	40
2.5	Aufgaben . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Eulersche Graphen</b>	<b>49</b>
3.1	Das Königsberger Brückenproblem . . . . .	49
3.2	Gute Ecken in Eulerschen Graphen . . . . .	53
3.3	Eulersche Digraphen . . . . .	55
3.4	Das chinesische Briefträgerproblem . . . . .	56
3.5	Aufgaben . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Hamiltonkreise</b>	<b>61</b>
4.1	Notwendige Bedingungen für Hamiltonkreise . . . . .	61
4.2	Hinreichende Bedingungen für Hamiltonkreise . . . . .	64
4.3	Panzyklische und Ecken-panzyklische Graphen . . . . .	67



<i>Inhaltsverzeichnis</i>	xi
4.4 Aufgaben . . . . .	73
<b>5 Turniere und multipartite Turniere</b>	<b>75</b>
5.1 Turniere . . . . .	75
5.2 Multipartite Turniere . . . . .	84
5.3 Aufgaben . . . . .	95
<b>6 Matchingtheorie</b>	<b>97</b>
6.1 Gesättigte und maximale Matchings . . . . .	97
6.2 Matchings in bipartiten Graphen . . . . .	101
6.3 Kreisfaktoren in Digraphen . . . . .	105
6.4 Matching-Algorithmen . . . . .	107
6.5 Aufgaben . . . . .	112
<b>7 Faktortheorie</b>	<b>115</b>
7.1 Der 1-Faktorsatz von Tutte . . . . .	115
7.2 Das $f$ -Faktorproblem . . . . .	121
7.3 Reguläre Faktoren in regulären Graphen . . . . .	130
7.4 Fastreguläre Faktoren . . . . .	136
7.5 Aufgaben . . . . .	140
<b>8 Blöcke, Line-Graphen und Graphenoperationen</b>	<b>142</b>
8.1 Schmittecken und Blöcke . . . . .	142
8.2 Line-Graphen . . . . .	148
8.3 Graphenoperationen . . . . .	152
8.4 Aufgaben . . . . .	155
<b>9 Unabhängige Mengen und Cliques</b>	<b>157</b>
9.1 Unabhängige Mengen . . . . .	157
9.2 Bestimmung minimaler Überdeckungen . . . . .	162
9.3 Perfekte Graphen . . . . .	163
9.4 Der Satz von Turán . . . . .	170
9.5 Aufgaben . . . . .	172
<b>10 Dominanz und Irredundanz</b>	<b>174</b>
10.1 Abschätzungen der Dominanzzahl . . . . .	174

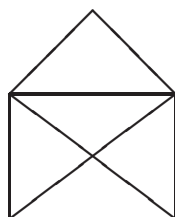
10.2	Graphenparameter im Vergleich . . . . .	181
10.3	Minimale Dominanzmengen in Blockgraphen . . . . .	187
10.4	$k$ -Dominanzmengen . . . . .	190
10.5	Irredundanzmengen . . . . .	199
10.6	Aufgaben . . . . .	203
<b>11</b>	<b>Planare Graphen</b>	<b>205</b>
11.1	Die Eulersche Polyederformel . . . . .	205
11.2	Die Bondage Zahl . . . . .	211
11.3	Der Fünffarbensatz . . . . .	214
11.4	Der Satz von Kuratowski . . . . .	220
11.5	Aufgaben . . . . .	223
<b>12</b>	<b>Eckenfärbung</b>	<b>225</b>
12.1	Die chromatische Zahl . . . . .	225
12.2	Die (pseudo-) achromatische Zahl . . . . .	230
12.3	Chromatische Polynome . . . . .	233
12.4	Aufgaben . . . . .	238
<b>13</b>	<b>Kanten- und Totalfärbung</b>	<b>240</b>
13.1	Der chromatische Index . . . . .	240
13.2	Kritische Graphen . . . . .	246
13.3	Klassifizierung . . . . .	252
13.4	Totalfärbung . . . . .	256
13.5	Aufgaben . . . . .	260
<b>14</b>	<b>Mehrfacher Zusammenhang</b>	<b>262</b>
14.1	Ecken- und Kantenzusammenhang in Graphen . . . . .	262
14.2	Ecken- und Bogenzusammenhang in Digraphen . . . . .	269
14.3	Die Mengerschen Sätze . . . . .	277
14.4	Anwendungen der Mengerschen Sätze . . . . .	280
14.5	Aufgaben . . . . .	287
<b>15</b>	<b>Netzwerke</b>	<b>288</b>
15.1	Die Theorie von Ford-Fulkerson . . . . .	288
15.2	Algorithmus von Edmonds, Karp . . . . .	294

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	xiii
15.3 Anwendungen der Netzwerktheorie . . . . .	297
<b>16 Ramsey-Theorie</b>	<b>302</b>
16.1 Die klassischen Ramsey-Zahlen . . . . .	302
16.2 Verallgemeinerte Ramsey-Zahlen . . . . .	306
16.3 Ramsey-Zahlen von Bäumen . . . . .	311
<b>17 Lokal semi-vollständige Digraphen</b>	<b>315</b>
17.1 Zwei Struktursätze . . . . .	315
17.2 Ringförmige lokal semi-vollständige Digraphen . . . . .	319
17.3 Panzyklische lokal semi-vollständige Digraphen . . . . .	323
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>329</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>335</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>376</b>

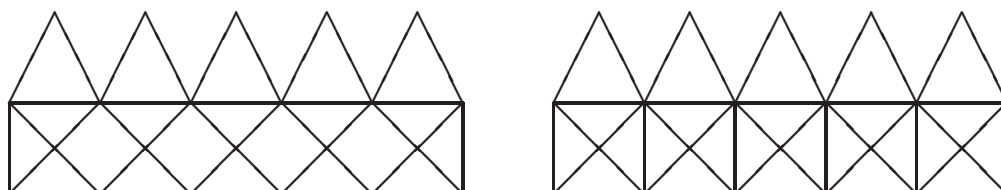
# Was sind Graphen?

In dem Titel “Graphen an allen Ecken und Kanten” ist sicherlich jedem die Redewendung “an allen Ecken und Kanten” geläufig. Aber was sind Graphen?

Lassen Sie mich mit dem allseits bekannten und beliebten Spiel aus unserer Jugendzeit (oder sogar Kindheit) beginnen, nämlich das sogenannte “Haus vom Nikolaus” zu skizzieren, ohne dabei den Stift abzusetzen und ohne eine Strecke zweimal zu durchlaufen. Also, zeichnen Sie bitte das “Haus” in der ersten Abbildung nach gegebener Vorschrift, und begleiten Sie Ihre Skizze mit den Worten: “Das ist das Haus vom Nikolaus”. (Jede Silbe entspricht genau einer Strecke, wobei die beiden Diagonalen als jeweils eine Strecke aufzufassen sind.)



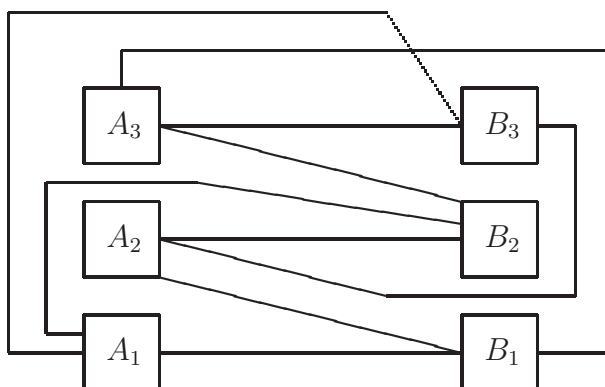
Wenn Sie die erste Aufgabe erfolgreich gelöst haben, dann können Sie die skizzierten Reihenhäuser mit der gleichen Methode versuchen (einen entsprechenden Spruch müssen Sie sich allerdings selbst ausdenken).



Falls beim Zeichnen der Reihenhäuser Schwierigkeiten auftreten sollten, so schauen Sie einfach in das 3. Kapitel dieses Buches.

Der Ursprung der Graphentheorie ist genau in solchen und ähnlichen Figuren zu finden. Angeregt durch das bekannte Königsberger Brückenproblem (man vgl. dazu auch Abschnitt 3.1), war es dem produktivsten und fruchtbarsten Mathematiker der Geschichte, dem Schweizer Genie *Leonhard Euler* [1] (1707 – 1783) vorbehalten, im Jahre 1736 die historisch erste graphentheoretische Arbeit zu verfassen.

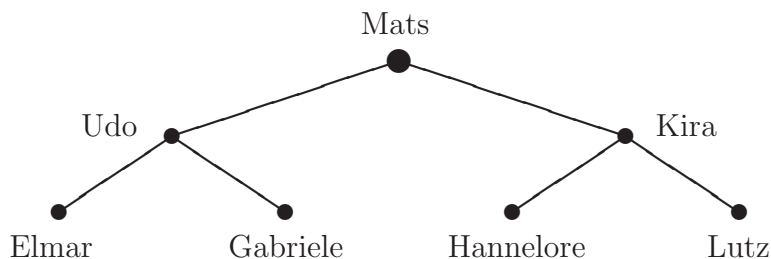
Nun folgt ein Beispiel aus dem “wirklichen Leben”. Wir betrachten 6 Familien  $A_1, A_2, A_3$  und  $B_1, B_2, B_3$ , die alle ein Grundstück besitzen (heute wirklich nichts besonderes mehr). Jede Familie  $A_i$  ist mit jeder Familie  $B_j$  befreundet, aber die Familien  $A_1, A_2, A_3$  sowie die Familien  $B_1, B_2, B_3$  sind untereinander verfeindet. Zum gegenseitigen Besuch sind zwischen den Grundstücken der Familien  $A_i$  und  $B_j$  Verbindungswege geplant. Damit sich aber die Mitglieder der Familien  $A_1, A_2, A_3$  bzw.  $B_1, B_2, B_3$  (im wahrsten Sinne des Wortes) nicht über den Weg laufen können, sollen diese 9 notwendigen Wege kreuzungsfrei angelegt werden. Haben diese Wege z.B. die skizzierte Gestalt, so müßten die Familien  $A_1$  und  $B_3$  einen Tunnel graben oder eine Brücke bauen, damit alle Wege kreuzungsfrei blieben.



Wegen der hohen Baukosten wären die Familien  $A_1$  und  $B_3$  natürlich sehr zornig, woraus sich neuer Ärger entwickeln würde. Am Ende könnten dann alle Familien untereinander zerstritten sein, so daß überhaupt keine Verbindungswege mehr nötig wären.

Damit Sie gegebenenfalls in solchen oder ähnlichen Situationen hilfreichen Beistand leisten können, empfehle ich Ihnen das Studium des 11. Kapitels.

Weitere typische Objekte aus der Graphentheorie sind Stammbäume. Wir skizzieren einmal den Stammbaum meines jüngsten Enkelsohnes Mats, der auf den Tage genau 60 Jahre nach mir das Licht dieser Welt erblickte.



Gebilde dieser Form heißen nun **Graphen**, wobei die Punkte **Ecken** und die Verbindungslinien **Kanten** genannt werden. Wegen der speziellen Struktur dieses Graphen mit 7 Ecken und 6 Kanten, trägt er tatsächlich den Namen “Baum” (man vgl. dazu Kapitel 2).

Wir kommen zu einem Problem aus meiner “Praxis”. Es wird ein Turnier (z.B. Volleyballturnier) veranstaltet, bei dem jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielt. Treten z.B. 10 Mannschaften an, so gibt es  $(10 \times 9)/2 = 45$  Begegnungen. Nun soll ein Spielplan erstellt werden, der immer 5 Paarungen gleichzeitig zuläßt. Um einen solchen Spielplan systematisch aufzustellen, kann man z.B. das im Abschnitt 7.3 beschriebene Verfahren verwenden, das natürlich nicht nur für die Zahl 10 gültig ist.

Tritt bei einem Volleyballturnier (Lieblingssportart des Autors) die sehr wahrscheinliche Situation ein, daß Mannschaft  $A$  gegen Mannschaft  $B$  gewinnt,  $B$  gegen  $C$  und  $C$  gegen  $A$  gewinnt, so sind unter den teilnehmenden Mannschaften mindestens zwei punktgleich, so daß für eine Abschlußtablelle das Satz- oder Ballverhältnis einbezogen werden muß (man beachte, daß beim Volleyball kein Unentschieden möglich ist). Einen Nachweis dieser Behauptung findet man im 5. Kapitel.

Ein weiteres “anwendungsbezogenes Beispiel” kann man aus dem sogenannten “Heiratsatz” von König-Hall ableiten. Vielleicht denken Sie im Augenblick noch nicht daran zu heiraten, und daher möchte ich, um der “Praxis” noch näher zu sein, den Heiratssatz und die damit verbundene Problematik als “Partyproblem” formulieren.

Auf einer Party seien  $m$  Damen (oder Mädchen) und  $m + n$  Herren (oder Jungen) (wegen der bekannten Tanzfaulheit der Herren ist es immer besser, wenn auf einer Party mehr Herren als Damen anwesend sind). Wir gehen davon aus, daß jede Dame mit einigen Herren befreundet ist. Nun kommt es zu einer Damenwahl. Da alle  $m$  Damen gerne Tanzen, aber auch alle Damen etwas schüchtern sind, möchte jede Dame nur mit einem Freund tanzen.

Damit haben wir unser “Partyproblem”. Denn es stellt sich unmittelbar die Frage, ob der Wunsch der Damen realisiert werden kann. In den Jahren 1931 und 1935 haben König [2] und Hall [1] unabhängig voneinander folgende notwendige und hinreichende Bedingung zur Lösung dieses Problems herausgefunden.

**Satz (Heiratssatz (König [2] 1931, Hall [1] 1935)).** Notwendig und hinreichend dafür, daß alle  $m$  Damen gleichzeitig mit einem ihrer Freunde tanzen können, ist, daß für alle  $k$  mit  $1 \leq k \leq m$  je  $k$  Damen insgesamt mindestens  $k$  Freunde haben.

*Beweis.* Die Voraussetzungen des Satzes sind natürlich notwendig, denn sind  $k$  Damen mit weniger als  $k$  Herren befreundet (für ein einziges  $k$ ), so kann der Tanz unter den gegebenen Bedingungen nicht stattfinden.

Daß die Bedingungen auch hinreichend sind, beweisen wir mit vollständiger Induktion nach  $m$ , wobei der Induktionsanfang für  $m = 1$  sofort einsichtig ist. Nun sei  $m \geq 2$  und wir setzen voraus, daß der Heiratssatz für alle  $q \leq m - 1$  schon bewiesen ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. *Fall.* Für alle  $k$ , die die Bedingung  $1 \leq k \leq m - 1$  erfüllen, haben je  $k$  Damen insgesamt mindestens  $k + 1$  Freunde. Fordert nun eine Dame einen Freund zum Tanz auf, so erfüllen die verbleibenden  $m - 1$  Damen die Bedingung, daß je  $j$  Damen ( $1 \leq j \leq m - 1$ ) noch mit  $j$  Herren befreundet sind. Das ist aber genau die Voraussetzung des Heiratssatzes für  $q = m - 1$ , womit das Problem nach Induktionsvoraussetzung für diesen Fall schon gelöst ist.

2. *Fall.* Für ein festes  $k$  mit  $1 \leq k \leq m - 1$  gebe es eine Auswahl von  $k$  Damen, die insgesamt genau  $k$  Freunde haben. Dann können sich diese  $k$  Damen nach Induktionsvoraussetzung (mit  $q = k$ ) jeweils einen Freund als Tanzpartner auswählen. Damit suchen die noch verbleibenden

$m-k$  Damen einen geeigneten Partner. Nun sind aber je  $i$  dieser  $m-k$  Damen ( $1 \leq i \leq m-k$ ) mit mindestens  $i$  der noch nicht auserwählten Herren befreundet, denn anderenfalls hätten  $i$  Damen zusammen mit den obigen  $k$  Damen insgesamt weniger als  $i+k$  Freunde. Nach Induktionsvoraussetzung (mit  $q = m-k$ ) kann jede dieser  $m-k$  Damen einen Freund als Partner wählen, und nun darf schließlich und endlich getanzt werden.  $\parallel$

Damit ist das "Partyproblem" theoretisch gelöst, aber es verbleiben doch noch einige offene Fragen, wie z.B.

Wie prüft man die Bedingungen von König und Hall vernünftig nach? Wie finden die Damen ihre Tanzpartner, falls man tatsächlich die Bedingungen von König und Hall nachgewiesen hat?

Für die praktische Lösung des "Partyproblems" mache ich einige, sich nicht ausschließende, Vorschläge.

1. Sie fragen einen Graphentheoretiker.
2. Sie studieren Kapitel 6 des vorliegenden Buches.
3. Die Damen legen ihre Schüchternheit ab.

Dabei erscheint mir der dritte Vorschlag der einfachste und anwendungsbezogenste zu sein.

# Kapitel 1

## Zusammenhang und Abstand

### 1.1 Graphen und Digraphen

**Definition 1.1.** Es seien  $E$  und  $K$  zwei disjunkte, nicht leere Mengen. Weiter setzen wir

$$P_2(E) = \{X \mid X \subseteq E \text{ mit } 1 \leq |X| \leq 2\},$$

wobei  $|X|$  die Kardinalzahl von  $X$  bedeutet. Ist  $g : K \rightarrow P_2(E)$  eine Abbildung, so nennen wir das Tripel  $(E, K, g)$  einen *Graphen* oder *ungerichteten Graphen*  $G$ . Im Fall  $E = K = \emptyset$  sprechen wir vom *leeren Graphen* und im Fall  $K = \emptyset$  und  $E \neq \emptyset$  von einem *Nullgraphen*. Für benutzen wir folgende Schreibweisen:

$$G = (E, K, g) = (E(G), K(G)) = (E, K).$$

Dabei  $E = E(G)$  heißt *Eckenmenge* und die Elemente aus  $E$  *Ecken* des Graphen  $G$ .  $K(G)$  heißt *Kantenmenge* und die Elemente aus  $K$  *Kanten* von  $G$ . Ist  $k \in K$  mit  $g(k) = \{x, y\}$  ( $x$  und  $y$  nicht notwendig verschieden), so heißen  $x, y$  *Endpunkte* der Kante  $k$ ; man sagt auch, die Kante  $k$  *inzidiert* mit den Ecken  $x$  und  $y$ , oder  $x$  und  $y$  sind durch die Kante  $k$  verbunden; im Fall  $x = y$  heißt  $k$  *Schlinge* oder *Loop*. Verschiedene Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, heißen *benachbart* oder *adjazent*. Inzidieren zwei verschiedene Kanten mit einer gemeinsamen Ecke, so nennt man die Kanten *inzident*. Eine Ecke, die mit keiner Kante inzidiert, heißt *isolierte Ecke*. Sind  $k_1$  und  $k_2$  zwei verschiedene Kanten mit  $g(k_1) = g(k_2) = \{x, y\}$ , so nennt man  $k_1$  und  $k_2$  *Mehrfachkanten* oder *parallele Kanten*. Ein Graph ohne Schlingen heißt *Multigraph*. Hat ein Multigraph keine Mehrfachkanten, so spricht man von einem *schlichten Graphen*. Ein Nullgraph, der nur aus einer einzigen Ecke besteht, wird auch *trivialer Graph* genannt.

Bei der anschaulichen Deutung eines Graphen kann man im allgemeinen die Ecken und die Kanten als in einem metrischen (oder nur topologischen) Raum, etwa in den  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ , eingebettet betrachten, indem man die Ecken als Punkte des Raumes und die Kanten als Jordansche Bogen, die diese Punkte miteinander verbinden, interpretiert. Prinzipiell sind aber die Ecken Elemente einer beliebigen Menge, und eine Kante  $k$  mit  $g(k) = \{x, y\}$  besitzt die einzige definierende Eigenschaft, daß sie ihre Endpunkte  $x$  und  $y$  bestimmt.

**Beispiel 1.1.** Gegeben seien die zwei disjunkten Mengen

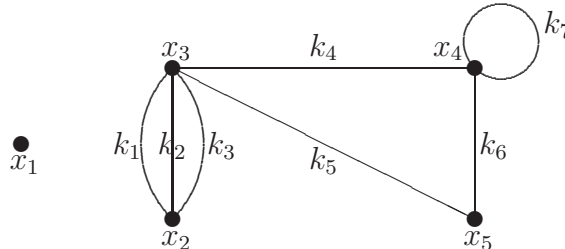
$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ und } K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$$



mit

$$g(k_1) = g(k_2) = g(k_3) = \{x_2, x_3\}, g(k_4) = \{x_3, x_4\}, \\ g(k_5) = \{x_3, x_5\}, g(k_6) = \{x_4, x_5\} \text{ und } g(k_7) = \{x_4\}.$$

Diesen so definierten Graphen  $G = (E, K, g)$  veranschaulichen wir zunächst durch eine Skizze.



Folgende Eigenschaften von  $G$  lesen wir aus der Definition oder der Skizze des Graphen ab:  $G$  besteht aus fünf Ecken und sieben Kanten. Die Ecken  $x_2$  und  $x_3$  sind Endpunkte der parallelen Kanten  $k_1, k_2$  und  $k_3$ . Damit ist der Graph nicht schlicht. Die Kante  $k_7$  ist eine Schlinge, womit  $G$  auch kein Multigraph ist. Die Kanten  $k_5$  und  $k_6$  inzidieren mit der Ecke  $x_5$ , womit diese Kanten inzident sind. Die Ecken  $x_3$  und  $x_4$  sind adjazent, die Ecken  $x_2$  und  $x_4$  sind nicht adjazent. Da  $x_1$  mit keiner Kante inzidiert, ist  $x_1$  eine isolierte Ecke.

Die nächsten beiden Beispiele sollen demonstrieren, daß man nicht jeden Graphen so einfach veranschaulichen kann.

**Beispiel 1.2.** Ist  $E$  die Menge der reellen Zahlen, also  $E = \mathbb{R}$ ,  $K$  die Menge aller reellen Zahlenfolgen  $(x_i)$  und  $g: K \rightarrow P_2(E)$  definiert durch  $g(k) = \{x_1, x_3\}$  mit  $k = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

**Beispiel 1.3.** Ist  $E = \mathbb{R}$ ,  $K = \{f | f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ eine Funktion}\}$  und

$$s_f = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \text{ und } i_f = \inf_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|,$$

so definieren wir  $g: K \rightarrow P_2(E)$  durch

$$g(f) = \left\{ i_f, \frac{s_f}{1 + s_f} \right\} \text{ mit } \frac{s_f}{1 + s_f} = 1, \text{ wenn } s_f = \infty,$$

Nun ist das Tripel  $(E, K, g)$  ein Graph.

In der Graphentheorie spielen neben den ungerichteten Graphen noch die gerichteten Graphen eine wichtige Rolle, die wir in der nächsten Definition vorstellen wollen.

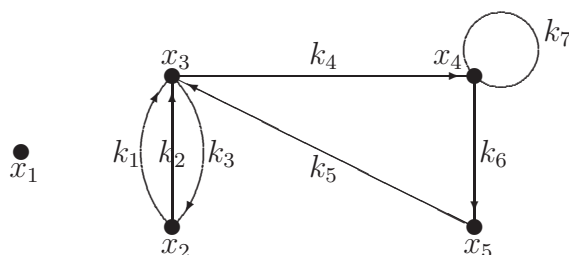
**Definition 1.2.** Es seien  $E, B$  nicht leere Mengen mit  $E \cap B = \emptyset$ . Ist  $h: B \rightarrow E \times E$  eine Abbildung, so nennen wir das Tripel  $(E, B, h)$  einen *Digraphen* oder *gerichteten Graphen*  $D$ . Für Digraphen benutzen wir folgende Schreibweisen:

$$D = (E, B, h) = (E(D), B(D)) = (E, B).$$

Im Fall  $B = \emptyset$  fallen die Begriffe Graph und Digraph zusammen. Analog zu Definition 1.1 werden die *Nulldigraphen* und *trivialen Digraphen* erklärt.  $E = E(D)$  heißt *Eckenmenge* und die Elemente aus  $E$  *Ecken* des Digraphen  $D$ .  $B = B(D)$  heißt *Bogenmenge* und die Elemente

aus  $B$  Bogen oder *gerichtete* bzw. *orientierte Kanten* von  $D$ . Ist  $k \in B$  mit  $h(k) = (x, y)$  ( $x, y$  nicht notwendig verschieden), so heißt  $x$  *Anfangspunkt* und  $y$  *Endpunkt* des Bogens  $k$ ; man sagt auch, der Bogen  $k$  geht von  $x$  nach  $y$ , oder  $k$  *inzidiert* mit  $x$  *positiv* und mit  $y$  *negativ*; im Fall  $x = y$  heißt  $k$  *Schlinge* oder *Loop*. Anschaulich stellt man  $k$  durch einen von  $x$  nach  $y$  gerichteten Pfeil dar, wenn  $x$  und  $y$  verschieden sind. Eine Ecke, die weder Anfangspunkt noch Endpunkt eines Bogens ist, heißt *isolierte Ecke*. Zwei Bogen heißen *parallel*, wenn sie denselben Anfangs- und Endpunkt haben. Ein Digraph ohne Schlingen heißt *Multidigraph*. Hat ein Multidigraph keine parallelen Bogen, so spricht man von einem *schlichten Digraphen*. Jedem Digraphen  $D$  können wir auf natürliche und eindeutige Weise einen Graphen  $G$  mit der gleichen Eckenmenge zuordnen, indem wir jedem Bogen genau eine Kante mit den gleichen Endpunkten zuordnen. Ein solcher Graph  $G = G(D)$  heißt *untergeordneter Graph* von  $D$ . Umgekehrt kann man aus einem Graphen  $G$  einen Digraphen  $D$  konstruieren, indem man aus jeder Kante einen Bogen macht. Man nennt  $D$  dann eine *Orientierung* von  $G$ . Diese Konstruktion ist natürlich keineswegs eindeutig.

**Beispiel 1.4.** Mit Hilfe einer Skizze werden wir dem Graphen  $G$  aus Beispiel 1.1 eine Orientierung  $D$  geben.



Folgende Eigenschaften von  $D$  lesen wir aus der Skizze ab: Die Bogen  $k_1$  und  $k_2$  sind parallel, womit  $D$  nicht schlicht ist. Die Bogen  $k_1$  und  $k_3$  sind nicht parallel. Der Bogen  $k_4$  geht von  $x_3$  nach  $x_4$ , womit  $k_4$  mit  $x_3$  positiv und mit  $x_4$  negativ inzidiert.  $D$  besitzt die Schlinge  $k_7$ . Der Graph  $G$  aus Beispiel 1.1 ist der untergeordnete Graph dieses Digraphen  $D$ .

**Definition 1.3.** Graphen  $G$  bzw. Digraphen  $D$  mit der Eigenschaft  $|E(G)|, |K(G)| < \infty$  bzw.  $|E(D)|, |B(D)| < \infty$  heißen *endlich*. Im Fall von endlichen Graphen bzw. Digraphen benutzen wir durchweg die Schreibweisen

$$\begin{aligned} n &= n(G) = |E(G)|, n = n(D) = |E(D)|, \\ m &= m(G) = |K(G)|, m = m(D) = |B(D)|. \end{aligned}$$

Man nennt  $n(G)$  bzw.  $n(D)$  die *Ordnung* und  $m(G)$  bzw.  $m(D)$  die *Größe* des Graphen  $G$  bzw. des Digraphen  $D$ .

**Bemerkung 1.1.** In diesem Buch behandeln wir ausschließlich endliche sowie nicht leere Graphen und Digraphen.

**Definition 1.4.** Ist  $G = (E, K)$  ein Graph und  $x \in E$  eine Ecke, so bezeichnen wir mit

$$d(x) = d(x, G)$$

die Anzahl der Kanten, die mit der Ecke  $x$  inzidieren, wobei Schlingen doppelt gezählt werden. Wir nennen  $d(x)$  den *Eckengrad*, *Grad* oder die *Valenz* der Ecke  $x$ . Ist  $d(x) = 1$ , so

heißt  $x$  *Endecke* und die mit der Ecke  $x$  inzidierende Kante *Endkante*. Für den *minimalen* bzw. *maximalen Eckengrad* eines Graphen schreiben wir

$$\delta = \delta(G) = \min_{x \in E} d(x) \text{ und } \Delta(G) = \Delta = \max_{x \in E} d(x).$$

Ist  $D = (E, B)$  ein Digraph und  $x \in E$ , so bezeichnen wir mit

$$d^+(x, D) = d^+(x) \text{ bzw. } d^-(x, D) = d^-(x)$$

die Anzahl der Bogen, die mit  $x$  positiv bzw. negativ inzidieren, wobei hier eine Schlinge, die mit  $x$  inzidiert, zu  $d^+(x)$  und  $d^-(x)$  jeweils den Beitrag 1 leistet. Wir nennen  $d^+(x) = d^+(x, D)$  den *Außengrad* und  $d^-(x) = d^-(x, D)$  den *Innengrad* der Ecke  $x$ . Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} \delta^+ = \delta^+(D) &= \min_{x \in E} d^+(x) \text{ und } \delta^- = \delta^-(D) = \min_{x \in E} d^-(x), \\ \Delta^+ = \Delta^+(D) &= \max_{x \in E} d^+(x) \text{ und } \Delta^- = \Delta^-(D) = \max_{x \in E} d^-(x), \end{aligned}$$

sowie

$$d(G) = \sum_{x \in E} d(x), d^+(D) = \sum_{x \in E} d^+(x) \text{ und } d^-(D) = \sum_{x \in E} d^-(x).$$

Unser erster Satz läßt sich einfach beweisen, ist aber von zentraler Bedeutung für die gesamte Graphentheorie.

**Satz 1.1 (Handschlaglemma, Euler [1] 1736).** i) Es sei  $G = (E, K)$  ein Graph. Ist  $|K| = m$ , so gilt

$$d(G) = \sum_{x \in E} d(x) = 2m.$$

Insbesondere ist die Anzahl der Ecken ungeraden Grades stets gerade.

ii) Ist  $D = (E, B)$  ein Digraph mit  $|B| = m$ , so gilt

$$d^+(D) = \sum_{x \in E} d^+(x) = d^-(D) = \sum_{x \in E} d^-(x) = m.$$

*Beweis.* i) Jede Kante (auch Schlingen) liefert zum Gesamtgrad von  $G$  den Beitrag 2, womit  $d(G) = 2m$  gilt. Daraus ergibt sich

$$2m = \sum_{\substack{x \in E, \\ d(x) \text{ gerade}}} d(x) + \sum_{\substack{x \in E, \\ d(x) \text{ ungerade}}} d(x),$$

womit die Anzahl der Ecken ungeraden Grades notwendig gerade ist.

ii) Jeder Bogen (auch Schlingen) liefert für  $d^+(D)$  und  $d^-(D)$  den Beitrag 1, womit  $d^+(D) = d^-(D) = m$  gilt. ||

**Definition 1.5.** Es seien  $G = (E, K, g)$  und  $G' = (E', K', g')$  zwei Graphen und  $f: E \rightarrow E'$  sowie  $F: K \rightarrow K'$  Abbildungen. Das Paar  $(f, F)$  heißt *Graphenhomomorphismus* oder *Homomorphismus*, wenn für alle  $k \in K$  gilt:

$$g(k) = \{x, y\} \implies g'(F(k)) = \{f(x), f(y)\}$$

Für Graphenhomomorphismen benutzen wir die kurze Schreibweise  $(f, F): G \rightarrow G'$ . Die Menge aller Homomorphismen von  $G$  nach  $G'$  bezeichnen wir wie üblich mit  $\text{Hom}(G, G')$ . Sind die Abbildungen  $f, F$  bijektiv, so heißt  $(f, F)$  *Graphenisomorphismus* oder *Isomorphismus*, und die Graphen  $G$  und  $G'$  heißen *isomorph*, in Zeichen  $G' \cong G$ .

**Bemerkung 1.2.** Graphenhomomorphismen respektieren Adjazenz von Ecken. Das bedeutet: Ist  $(f, F): G \rightarrow G'$  ein Graphenhomomorphismus, und sind die beiden Ecken  $x, y \in E(G)$  adjazent in  $G$ , so gilt  $f(x) = f(y)$ , oder die Bildecken  $f(x)$  und  $f(y)$  sind adjazent in  $G'$ . Im gleichen Sinne respektieren Graphenhomomorphismen auch die Inzidenz von Kanten. Darüber hinaus gehen bei Homomorphismen Schlingen in Schlingen über.

Isomorphe Graphen werden als im wesentlichen gleich angesehen. Ist  $(f, F): G \rightarrow G'$  ein Graphenisomorphismus, so gilt z.B.  $d(a, G) = d(f(a), G')$  für alle  $a \in E(G)$  (man vgl. Aufgabe 1.3).

**Bemerkung 1.3.** Die Definition 1.5 läßt sich entsprechend für Digraphen formulieren.

Zur Darstellung von Graphen und Digraphen werden auch die sogenannten Adjazenzmatrizen und Inzidenzmatrizen benutzt.

**Definition 1.6.** Es sei  $G = (E, K, g)$  ein Graph mit der Eckenmenge  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  und der Kantenmenge  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Die Anzahl der Kanten, die  $x_i$  und  $x_j$  verbinden, bezeichnen wir mit  $m(x_i, x_j) = m_G(x_i, x_j)$ , wobei Schlingen doppelt gezählt werden. Die quadratische  $n \times n$  Matrix

$$A_G = A = (m(x_i, x_j))$$

heißt *Adjazenzmatrix* von  $G$ .

Die  $n \times m$  Matrix  $I_G = I = (b_{ij})$  mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x_i \text{ und } k_j \text{ nicht inzident} \\ 1 & \text{wenn } x_i \text{ und } k_j \text{ inzident und } k_j \text{ keine Schlinge} \\ 2 & \text{wenn } x_i \text{ und } k_j \text{ inzident und } k_j \text{ Schlinge} \end{cases}$$

heißt *Inzidenzmatrix* von  $G$  für  $K \neq \emptyset$ .

Es sei  $D = (E, B, h)$  ein Digraph mit  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  und  $B = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Mit  $m_D(x_i, x_j)$  bezeichnen wir die Anzahl der Bogen von  $x_i$  nach  $x_j$ , wobei Schlingen einfach gezählt werden. Die quadratische  $n \times n$  Matrix

$$A_D = A = (m_D(x_i, x_j))$$

heißt *Adjazenzmatrix* von  $D$ .

Die  $n \times m$  Matrix  $I_D = I = (a_{ij})$  mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x_i \text{ und } k_j \text{ nicht inzident} \\ 1 & \text{wenn } x_i \text{ Anfangspunkt von } k_j \text{ und } k_j \text{ keine Schlinge} \\ -1 & \text{wenn } x_i \text{ Endpunkt von } k_j \text{ und } k_j \text{ keine Schlinge} \\ -0 & \text{wenn } x_i \text{ und } k_j \text{ inzident und } k_j \text{ Schlinge} \end{cases}$$

heißt *Inzidenzmatrix* von  $D$  für  $B \neq \emptyset$  (die  $-0$  dient der Kennzeichnung von Schlingen).

**Beispiel 1.5.** Den Graphen aus Beispiel 1.1 und den Digraphen aus Beispiel 1.4 werden wir jeweils durch seine Adjazenzmatrix bzw. Inzidenzmatrix darstellen.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, I_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 1.4.** Durch Adjazenz- bzw. Inzidenzmatrizen werden Graphen und Digraphen eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt. Diese Matrizen haben die folgenden Eigenschaften (man vgl. Aufgabe 1.4):

- i) Die Matrix  $A_G$  ist symmetrisch, womit ihre Eigenwerte reell sind.
- ii) In  $A_G$  ergibt die Summe der Glieder des  $i$ -ten Zeilenvektors bzw. des  $i$ -ten Spaltenvektors den Eckengrad  $d(x_i, G)$ .
- iii) In  $I_G$  ist  $d(x_i, G)$  die Summe der Glieder des  $i$ -ten Zeilenvektors, und die Summe der Glieder jedes Spaltenvektors beträgt 2.
- iv) In  $A_D$  ergibt sich  $d^+(x_i, D)$  bzw.  $d^-(x_i, D)$  als die Summe der Glieder des  $i$ -ten Zeilenvektors bzw. des  $i$ -ten Spaltenvektors.
- v) In  $I_D$  ergibt die Summe der Glieder jedes Spaltenvektors 0.

**Definition 1.7.** Ein Graph  $G' = (E', K', g')$  heißt *Teilgraph* eines Graphen  $G = (E, K, g)$ , in Zeichen  $G' \subseteq G$ , wenn  $E' \subseteq E$ ,  $K' \subseteq K$  und  $g'$  die Einschränkung von  $g$  auf die Menge  $K'$  ist. Im Fall  $E' = E$  nennt man den Teilgraphen  $G'$  auch *Faktor* von  $G$ .

Es sei  $E' \subseteq E$ . Derjenige Teilgraph von  $G$ , der aus  $E'$  und allen Kanten von  $G$  besteht, die nur mit Ecken aus  $E'$  inzidieren, heißt der von  $E'$  *induzierte Teilgraph*, in Zeichen  $G[E']$ . Wir setzen  $G[E - E'] = G - E'$  für  $E' \subseteq E$  und  $G - \{x\} = G - x$  für  $x \in E$ .

Es sei  $K' \subseteq K$ . Derjenige Teilgraph von  $G$ , der aus  $K'$  und allen Ecken von  $G$  besteht, die mit Kanten aus  $K'$  inzidieren, heißt der von  $K'$  *erzeugte Teilgraph*, in Zeichen  $G[K']$ . Für  $K' \subseteq K$  wird der Graph  $G - K'$  durch  $G - K' = (E, K - K')$  definiert. Wir setzen  $G - \{k\} = G - k$  für  $k \in K$ .

Entsprechende Operationen kann man auch für Digraphen erklären.

Sind  $x, y \in E$  und fügt man zum Graphen  $G$  eine neue Kante  $k$  mit den Endpunkten  $x$  und  $y$  hinzu, so schreibt man dafür  $G + k$  oder  $G + xy$ .

Sind  $G_i = (E_i, K_i)$  Teilgraphen von  $G$ , so wird die *Vereinigung* bzw. der *Durchschnitt* dieser Graphen definiert durch:

$$\cup G_i = (\cup E_i, \cup K_i) \text{ bzw. } \cap G_i = (\cap E_i, \cap K_i).$$

Es ist leicht zu verifizieren, daß die Vereinigung und der Durchschnitt von Teilgraphen wieder Teilgraphen sind.

**Definition 1.8.** Ein Graph  $G$  heißt *regulär*, wenn  $\delta(G) = \Delta(G)$  gilt. Setzt man  $r = \delta(G) = \Delta(G)$ , so nennt man  $G$  auch  *$r$ -regulär*.

Ein schlichter Graph mit  $n$  Ecken, in dem jedes Paar von Ecken adjazent ist, heißt *vollständiger Graph*, in Zeichen  $K_n$ .

**Bemerkung 1.5.** Ist der Graph  $G \cong K_n$ , so ist  $G$  natürlich  $(n - 1)$ -regulär. Da für jede Ecke  $x \in E(G)$  eines schlichten Graphen  $G$  mit  $n$  Ecken die Ungleichung  $d(x, G) \leq n - 1$  besteht, ergibt sich aus dem Handschlaglemma

$$|K(G)| = \frac{1}{2} \sum_{x \in E(G)} d(x, G) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

für alle schlichten Graphen  $G$ , und die Gleichheit besteht genau dann, wenn  $G$  vollständig ist.

## 1.2 Wege, Kreise und Zusammenhang

**Definition 1.9.** Es sei  $G = (E, K, g)$  ein Graph und  $k_1, k_2, \dots, k_p \in K$  (die  $k_i$  müssen nicht notwendig verschieden sein) mit  $g(k_i) = \{a_{i-1}, a_i\}$  für  $i = 1, 2, \dots, p$ . Unter diesen Voraussetzungen heißt  $(k_1, k_2, \dots, k_p)$  *Kantenfolge von  $a_0$  nach  $a_p$  der Länge  $p$* . Für Kantenfolgen benutzen wir folgende Schreibweisen

$$Z = (k_1, k_2, \dots, k_p) = (a_0, a_1, \dots, a_p) = (a_0, k_1, a_1, \dots, k_p, a_p) = a_0 a_1 \cdots a_p,$$

und wir nennen  $a_0$  *Anfangspunkt* und  $a_p$  *Endpunkt* der Kantenfolge  $Z$ . Man sagt auch,  $Z$  geht von  $a_0$  nach  $a_p$ , und die Länge  $p$  von  $Z$  bezeichnen wir mit  $L(Z)$ . Die Kantenfolge  $Z$  heißt *geschlossen*, wenn  $a_0 = a_p$  und *offen*, wenn  $a_0 \neq a_p$  gilt.

Sind in einer Kantenfolge alle Kanten paarweise verschieden, so spricht man von einem *Kantenzug*. Sind in einem Kantenzug alle Ecken paarweise verschieden, so liegt ein *Weg* vor. Ein geschlossener Kantenzug  $C = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ , in dem die Ecken  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  paarweise verschieden sind, heißt *Kreis*. Ein Kreis der Länge  $p$  wird häufig mit  $C_p$  bezeichnet.

Mit  $E(Z)$  bzw.  $K(Z)$  bezeichnen wir die in  $G$  liegenden Ecken bzw. Kanten der Kantenfolge  $Z$ . Besteht  $Z$  nur aus einer einzigen Ecke, so spricht man vom *Nullweg*.

Zunächst beweisen wir einige Eigenschaften von Kantenfolgen, die anschaulich recht einleuchtend sind.

**Satz 1.2.** Ist  $Z$  eine offene Kantenfolge von  $a_0$  nach  $a_p$ , so existiert ein Weg  $W$  von  $a_0$  nach  $a_p$  mit  $K(W) \subseteq K(Z)$ .

*Beweis.* Man wähle eine Kantenfolge  $W$  minimaler Länge von  $a_0$  nach  $a_p$  mit  $K(W) \subseteq K(Z)$ . Hat  $W$  die Gestalt

$$W = (b_0, k_1, b_1, \dots, k_t, b_t) \text{ mit } b_0 = a_0, b_t = a_p,$$

so gilt  $b_i \neq b_j$  für  $i < j$ . Denn angenommen  $b_i = b_j$  für  $i < j$ , so wäre

$$V = (b_0, k_1, b_1, \dots, b_i, k_{j+1}, b_{j+1}, \dots, b_t)$$

eine Kantenfolge von  $a_0$  nach  $a_p$  mit  $K(V) \subseteq K(Z)$ , die  $j - i$  weniger Kanten als  $W$  hätte, was nach der Wahl von  $W$  nicht möglich ist. Damit sind alle Ecken von  $W$  verschieden, und  $W$  ist ein Weg mit den gewünschten Eigenschaften. ||

Den nächsten Satz beweist man analog (man vgl. Aufgabe 1.5).

**Satz 1.3.** Ist  $Z$  ein geschlossener Kantenzug positiver Länge, und ist  $a \in E(Z)$ , so gibt es einen Kreis  $C$  mit  $a \in E(C)$  und  $K(C) \subseteq K(Z)$ .

**Bemerkung 1.6.** Im Satz 1.3 kann der Kantenzug nicht durch eine Kantenfolge ersetzt werden. Denn betrachtet man den vollständigen Graphen  $K_2$  mit den Ecken  $0, 1$  und der Kante  $k$ , so ist  $Z = (0, k, 1, k, 0)$  eine geschlossene Kantenfolge, aber es existiert natürlich kein Kreis im  $K_2$ .

Mit Hilfe von Satz 1.2 ergibt sich ohne Schwierigkeiten das folgende Ergebnis.

**Satz 1.4.** Sind  $a, b, c$  drei verschiedene Ecken eines Graphen, und existieren Kantensfolgen  $Z_1$  von  $a$  nach  $b$  und  $Z_2$  von  $b$  nach  $c$ , so gibt es einen Weg  $W$  von  $a$  nach  $c$  mit  $K(W) \subseteq K(Z_1) \cup K(Z_2)$ .

**Satz 1.5.** Es sei  $G = (E, K, g)$  ein Graph und  $a, b$  zwei verschiedene Ecken aus  $E$ . Sind  $W_1$  und  $W_2$  zwei verschiedene Wege in  $G$  (d.h.  $K(W_1) \neq K(W_2)$ ) von  $a$  nach  $b$ , so gibt es in  $G$  einen Kreis  $C$  mit  $K(C) \subseteq K(W_1) \cup K(W_2)$ .

*Beweis.* Es seien

$$W_1 = (a_0, k_1, a_1, \dots, k_p, a_p) \text{ und } W_2 = (b_0, l_1, b_1, \dots, l_q, b_q)$$

mit  $a_0 = b_0 = a$  und  $a_p = b_q = b$ . Da  $W_1$  und  $W_2$  verschieden sind, gibt es eine erste Kante  $k_s$  mit  $g(k_s) = \{a_{s-1}, a_s\}$ , die von  $l_s$  mit  $g(l_s) = \{b_{s-1}, b_s\}$  verschieden ist. Ist nun  $a_t$  mit  $s \leq t \leq p$  diejenige Ecke mit dem kleinsten Index, die mit einer Ecke  $b_s, b_{s+1}, \dots, b_q$ , etwa mit  $b_r$ , identisch ist, so ist

$$C = (a_{s-1}, k_s, a_s, \dots, k_t, a_t, l_r, b_{r-1}, \dots, b_s, l_s, b_{s-1} = a_{s-1})$$

ein Kreis mit den gewünschten Eigenschaften. ||

**Definition 1.10.** Zwei Ecken  $a, b$  eines Graphen  $G$  heißen *zusammenhängend*, wenn ein Weg von  $a$  nach  $b$  existiert. Dies definiert auf der Eckenmenge von  $G$  eine Äquivalenzrelation. Jeder von einer Äquivalenzklasse induzierte Teilgraph heißt *Zusammenhangskomponente* oder *Komponente* von  $G$ . Sind  $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$  die Komponenten von  $G$ , so gilt

$$G = \bigcup_{i=1}^{\kappa} G_i.$$

Im folgenden bezeichnen wir mit  $\kappa = \kappa(G)$  immer die Anzahl der Komponenten eines Graphen  $G$ . Besteht  $G$  nur aus einer einzigen Komponente, so heißt der Graph *zusammenhängend*.

**Bemerkung 1.7.** Ist  $G = (E, K, g)$  ein Graph und  $k \in K$  eine Kante mit  $g(k) = \{a, b\}$ , so benutzen wir im folgenden fast ausschließlich die kurze Schreibweise  $k = ab$ . Entsprechend schreiben wir für einen Bogen  $k$  von  $a$  nach  $b$  auch  $k = (a, b)$ .

**Satz 1.6.** Ist  $G$  ein Graph und  $k \in K(G)$ , so gilt

$$\kappa(G) \leq \kappa(G - k) \leq \kappa(G) + 1.$$

*Beweis.* Da die erste Ungleichung klar ist, genügt es, die zweite Ungleichung zu beweisen.

Es sei  $k = ab$ , und wir nehmen an, daß  $G - k$  aus den Komponenten  $G_1, G_2, \dots, G_p$  mit  $p \geq \kappa(G) + 2$  besteht. Sind  $a, b \in E(G_i)$  für ein  $i$ , so ergibt sich sofort der Widerspruch

$$\kappa(G) = \kappa((G - k) + k) = p > \kappa(G).$$

Im verbleibenden Fall  $a \in E(G_i)$  und  $b \in E(G_j)$  mit  $i \neq j$  ergibt sich der Widerspruch

$$\kappa(G) = \kappa((G - k) + k) = p - 1 > \kappa(G). \quad ||$$

**Satz 1.7.** Es sei  $G$  ein Graph und  $k \in K(G)$ . Es gilt genau dann  $\kappa(G) = \kappa(G - k)$ , wenn  $k$  zu einem Kreis von  $G$  gehört.



*Beweis.* Es sei  $k = ab$ . Gibt es einen Kreis  $C$  in  $G$  mit  $k \in K(C)$ , so ist  $C - k$  ein Weg von  $a$  nach  $b$ , womit alle Wege, die die Kante  $k$  benutzen, über den Weg  $C - k$  umgeleitet werden können. Daher ist dann  $\kappa(G) = \kappa(G - k)$ .

Gilt umgekehrt  $\kappa(G) = \kappa(G - k)$ , so liegen die Ecken  $a$  und  $b$  im Graphen  $G - k$  weiterhin in einer Komponente, womit es in  $G - k$  einen Weg  $W$  von  $a$  nach  $b$  gibt. Dann ist aber  $W + k$  ein Kreis im Graphen  $G$ . ||

**Definition 1.11.** Eine Kante  $k$  eines Graphen  $G$  heißt *Brücke*, wenn  $\kappa(G) < \kappa(G - k)$  gilt.

Aus den Sätzen 1.6 und 1.7 ergeben sich sofort folgende Charakterisierungen von Brücken.

**Folgerung 1.1.** Es sei  $k$  eine Kante des Graphen  $G$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i)  $k$  ist eine Brücke.
- ii)  $k$  gehört zu keinem Kreis von  $G$ .
- iii) Es gilt  $\kappa(G) + 1 = \kappa(G - k)$ .

Folgerung 1.1 liefert uns ohne Schwierigkeit

**Folgerung 1.2.** Ist  $a$  eine Endecke des Graphen  $G$ , so gilt

$$\kappa(G) = \kappa(G - a).$$

**Satz 1.8.** Ein Graph  $G$  mit  $\delta(G) \geq 2$  besitzt mindestens einen Kreis.

*Beweis.* Besitzt  $G$  eine Schlinge oder Mehrfachkanten, so ist nichts mehr zu zeigen. Nun sei  $G$  schlicht und  $W = (a_0, k_1, \dots, k_p, a_p)$  ein längster Weg, der wegen der Endlichkeit von  $G$  endliche Länge hat. Da  $d(a_0, G) \geq 2$  gilt, muß  $a_0$  zu einem  $a_i$  mit  $2 \leq i \leq p$  adjazent sein, womit wir einen Kreis gefunden haben. ||

Für schlichte Graphen beweisen wir folgende Erweiterung von Satz 1.8, die auf Dirac [2] zurückgeht.

**Satz 1.9 (Dirac [2] 1952).** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 2$ , so besitzt  $G$  einen Kreis  $C$  der Länge  $L(C) \geq \delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Es sei  $W = (a_0, k_1, \dots, k_p, a_p)$  ein längster Weg in  $G$ . Dann ist  $a_0$  einerseits höchstens zu den Ecken  $a_1, a_2, \dots, a_p$  adjazent, und andererseits ist  $a_0$  mit mindestens  $\delta(G)$  dieser Ecken benachbart. Ist  $a_i$  diejenige Ecke aus  $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  mit dem größten Index, die zu  $a_0$  adjazent ist, so gilt  $i \geq \delta(G)$ , und es ist  $C = (a_0, a_1, \dots, a_i, a_0)$  ein Kreis der gewünschten Länge. ||

**Satz 1.10.** Jeder zusammenhängende Graph  $G$  der Ordnung  $n(G) \geq 2$  besitzt zwei verschiedene Ecken  $v_1$  und  $v_2$ , so daß sowohl  $G - v_1$  als auch  $G - v_2$  zusammenhängend ist.

*Beweis.* Ist  $W = (a_0, k_1, a_1, \dots, k_p, a_p)$  ein längster Weg in  $G$ , so ist die Ecke  $a_0$  höchstens zu den Ecken  $a_1, a_2, \dots, a_p$  adjazent. Löschen wir alle mit  $a_0$  inzidenten Kanten  $k \neq k_1$ , so erhalten wir nach Satz 1.7 einen zusammenhängenden Graphen  $H$ , da alle diese Kanten auf einem Kreis liegen. Nun ist aber  $a_0$  eine Endecke von  $H$ , und daher liefert Folgerung 1.2

$$1 = \kappa(H) = \kappa(H - a_0).$$

Wegen  $H - a_0 = G - a_0$ , folgt daraus  $\kappa(G - a_0) = 1$ . Analog ergibt sich  $\kappa(G - a_p) = 1$ . Da  $a_0 \neq a_p$  gilt, ist der Satz vollständig bewiesen. ||



**Definition 1.12.** Ist  $G$  ein Graph, so heißt die Größe

$$\mu = \mu(G) = m(G) - n(G) + \kappa(G)$$

*Index* oder *zyklomatische Zahl* von  $G$ .

**Satz 1.11.** Für jeden Graphen  $G$  gilt  $\mu(G) \geq 0$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $m = m(G)$ .

Ist  $m = 0$ , so ist  $G$  ein Nullgraph, und es gilt  $\mu(G) = 0$ .

Nun sei  $m > 0$  und  $k$  eine beliebige Kante von  $G$ . Dann ergibt sich nach Induktionsvoraussetzung und aus Satz 1.6

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu(G - k) = m(G) - 1 - n(G) + \kappa(G - k) \\ &\leq m(G) - 1 - n(G) + \kappa(G) + 1 = \mu(G). \end{aligned} \quad \parallel$$

Ist  $G$  ein beliebiger Graph, so folgt aus Satz 1.11  $n(G) - \kappa(G) \leq m(G)$ . Für schlichte Graphen leiten wir nun eine Abschätzung von  $m(G)$  nach oben her.

**Satz 1.12.** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$m(G) \leq \binom{n(G) - \kappa(G) + 1}{2}.$$

*Beweis.* Es seien  $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$  die Komponenten von  $G$ . Zum Beweis dieser Ungleichung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) voraussetzen, daß alle Komponenten von  $G$  vollständig sind. Denn ist eine Komponente nicht vollständig, so kann man diese durch Hinzufügen von neuen Kanten zu einem vollständigen Graphen ergänzen, ohne daß sich die rechte Seite der Ungleichung ändert.

Gibt es zwei Komponenten  $G_i, G_j$  mit  $n(G_i) \geq n(G_j) > 1$ , so ersetzen wir  $G_i$  und  $G_j$  durch zwei neue vollständige Graphen  $H_i$  mit  $n(G_i) + 1$  und  $H_j$  mit  $n(G_j) - 1$  Ecken. Auch bei diesem Prozeß bleibt die rechte Seite der Ungleichung unverändert, aber die Anzahl der Kanten erhöht sich um  $n(G_i) - (n(G_j) - 1) \geq 1$ . Daher wird die linke Seite der Ungleichung maximal, wenn  $G$  aus einem vollständigen Graphen mit  $n(G) - (\kappa(G) - 1)$  Ecken und  $\kappa(G) - 1$  isolierten Ecken besteht. In diesem Extremfall gilt aber nach Bemerkung 1.5 in unserer Ungleichung die Gleichheit. ||

Aus diesem Satz ergibt sich sofort

**Folgerung 1.3.** Gilt  $m(G) > \frac{1}{2}(n(G) - 1)(n(G) - 2)$  für einen schlichten Graphen  $G$ , so ist  $G$  zusammenhängend.

**Definition 1.13.** Ist  $G$  ein Graph und  $x \in E(G)$ , so heißt

$$N(x) = N(x, G) = \{y \in E(G) \mid y \text{ adjazent zu } x\}$$

die *Menge aller Nachbarn* der Ecke  $x$ . Ist  $A \subseteq E(G)$ , so bedeutet

$$N(A) = N(A, G) = \bigcup_{x \in A} N(x)$$

die *Menge aller Nachbarn* der Eckenmenge  $A$ . Weiter sei  $N[x] = N[x, G] = N(x) \cup \{x\}$  für  $x \in E(G)$  und  $N[A] = N[A, G] = N(A) \cup A$  für  $A \subseteq E(G)$ .

**Bemerkung 1.8.** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt  $|N(x, G)| = d(x, G)$  für jede Ecke  $x \in E(G)$ .

**Definition 1.14.** Ist  $D = (E, B)$  ein Digraph und  $x \in E$ , so setzen wir:

$$\begin{aligned} N^+(x) &= N^+(x, D) = \{y \in E - \{x\} \mid (x, y) \in B\} \\ N^-(x) &= N^-(x, D) = \{y \in E - \{x\} \mid (y, x) \in B\} \end{aligned}$$

Ist  $y \in N^+(x)$ , so heißt  $y$  *positiver Nachbar* von  $x$ . Ist  $y \in N^-(x)$ , so heißt  $y$  entsprechend *negativer Nachbar* von  $x$ . Für  $A \subseteq E$  kann man analog zur Definition 1.13 auch  $N^+(A) = N^+(A, D)$  und  $N^-(A) = N^-(A, D)$  erklären.

**Definition 1.15.** Ist  $G = (E, K)$  ein Graph,  $x \in E$  und  $A$  und  $B$  zwei Teilmengen aus  $E$ , so bezeichnen wir mit  $m(x, A) = m_G(x, A)$  die Anzahl der Kanten, die  $x$  mit einer Ecke aus  $A - \{x\}$  verbinden und mit  $m(A, B) = m_G(A, B)$  die Anzahl der Kanten, die mit einer Ecke aus  $A$  und einer Ecke aus  $B$  inzidieren. Ist  $A = \{a\}$  und  $B = \{b\}$ , so benutzen wir die Schreibweise  $m(a, b)$  (man vgl. dazu auch Definition 1.6).

Mit Hilfe der neu erlernten Begriffe beweisen wir nun eine einfache aber wichtige Ungleichung.

**Satz 1.13 (Nachbarschaftsungleichung).** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt für alle  $S \subseteq E(G)$  (auch für  $S = \emptyset$ )

$$\sum_{x \in S} d(x, G) \leq \sum_{y \in N(S, G)} d(y, G).$$

*Beweis.* Da  $G$  ein Multigraph ist gilt für alle  $S \subseteq E(G)$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} d(x, G) &= \sum_{x \in S} m(x, N(S, G)) = m(S, N(S, G)) \\ &= m(N(S, G), S) = \sum_{y \in N(S, G)} m(y, S) \\ &\leq \sum_{y \in N(S, G)} d(y, G), \end{aligned}$$

womit die Nachbarschaftsungleichung schon bewiesen ist. ||

Aus der Nachbarschaftsungleichung ergibt sich unmittelbar

**Folgerung 1.4.** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt für alle  $S \subseteq E(G)$  (auch für  $S = \emptyset$ ) die Ungleichung

$$\delta(G)|S| \leq \Delta(G)|N(S, G)|.$$

Im folgenden wollen wir einen Algorithmus vorstellen, der uns alle Zusammenhangskomponenten eines Graphen und zugleich alle kürzesten Wege von einer Startecke aus liefert.

## 1. Algorithmus

### Algorithmus zur Bestimmung der Komponenten

O.B.d.A. sei  $G = (E, K)$  ein schlichter Graph mit  $n = |E|$ .

- i) Man wähle ein  $x \in E$  und setze  $A_1 = B_1 = \{x\}$ .

- ii) Hat man  $A_{i-1}$  und  $B_{i-1}$  für  $i > 1$  berechnet, so bestimme man  $A_i = N(A_{i-1}) - B_{i-1}$  und setze  $B_i = A_i \cup B_{i-1}$ .
- iii) Man stoppe den Algorithmus beim ersten  $s \in \mathbf{N}$  mit der Eigenschaft  $N(A_s) - B_s = \emptyset$ .

Es soll folgendes gezeigt werden:

1. Der Algorithmus bricht nach höchstens  $n + 1$  Schritten ab.
2.  $G[B_s]$  ist diejenige Komponente von  $G$ , die die Ecke  $x$  enthält. Ist  $E = B_s$ , so ist  $G$  zusammenhängend.
3. Darüber hinaus liefert der Algorithmus kürzeste Wege von  $x$  zu allen Ecken derjenigen Komponente, die  $x$  enthält.

*Beweis.* 1. Es ist  $|B_1| = 1$ , und es gilt  $A_i = \emptyset$  oder  $|B_i| \geq i$  für  $i > 1$ . Ist  $A_i = \emptyset$  für ein  $i \leq n$ , so bricht der Algorithmus wegen iii) ab. Ist  $A_n \neq \emptyset$ , so gilt notwendig  $n \geq |B_n| \geq n$  und daher

$$A_{n+1} = N(A_n) - B_n = N(A_n) - E = \emptyset.$$

2. Nach Konstruktion ist  $G[B_s]$  ein zusammenhängender Graph. Ist  $a$  eine von  $x$  verschiedene Ecke, die in der gleichen Komponente wie  $x$  liegt, so müssen wir zeigen, daß  $a$  zu  $B_s$  gehört. Dazu wählen wir in  $G$  einen kürzesten Weg  $W$  von  $x = x_1$  nach  $a$  mit

$$W = (x_1, k_1, x_2, k_2, x_3, \dots, x_p, k_p, a).$$

Dann gilt aber nach Konstruktion notwendig  $x_i \in A_i$  für  $i = 1, 2, \dots, p$  und  $a \in A_{p+1}$ . Daher ist  $p + 1 \leq s$ , also  $a \in B_{p+1} = A_{p+1} \cup B_p \subseteq B_s$ .

3. Der Beweis von 2. hat uns folgendes gezeigt. Ist  $y \in A_i$ , so haben wir  $y$  auf einem kürzesten Weg der Länge  $i - 1$  erreicht. ||

**Bemerkung 1.9.** Man nennt einen graphentheoretischen Algorithmus effizient, wenn die Anzahl der Rechenschritte durch ein Polynom  $P(m, n)$  beschränkt bleibt. Wächst die Anzahl der Rechenschritte z.B. wie  $n!$  oder  $2^m$ , so liegt kein effizienter Algorithmus vor.

Da beim ersten Algorithmus jede Kante höchstens einmal abgefragt wird, ist die Anzahl der Rechenschritte durch  $c \cdot m$  beschränkt, wobei  $c$  eine Konstante ist, die nicht von  $n$  oder  $m$  abhängt. Benutzt man das bekannte Landausche Symbol "O", so sagt man auch, daß der Algorithmus die Komplexität  $O(m)$  besitzt.

### 1.3 Gradsequenzen und Gradmengen

**Definition 1.16.** Ist  $G$  ein Graph mit den Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so heißt die Folge der Eckengrade  $d(x_1, G), d(x_2, G), \dots, d(x_n, G)$  *Gradsequenz* von  $G$ . Eine Folge  $d_1, d_2, \dots, d_n$  nicht negativer ganzer Zahlen nennt man auch *Gradsequenz*, wenn ein Graph  $G$  existiert, der diese Folge als Gradsequenz besitzt.

Es ist nun eine interessante Frage, welche Folgen  $d_1, d_2, \dots, d_n$  nicht negativer ganzer Zahlen Gradsequenzen eines Graphen, Multigraphen oder schlichten Graphen sind. Ist eine solche Folge eine Gradsequenz eines Graphen  $G$ , so sagt man auch, daß die Folge durch  $G$  *realisiert* wird. Damit eine gegebene Folge realisierbar ist, muß natürlich nach dem Hand-schlaglemma die Summe der Folgenglieder eine gerade Zahl ergeben. Im Fall, daß die Summe der Folgenglieder gerade ist, kann man leicht zeigen, daß diese Folge durch einen Graphen realisierbar ist (man vgl. Aufgabe 1.20).

Eine schöne einfache und praktisch verwendbare notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene Folge durch einen schlichten Graphen realisiert wird, stammt von Havel [1] und Hakimi [1].

**Satz 1.14 (Havel [1] 1955, Hakimi [1] 1962).** Eine Folge nicht negativer ganzer Zahlen  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  wird genau dann durch einen schlichten Graphen realisiert, wenn die Folge  $d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_{d_n} - 1, d_{d_n+1}, \dots, d_{n-1}$  durch einen schlichten Graphen realisiert wird.

*Beweis.* Realisiert der schlichte Graph  $G'$  die zweite Folge, so füge man zu  $G'$  eine neue Ecke hinzu und verbinde diese mit den ersten  $d_n$  Ecken von  $G'$  durch Kanten. Dieser neue schlichte Graph besitzt dann die Gradsequenz  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

Nun sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit  $d(x_i, G) = d_i$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $x_i \in E(G)$ . Ist  $x_n$  adjazent zu den ersten  $d_n$  Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_{d_n}$ , so ist  $G - x_n$  ein schlichter Graph, der die zweite Folge realisiert. Ist das nicht der Fall, so erzeugen wir durch folgende Prozedur einen solchen Graphen.

Angenommen, es existieren Ecken  $x_i, x_j$  mit  $1 \leq i < j \leq n - 1$ , so daß  $x_n$  zu  $x_j$  adjazent ist, aber nicht zu  $x_i$ . Da  $d_j \leq d_i$  gilt, existiert eine Ecke  $x_t \neq x_i, x_j, x_n$ , die zu  $x_i$ , aber nicht zu  $x_j$  adjazent ist. Ersetzt man in  $G$  die Kanten  $x_i x_i$  und  $x_n x_j$  durch die Kanten  $x_n x_i$  und  $x_t x_j$ , so erhalten wir einen neuen schlichten Graphen mit der gleichen Gradsequenz, aber nun ist  $x_i$  ein Nachbar von  $x_n$  und  $x_j$  nicht. Durch wiederholtes Anwenden dieses Prozesses erhalten wir das gewünschte Ergebnis. ||

Nun wollen wir ein Analogon zu Satz 1.14 für Multigraphen beweisen, aus dem wir eine klassische notwendige und hinreichende Bedingung für die Realisierbarkeit von Multigraphen herleiten werden.

**Satz 1.15 (Meierling, Volkmann [2] 2009).** Es sei  $n \geq 4$  eine ganze Zahl. Eine Folge ganzer Zahlen  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$  wird genau dann durch einen Multigraphen realisiert, wenn die Folge  $d_1 - d_n, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}$  durch einen Multigraphen realisiert wird.

*Beweis.* Realisiert der Multigraph  $G'$  die zweite Folge, so füge man zu  $G'$  eine neue Ecke hinzu und verbinde diese mit derjenigen Ecke von  $G'$ , die den Grad  $d_1 - d_n$  hat durch  $d_n$  parallele Kanten. Dieser neue Multigraph besitzt dann die Gradsequenz  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

Nun sei  $G$  ein Multigraph der Ordnung  $n$  mit  $d(x_i, G) = d_i$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $x_i \in E(G)$ , so daß die Anzahl  $q$  der Kanten zwischen  $x_1$  und  $x_n$  maximal ist. Ist  $q = d_n$ , so ist  $G - x_n$  ein Multigraph, der die zweite Folge realisiert. Ist  $0 \leq q < d_n$ , so unterscheiden wir zwei Fälle.

*Fall 1:* Es existieren zwei Ecken verschiedene  $u$  und  $v$ , so daß  $u \in N(x_1)$  und  $v \in N(x_n)$ . Dann ist  $G' = (G - \{ux_1, vx_n\}) + \{x_1 x_n, uv\}$  auch ein Multigraph mit der Gradsequenz  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , aber die Anzahl der Kanten zwischen  $x_1$  und  $x_n$  beträgt  $q + 1$ . Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von  $G$ .

*Fall 2:* Ist  $N(x_1) - \{x_n\} = N(x_n) - \{x_1\} = \{w\}$  so unterscheiden wir zwei weitere Fälle.

*Fall 2.1:* In  $G - \{w, x_1, x_n\}$  gibt es zwei adjazente Ecken  $y$  und  $z$ . Dann ist  $G'' = (G - \{wx_1, wx_n, yz\}) + \{x_1 x_n, wy, wz\}$  auch ein Multigraph mit der Gradsequenz  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , aber im Widerspruch zur Wahl von  $G$ , gibt es  $q + 1$  Kanten zwischen  $x_1$  und  $x_n$  in  $G''$ .

*Fall 2.2:* Der Graph  $G - \{w, x_1, x_n\}$  enthält keine Kanten. Ist  $w = x_j$  für ein  $2 \leq j \leq n - 1$ , so ergibt sich daraus  $N(x_i) = \{x_j\}$  für alle  $i \neq 1, j, n$ . Ist  $r_1$  bzw.  $r_n$  die Anzahl der Kanten zwischen  $x_1$  und  $x_j$  bzw.  $x_n$  und  $x_j$ , so erhalten wir den Widerspruch

$$d_j \geq r_1 + r_n + (n - 3)d_n \geq r_1 + r_n + d_n = r_1 + 2r_n + q > r_1 + q = r_1. \quad ||$$

**Satz 1.16 (Hakimi [1] 1962).** Es sei  $n \geq 2$  eine ganze Zahl. Eine Folge ganzer Zahlen  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$  wird genau dann durch einen Multigraphen realisiert, wenn  $\sum_{i=1}^n d_i$  gerade ist und  $d_1 \leq d_2 + d_3 + \dots + d_n$  gilt.

*Beweis.* Da die Gradsequenz eines Multigraphen beide angegebenen Bedingungen erfüllt, betrachten wir die umgekehrte Richtung, die wir mittels vollständiger Induktion nach  $n \geq 2$  beweisen.

Für  $n = 2$  ergibt sich  $d_1 = d_2$ , womit die Folge  $d_1, d_2$  durch einen Multigraphen realisierbar ist. Für  $n = 3$  realisiert der Multigraph mit den Ecken  $x_1, x_2, x_3$  und  $(d_1 + d_2 - d_3)/2$  Kanten zwischen  $x_1$  und  $x_2$ ,  $(d_2 + d_3 - d_1)/2$  Kanten zwischen  $x_2$  und  $x_3$  und  $(d_1 + d_3 - d_2)/2$  Kanten zwischen  $x_1$  und  $x_3$  die Folge  $d_1, d_2, d_3$ . Ist  $n \geq 4$ , so ist  $d_1, d_2, \dots, d_n$  nach Satz 1.15 genau dann durch einen Multigraphen realisierbar, wenn  $d_1 - d_n, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}$  durch einen Multigraphen realisierbar ist. Nun sei  $d'_1 \geq d'_2 \geq \dots \geq d'_{n-1}$  eine Anordnung der Folge  $d_1 - d_n, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}$ . Da  $\sum_{i=1}^{n-1} d'_i$  gerade ist, genügt es  $d'_1 \leq d'_2 + d'_3 + \dots + d'_{n-1}$  nachzuweisen. Ist  $d'_1 = d_1 - d_n$ , dann ist diese Ungleichung nach Voraussetzung richtig. Ist  $d'_1 = d_2$ , so ergibt sich aus  $d_2 \leq d_1, d_n \leq d_{n-1}$  und  $n \geq 4$  die gewünschte Abschätzung  $d_2 \leq (d_1 - d_n) + d_3 + \dots + d_{n-1}$ .  $\parallel$

Die Folge 3, 3, 2 zeigt, daß Satz 1.15 für  $n = 3$  im allgemeinen nicht richtig ist. Einen anderen kurzen Beweis von Satz 1.16 findet man bei Takahashi, Imai und Asano [1].

**Definition 1.17.** Die *Gradmenge* eines Graphen  $G$  ist die Menge  $S$ , die aus allen verschiedenen Eckengraden von  $G$  besteht.

Hat z.B. ein Graph  $G$  die Gradsequenz 5, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 1, so hat er die Gradmenge  $S = \{5, 4, 2, 1\}$ . Im Jahre 1977 haben Kapoor, Polimeni und Wall [1] gezeigt, daß zu jeder Menge  $S = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}$  von ganzen Zahlen mit  $d_1 > d_2 > \dots > d_p \geq 1$  ein schlichter Graph  $G$  der Ordnung  $d_1 + 1$  mit der Gradmenge  $S$  existiert. Da ein solcher schlichter Graph mindestens die Ordnung  $1 + d_1$  besitzen muß, ist dieses Ergebnis optimal. Wir wollen hier einen kurzen und eleganten Beweis von Tripathi und Vijay [1] vorstellen. Dazu benötigen wir noch die nächste Definition.

**Definition 1.18.** Das *Komplement* oder der *Komplementärgraph*  $\overline{G}$  eines schlichten Graphen  $G$  ist der Graph mit der Eckenmenge  $E(G)$ , in dem zwei Ecken genau dann adjazent sind, wenn sie in  $G$  nicht adjazent sind. Ein schlichter Graph  $G$  heißt *selbstkomplementär*, wenn  $G \cong \overline{G}$  gilt.

**Satz 1.17 (Kapoor, Polimeni, Wall [1] 1977).** Es sei  $S = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}$  eine Menge von natürlichen Zahlen mit  $d_1 > d_2 > \dots > d_p \geq 1$ . Dann existiert ein schlichter Graph  $G$  der Ordnung  $1 + d_1$  mit der Gradmenge  $S$ .

*Beweis* (Tripathi, Vijay [1] 2007). Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $p$ . Ist  $p = 1$ , so besitzt der vollständige Graph  $K_{1+d_1}$  die Gradmenge  $S = \{d_1\}$ . Ist  $p \geq 2$ , so betrachte man die Menge  $T = \{d_1 - d_p, d_1 - d_{p-1}, \dots, d_1 - d_2\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen schlichten Graphen  $G_T$  der Ordnung  $1 + d_1 - d_p$  mit der Gradmenge  $T$ . Fügt man zu  $G_T$  noch  $d_p$  isolierte Ecken hinzu und betrachtet davon den Komplementärgraphen, so gelangt man zu einem schlichten Graphen der Ordnung  $1 + d_1$  mit der Gradmenge  $S$ .  $\parallel$

Der Beweis von Satz 1.17 liefert unmittelbar einen effizienten Algorithmus, um einen schlichten Graphen minimaler Ordnung zu einer gegebenen Gradmenge zu bestimmen. Ein Satz 1.17 entsprechendes Resultat für Multigraphen geht auf Volkmann [32] zurück.

## 1.4 Abstandsmaße

**Definition 1.19.** Ist  $G$  ein Graph,  $a, b \in E(G)$  und  $W_{ab}$  ein Weg kürzester Länge von  $a$  nach  $b$  in  $G$ , so definieren wir den *Abstand*  $d(a, b) = d_G(a, b)$  zwischen  $a$  und  $b$  durch die Länge  $L(W_{ab})$  dieses Weges. Im Fall  $a = b$  gilt  $d(a, b) = d(a, a) = 0$ . Existiert kein Weg von  $a$  nach  $b$ , liegen also  $a$  und  $b$  in verschiedenen Komponenten, so setzen wir  $d(a, b) = \infty$ . Die *Exzentrizität* einer Ecke  $a$  ist  $e(a) = \max_{x \in E(G)} d(a, x)$ . Weiter bezeichnen wir mit

$$\text{dm}(G) = \max_{x \in E(G)} e(x) \text{ bzw. } r(G) = \min_{x \in E(G)} e(x)$$

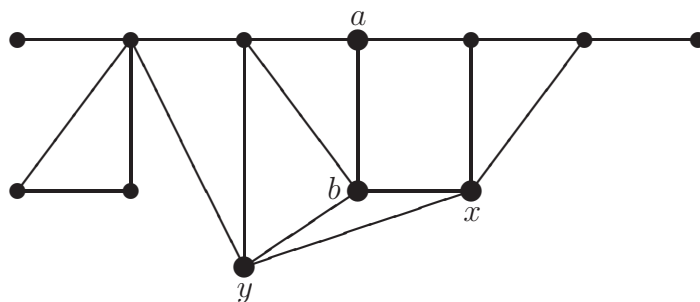
den *Durchmesser* bzw. den *Radius* von  $G$ . Es gilt natürlich

$$\text{dm}(G) = \max_{x, y \in E(G)} d(x, y).$$

Das *Zentrum*  $Z(G)$  besteht aus allen Ecken  $x$  mit  $e(x) = r(G)$ . Ist der Graph  $G$  nicht zusammenhängend, so werden die Exzentrizität jeder Ecke, der Radius und der Durchmesser von  $G$  unendlich.

**Bemerkung 1.10.** Der erste Algorithmus liefert uns eine effiziente Methode, um alle in Definition 1.19 eingeführten Größen, also die Exzentrizität jeder Ecke, den Durchmesser und den Radius, zu berechnen.

**Beispiel 1.6.** Um einen Eindruck von den neuen Größen zu erhalten, betrachten wir den skizzierten Graphen  $G$ .



Mit Hilfe des ersten Algorithmus oder durch “scharfes Hinsehen” erhält man  $\text{dm}(G) = 5$ ,  $r(G) = 3$  und  $Z(G) = \{a, b, x, y\}$ .

**Satz 1.18.** Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph, so gilt

$$r(G) \leq \text{dm}(G) \leq 2r(G).$$

*Beweis.* Die erste Ungleichung ergibt sich sofort aus Definition 1.19. Sind  $a, b \in E(G)$  mit  $d(a, b) = \text{dm}(G)$  und ist  $x \in Z(G)$ , so folgt

$$\text{dm}(G) = d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq 2e(x) = 2r(G). \quad \parallel$$

**Beispiel 1.7.** Ist  $n \geq 2$ , so gilt offensichtlich  $r(K_n) = \text{dm}(K_n) = 1$  für den vollständigen Graphen  $K_n$ . Für einen Weg  $W$  der Länge  $L(W) = 2p$  erkennt man leicht  $\text{dm}(W) = 2p$  und  $r(W) = p$ , und für einen Kreis  $C_n$  der Länge  $n$  läßt sich  $\text{dm}(C_n) = r(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  schnell berechnen. Daher existieren sowohl Graphen mit  $\text{dm}(G) = r(G)$  als auch Graphen mit  $\text{dm}(G) = 2r(G)$ , womit man Satz 1.18 im allgemeinen nicht verbessern kann.



Folgendes interessante Resultat findet man in dem Buch von Bondy und Murty [1] auf Seite 14 als Übungsaufgabe.

**Satz 1.19.** Ist  $G$  ein schlichter Graph vom Durchmesser  $\text{dm}(G) \geq 4$ , so gilt  $\text{dm}(\overline{G}) \leq 2$ .

*Beweis.* Da  $\text{dm}(G) \geq 4$  gilt, existieren zwei Ecken  $u$  und  $v$  in  $G$  mit  $d_G(u, v) \geq 4$ , woraus  $d_{\overline{G}}(u, v) = 1$  folgt. Sind nun  $x$  und  $y$  zwei Ecken aus  $G$  mit  $d_{\overline{G}}(x, y) \geq 2$ , so werden wir im folgenden zeigen, daß  $d_{\overline{G}}(x, y) = 2$  gilt.

Sind  $x$  und  $y$  von  $u$  und  $v$  verschieden, so sind  $u$  und  $v$  in  $G$  nicht gleichzeitig adjazent zu  $x$ , womit  $d_{\overline{G}}(u, x) = 1$  oder  $d_{\overline{G}}(v, x) = 1$  gilt. Es gelte o.B.d.A.  $d_{\overline{G}}(u, x) = 1$ . Ist  $d_{\overline{G}}(u, y) = 1$ , so ergibt sich unmittelbar  $d_{\overline{G}}(x, y) = 2$ . Ist  $d_G(u, y) = 1$ , so folgt aus  $d_G(u, v) \geq 4$  aber  $d_{\overline{G}}(v, x) = d_{\overline{G}}(v, y) = 1$  und damit wieder  $d_{\overline{G}}(x, y) = 2$ .

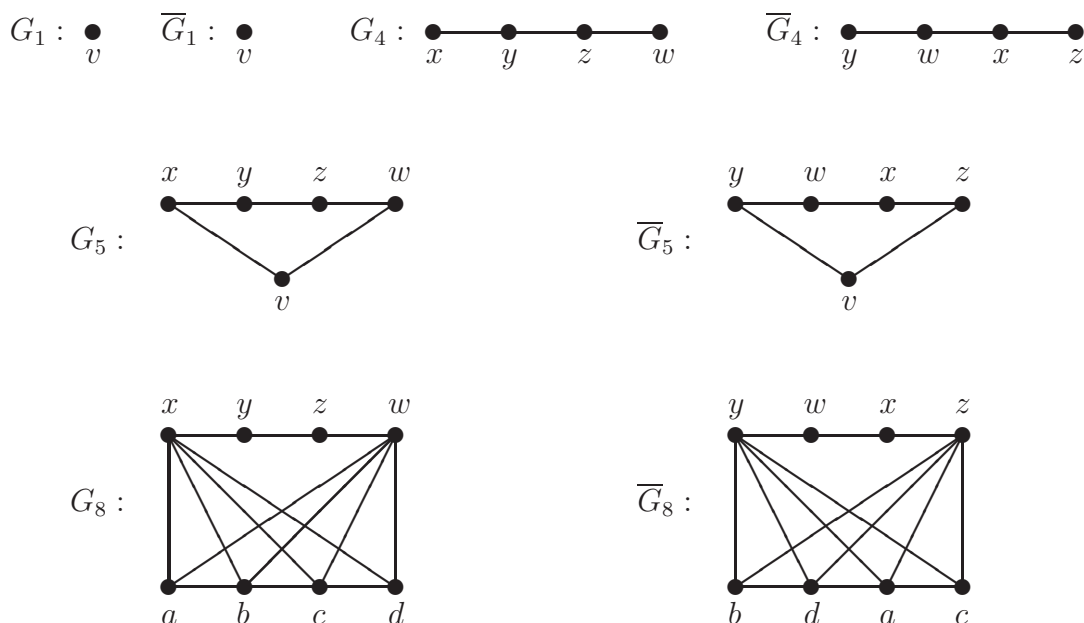
Ist o.B.d.A.  $x = u$  und  $y \neq v$ , so gilt notwendig  $d_{\overline{G}}(v, y) = 1$ , also auch  $d_{\overline{G}}(x, y) = 2$ . Da wir nun alle Möglichkeiten diskutiert haben, ist der Satz vollständig bewiesen. ||

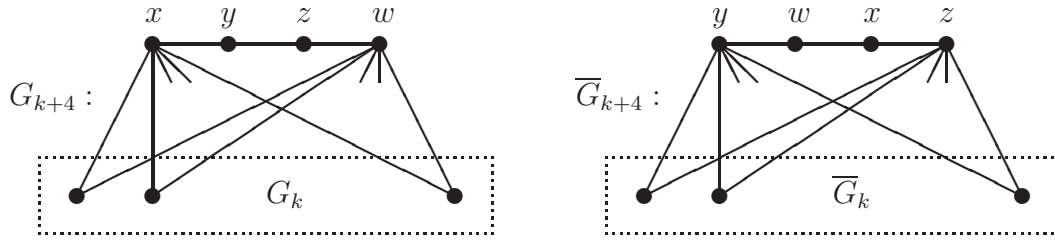
**Folgerung 1.5 (Ringel [2] 1963).** Der Durchmesser eines selbstkomplementären, nicht trivialen Graphen ist 2 oder 3.

**Folgerung 1.6 (Harary, Robinson [1] 1985).** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\text{dm}(G) \geq 3$ , so gilt  $\text{dm}(\overline{G}) \leq 3$ .

**Bemerkung 1.11.** Der Weg der Länge 3 oder der Kreis der Länge 5 sind Beispiele für selbstkomplementäre Graphen.

Die Anzahl der Kanten eines selbstkomplementären Graphen der Ordnung  $n$  ist  $\frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2}$ , womit notwendig  $n = 4p$  oder  $n = 4p + 1$  gelten muß. Darüber hinaus zeigten Sachs [1] 1962 und Ringel [2] 1963, daß für jede natürliche Zahl  $p$  ein selbstkomplementärer Graph der Ordnung  $4p$  und  $4p + 1$  existiert. Unter dem Motto "proof without words" gab Stephan C. Carlson [1] im Jahre 2000 für jedes  $n = 4p$  oder  $n = 4p + 1$  einen selbstkomplementären Graphen  $G_n$  der Ordnung  $n$  durch die skizzierte Konstruktion an.





Weitere interessante Resultate über selbstkomplementäre Graphen findet man z.B. in den Arbeiten von Benhocine und Wojda [1] 1985, Clapham und Kleitman [1] 1976, Rao [1] 1979 oder H. Zhang [1] 1992.

**Definition 1.20.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph der Ordnung  $n \geq 2$ . Die *mittlere Entfernung*  $me(G)$  in  $G$  wird definiert als das arithmetische Mittel der Abstände zwischen allen Eckenpaaren, d.h.

$$me(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{a,b \in E(G)} d(a,b).$$

Weiter setzen wir

$$\xi(G) = \sum_{a,b \in E(G)} d(a,b) \text{ und } \xi(v) = \xi(v, G) = \sum_{a \in E(G)} d(v,a).$$

Man beachte, daß bei den Definitionen der Größen  $me(G)$  und  $\xi(G)$  alle Abstände doppelt gezählt werden.

Aus Definition 1.20 ergeben sich  $\xi(G) = \sum_{v \in E(G)} \xi(v)$  und  $1 \leq me(G) \leq dm(G)$ .

**Satz 1.20 (Entringer, Jackson, Snyder [1] 1976).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph mit  $n \geq 2$  Ecken und  $m$  Kanten, so gilt

$$me(G) \geq 2 - \frac{2m}{n(n-1)},$$

wobei genau dann die Gleichheit eintritt, wenn  $G$  den Durchmesser 1 oder 2 besitzt.

*Beweis.* Schätzt man den Abstand jedes nicht adjazenten Eckenpaares durch 2 ab, so ergibt sich

$$\xi(G) = \sum_{ab \in K(G)} d(a,b) + \sum_{ab \notin K(G)} d(a,b) \geq 2m + 2(n(n-1) - 2m),$$

woraus die gewünschte Ungleichung folgt. Da in der letzten Abschätzung genau dann das Gleichheitszeichen steht, wenn  $dm(G) \leq 2$  gilt, ist der Satz vollständig bewiesen.  $\parallel$

**Satz 1.21 (Entringer, Jackson, Snyder [1] 1976).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung  $n \geq 2$ , so gilt

$$me(G) \leq \frac{1}{3}(n+1),$$

wobei genau dann die Gleichheit eintritt, wenn  $G$  ein Weg ist.



*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $n$ . Da die Aussage für  $n = 2$  offensichtlich ist, sei nun  $n \geq 3$ .

Nach Satz 1.10 existiert in  $G$  eine Ecke  $v$ , so daß  $G - v$  zusammenhängend bleibt. Bezeichnen wir mit  $N_i$  die Menge der Ecken in  $G$  die von  $v$  den Abstand  $i$  haben, so gilt

$$\xi(v, G) = \sum_i i |N_i|.$$

Daher wird  $\xi(v, G)$  maximal, wenn  $|N_1| = |N_2| = \dots = |N_{n-1}| = 1$  gilt, woraus sich

$$\xi(v, G) \leq 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

ergibt. Da nach Induktionsvoraussetzung  $\xi(G-v) \leq \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$  gilt, folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \xi(G) &= \sum_{a,b \in E(G)-\{v\}} d_G(a,b) + 2 \sum_{a \in E(G)-\{v\}} d_G(v,a) \\ &\leq \xi(G-v) + 2\xi(v, G) \\ &\leq \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) + n(n-1) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1), \end{aligned}$$

woraus sich  $\text{me}(G) \leq \frac{1}{3}(n+1)$  ergibt.

Ist  $G$  ein Weg und  $v$  eine Endecke von  $G$ , so steht in diesem Induktionsbeweis überall das Gleichheitszeichen.

Gilt umgekehrt  $\text{me}(G) = \frac{1}{3}(n+1)$ , so muß in obiger Abschätzung von  $\xi(v, G)$  die Gleichheit stehen. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn  $G$  ein Weg und  $v$  eine Endecke des Weges ist.  $\parallel$

Satz 1.21 wurde 1977 unabhängig auch von Doyle und Graver [1] und 1979 von Lovász [5] (S. 276) entdeckt. Einen schönen Überblick sowie weitere Ergebnisse über die mittlere Entfernung in Graphen findet man in der Dissertation meines Schülers Prof. Dr. Peter Dankelmann [1] aus dem Jahre 1993.

## 1.5 Bewertete Graphen

Durch sogenannte bewertete Graphen werden wir den Abstands begriff erweitern.

**Definition 1.21.** Ist  $G = (E, K)$  ein Graph und  $\rho: K \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung der Kantenmenge in die reellen Zahlen, so heißt  $G = (E, K, \rho)$  *bewerteter Graph* und  $\rho(k)$  die *Bewertung* oder *Länge* einer Kante  $k$ . Ist  $H \subseteq G$  ein Teilgraph, so nennt man

$$\rho(H)$$

die *Bewertung* oder *Länge* von  $H$ . Die minimale Länge aller Wege von  $a$  nach  $b$  heißt  $\rho$ -*Abstand* zwischen den Ecken  $a$  und  $b$ . Wenn klar ist, mit welcher Bewertung gearbeitet wird, so benutzen wir wieder das Wort *Abstand* an Stelle von  $\rho$ -Abstand. Der  $\rho$ -Abstand zweier Ecken  $a$  und  $b$  wird mit  $d_\rho(a, b)$  bezeichnet. Existiert kein Weg zwischen  $a$  und  $b$ , so setzen wir  $d_\rho(a, b) = \infty$ . Ferner ist  $d_\rho(a, a) = 0$  für alle  $a \in E$ .

Ist  $\rho(k) = 1$  für alle  $k \in K$ , so stimmt der neue Abstands begriff mit dem aus Definition 1.19 überein.

Ist  $a$  eine Ecke und  $A \subseteq E$ , so setzen wir

$$d_\rho(a, A) = \min_{x \in A} d_\rho(a, x).$$

Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $k = ab$  eine Kante aus  $G$ , so schreiben wir  $\rho(k) = \rho(ab)$ . Sind aber  $a, b \in E$  nicht adjazent, so setzen wir aus technischen Gründen  $\rho(ab) = \infty$ .

Ist  $A \subseteq E$ , so bezeichnen wir mit  $\bar{A} = E - A$  das Komplement von  $A$ .

In den Anwendungen spielen die bewerteten Graphen eine wichtige Rolle. Die Längen von Kanten können dabei Entfernungen, Zeiten, Kosten, Gewinne und anderes bedeuten. Viele Optimierungsprobleme laufen darauf hinaus, unter gewissen Teilgraphen  $H$  eines bewerteten Graphen einen solchen zu bestimmen, für den  $\sum_{k \in K(H)} \rho(k)$  minimal oder maximal wird.

Faßt man z.B. das weltweite Flugnetz als bewerteten Graphen auf, so sind natürlich die schnellsten oder billigsten Verbindungen zwischen zwei Orten von größtem Interesse. Dieses Problem soll nun graphentheoretisch formuliert werden.

**Problem (Problem eines kürzesten Weges).** Es sei  $G = (E, K, \rho)$  ein schlichter, bewerteter Graph mit  $\rho(k) > 0$  für alle  $k \in K$ . Sind  $a$  und  $b$  zwei verschiedene Ecken aus  $G$ , so wird nach einem kürzesten Weg von  $a$  nach  $b$  gesucht, d.h. wir suchen den  $\rho$ -Abstand  $d_\rho(a, b)$  und einen Weg  $W$  von  $a$  nach  $b$  mit  $\rho(W) = d_\rho(a, b)$ , falls ein solcher Weg existiert.

Zur Lösung dieses Problems wollen wir einen effizienten Algorithmus vorstellen, der unabhängig 1959 von Dijkstra [1] und 1960 von Dantzig [1] gefunden wurde. Dieser Algorithmus läßt sich leicht aus unserem nächsten Satz herleiten.

Im folgenden setzen wir zur Abkürzung

$$d_\rho(a, b) = d(a, b) \text{ und } d_\rho(a, A) = d(a, A).$$

**Satz 1.22.** Es sei  $G = (E, K, \rho)$  ein schlichter, bewerteter Graph mit  $\rho(k) > 0$  für alle  $k \in K$ . Ist  $A \subseteq E$  mit  $A \neq E$  und  $a \in A$ , so gilt

$$d(a, \bar{A}) = \min_{\substack{x \in A \\ y \in \bar{A}}} \{d(a, x) + \rho(xy)\}. \quad (1.1)$$

Erfüllen die beiden Ecken  $u \in A$  und  $v \in \bar{A}$  die Gleichung (1.1), also ist  $d(a, \bar{A}) = d(a, u) + \rho(uv)$ , so gilt

$$d(a, v) = d(a, u) + \rho(uv) = d(a, \bar{A}). \quad (1.2)$$

*Beweis.* Ist  $W_{ac} = (a, \dots, b, k, c)$  ein kürzester Weg von  $a$  nach  $\bar{A}$ , so gilt natürlich  $c \in \bar{A}$ ,  $b \in A$ , und  $W_{ab} = W_{ac} - c$  ist ein kürzester Weg von  $a$  nach  $b$  mit  $E(W_{ab}) \subseteq A$ . Daraus ergibt sich

$$d(a, \bar{A}) = d(a, c) = d(a, b) + \rho(bc),$$

woraus sofort (1.1) folgt.

Nach Definition von  $d(a, \bar{A})$  gilt  $d(a, v) \geq d(a, \bar{A})$ . Weiter ist  $d(a, v) \leq d(a, u) + \rho(uv) = d(a, \bar{A})$ , womit auch (1.2) bewiesen ist. ||

Mit Hilfe dieses Satzes können wir alle kürzesten Wege, falls sie existieren, von einer Ecke  $a = y_0$  zu allen anderen Ecken des Graphen folgendermaßen berechnen:

Im ersten Schritt bestimmt man eine Ecke  $y_1$ , die der Ecke  $y_0$  am nächsten ist. Dazu setze man  $A_0 = \{y_0\}$  und bestimme nach (1.1) ein  $y_i \in A_0$  und ein  $y_1 \in \overline{A_0}$  mit

$$d(y_0, y_i) + \rho(y_i y_1) = \min_{\substack{x \in A_0 \\ y \in \overline{A_0}}} \{d(y_0, x) + \rho(xy)\}.$$

Dann gilt wegen (1.2)

$$d(y_0, y_1) = d(y_0, y_i) + \rho(y_i y_1) = \rho(y_0 y_1).$$

Ist  $k_1 = y_0 y_1$ , so ist  $W_1 = (y_0, k_1, y_1)$  ein kürzester Weg von  $y_0$  nach  $y_1$ .

Setzt man  $A_1 = A_0 \cup \{y_1\}$ , so bestimme man im zweiten Schritt nach (1.1) ein  $y_i \in A_1$  und ein  $y_2 \in \overline{A_1}$  mit

$$d(y_0, y_i) + \rho(y_i y_2) = \min_{\substack{x \in A_1 \\ y \in \overline{A_1}}} \{d(y_0, x) + \rho(xy)\}.$$

Dann gilt wegen (1.2)

$$d(y_0, y_2) = d(y_0, y_i) + \rho(y_i y_2).$$

Ist  $k_2 = y_i y_2$ , so ist  $W_2 = W_1 \cup G[k_2]$  ein kürzester Weg von  $y_0$  nach  $y_2$ , wobei  $W_0 = G[\{y_0\}]$  gesetzt wird. Man setze  $A_2 = A_1 \cup \{y_2\}$ .

Ist allgemein  $A_{q-1} = \{y_0, y_1, \dots, y_{q-1}\}$ , und sind  $W_0, W_1, \dots, W_{q-1}$  die gewählten kürzesten Wege von  $y_0$  nach  $y_i$  für  $i = 0, 1, \dots, q-1$ , so bestimme man im  $q$ -ten Schritt nach (1.1) ein  $y_i \in A_{q-1}$  und ein  $y_q \in \overline{A_{q-1}}$  mit

$$d(y_0, y_i) + \rho(y_i y_q) = \min_{\substack{x \in A_{q-1} \\ y \in \overline{A_{q-1}}} } \{d(y_0, x) + \rho(xy)\}. \quad (1.3)$$

Dann gilt wegen (1.2)

$$d(y_0, y_q) = d(y_0, y_i) + \rho(y_i y_q). \quad (1.4)$$

Ist  $k_q = y_i y_q$ , so ist  $W_q = W_{q-1} \cup G[k_q]$  ein kürzester Weg von  $y_0$  nach  $y_q$ . Es wird  $A_q = A_{q-1} \cup \{y_q\}$  gesetzt.

Man stoppe den Algorithmus, wenn i)  $A_q = E$  gilt, oder ii)  $\rho(xy) = \infty$  für alle  $x \in A_q$  und  $y \in \overline{A_q}$  ist. Im Fall ii) ist der Graph nicht zusammenhängend.

Bei der gerade beschriebenen Methode wurden ständig Rechnungen wiederholt. Der eigentliche Algorithmus von Dantzig und Dijkstra, den wir jetzt notieren wollen, vermeidet alle unnötigen Wiederholungen.

## 2. Algorithmus

### Algorithmus von Dantzig und Dijkstra

Es sei  $G = (E, K, \rho)$  ein schlichter, bewerteter Graph und  $y_0 \in E$ .

- 0) Man setze  $t_0(y_0) = 0$ ,  $t_0(y) = \infty$  für  $y \neq y_0$  und  $A_0 = \{y_0\}$ .
- 1) Für  $y \in \overline{A_0}$  setze man

$$t_1(y) = \min\{t_0(y), t_0(y_0) + \rho(y_0 y)\}$$

und wähle ein  $y_1 \in \overline{A_0}$  mit  $t_1(y_1) = \min_{y \in \overline{A_0}} \{t_1(y)\}$ .

Man setze  $A_1 = A_0 \cup \{y_1\}$ , und es gilt  $t_1(y_1) = d(y_0, y_1)$ .

2) Für  $y \in \bar{A}_1$  setze man

$$t_2(y) = \min\{t_1(y), t_1(y_1) + \rho(y_1y)\}$$

und wähle ein  $y_2 \in \bar{A}_1$  mit  $t_2(y_2) = \min_{y \in \bar{A}_1} \{t_2(y)\}$ .

Man setze  $A_2 = A_1 \cup \{y_2\}$ , und es gilt  $t_2(y_2) = d(y_0, y_2)$ .

...

q) Für  $y \in \bar{A}_{q-1}$  setze man

$$t_q(y) = \min\{t_{q-1}(y), t_{q-1}(y_{q-1}) + \rho(y_{q-1}y)\}$$

und wähle ein  $y_q \in \bar{A}_{q-1}$  mit  $t_q(y_q) = \min_{y \in \bar{A}_{q-1}} \{t_q(y)\}$ .

Man setze  $A_q = A_{q-1} \cup \{y_q\}$ , und es gilt  $t_q(y_q) = d(y_0, y_q)$ .

Man stoppe den Algorithmus beim ersten  $s \in \mathbf{N}$  mit  $t_s(y) = \infty$  für alle  $y \in \bar{A}_{s-1}$  oder  $A_s = E$ .

Wir zeigen nun, daß tatsächlich  $t_q(y_q) = d(y_0, y_q)$  gilt. Setzt man für  $y \in \bar{A}_{q-1}$

$$t_q(y) = \min_{x \in A_{q-1}} \{d(y_0, x) + \rho(xy)\},$$

so folgt aus (1.3) und (1.4) sofort

$$t_q(y_q) = \min_{y \in \bar{A}_{q-1}} \{t_q(y)\} = \min_{\substack{x \in A_{q-1} \\ y \in \bar{A}_{q-1}}} \{d(y_0, x) + \rho(xy)\} = d(y_0, y_q).$$

**Bemerkung 1.12.** Man überlegt sich leicht, daß die Komplexität des Algorithmus von Dantzig und Dijkstra  $O(n^2)$  beträgt, womit ein effizienter Algorithmus vorliegt.

**Definition 1.22.** Ein Graph ohne Kreise heißt *Wald*, ein zusammenhängender Graph ohne Kreise heißt *Baum*. (Bäume und Wälder werden im nächsten Kapitel ausführlich diskutiert.) Vereinigt man beim Algorithmus von Dantzig und Dijkstra alle Wege  $W_1, W_2, \dots$ , so entsteht ein Baum, denn bei jedem Schritt wird ein schon vorhandener Baum mit einer neuen Ecke durch genau eine Kante verbunden, so daß niemals ein Kreis entsteht. Dieser Baum heißt *Entfernungsbaum von  $G$  bezüglich  $y_0$* . Die im Entfernungsbaum bezüglich  $y_0$  eindeutig bestimmten Wege (man vgl. Abschnitt 2.1) von  $y_0$  nach  $y_q$  sind kürzeste Wege von  $y_0$  nach  $y_q$  im vorgegebenen Graphen  $G$ . Man beachte, daß ein Entfernungsbaum bezüglich einer Ecke keineswegs eindeutig zu sein braucht.

Bewertete Graphen stellen wir durch sogenannte Bewertungsmatrizen dar.

**Definition 1.23.** Es sei  $G = (E, K, \rho)$  ein schlichter und bewerteter Graph mit der Eckenmenge  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Die quadratische  $n \times n$  Matrix

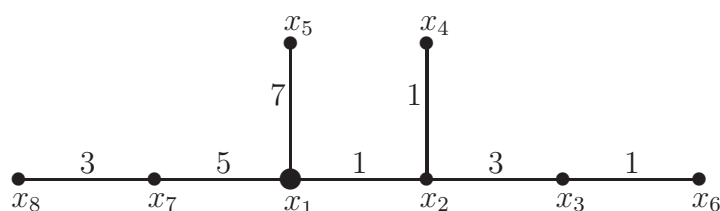
$$B_G = B = (\rho(x_i x_j))$$

heißt *Bewertungsmatrix* von  $G$ .

**Beispiel 1.8.** Ein schlichter und bewerteter Graph mit acht Ecken sei durch folgende Bewertungsmatrix gegeben:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x_1$	$\infty$	1	$\infty$	2	7	8	5	9
$x_2$	1	$\infty$	3	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	8
$x_3$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	3	7
$x_4$	2	1	$\infty$	$\infty$	6	5	9	6
$x_5$	7	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	4	9	5
$x_6$	8	$\infty$	1	5	4	$\infty$	$\infty$	4
$x_7$	5	$\infty$	3	9	9	$\infty$	$\infty$	3
$x_8$	9	8	7	6	5	4	3	$\infty$

Mit Hilfe des zweiten Algorithmus kann man sich z.B. einen Entfernungsbaum bezüglich  $y_0 = x_1$  erzeugen. Einen solchen haben wir hier skizziert. (Zum Einüben dieser Methode sollte der Leser auch die Entfernungs bäume bezüglich der anderen Ecken berechnen.)



An diesem Entfernungsbaum erkennt man unmittelbar  $d(x_1, x_2) = 1$ ,  $d(x_1, x_4) = 2$ ,  $d(x_1, x_3) = 4$ ,  $d(x_1, x_6) = 5$ ,  $d(x_1, x_7) = 5$ ,  $d(x_1, x_5) = 7$  und  $d(x_1, x_8) = 8$ .

**Bemerkung 1.13.** Lässt man bei einem bewerteten Graphen auch Kanten mit negativen Längen zu, so führt der zweite Algorithmus im allgemeinen nicht zum Ziel. In diesem Fall muß der Algorithmus von Dantzig und Dijkstra modifiziert werden (man vgl. dazu z.B. das Lehrbuch von Sachs [2], S. 126 – 128).

**Bemerkung 1.14.** Für Digraphen mit positiver Bewertung verläuft der zweite Algorithmus völlig analog.

## 1.6 Starker Zusammenhang

**Definition 1.24.** Ein Digraph  $D' = (E', B', h')$  heißt *Teildigraph* des Digraphen  $D = (E, B, h)$ , in Zeichen  $D' \subseteq D$ , wenn  $E' \subseteq E$ ,  $B' \subseteq B$  und  $h'$  die Einschränkung von  $h$  auf die Menge  $B'$  ist. Analog zu Definition 1.9 erklärt man *orientierte Kantenfolgen*

$$Z = (a_0, k_1, a_1, k_2, \dots, a_{p-1}, k_p, a_p) = (a_0, a_1, \dots, a_p) = a_0 a_1 \cdots a_p$$

von  $a_0$  nach  $a_p$  der Länge  $p = L(Z)$  mit  $a_i \in E$ ,  $k_i \in B$  und  $h(k_i) = (a_{i-1}, a_i)$ , *orientierte Kantenzüge*, *orientierte Wege*, *offene* und *geschlossene orientierte Kantenfolgen* und *orientierte Kreise*.

Es seien  $a$  und  $b$  zwei verschiedene Ecken aus  $D$ . Gibt es einen Bogen zwischen  $a$  und  $b$ , so nennen wir  $a$  und  $b$  *adjazent*. Existiert ein orientierter Weg mit der Anfangsecke  $a$  und der Endecke  $b$ , so heißt  $b$  von  $a$  aus *erreichbar*. Zwei Ecken aus  $D$  heißen *stark zusammenhängend*, wenn jede von der anderen aus erreichbar ist. Wie im Fall der ungerichteten Graphen ist der starke Zusammenhang eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge. Sind  $E_1, E_2, \dots, E_q$  die

disjunkten Äquivalenzklassen von  $E(D)$ , so heißen die Teildigraphen  $D[E_1], D[E_2], \dots, D[E_q]$  *starke Zusammenhangskomponenten* von  $D$ . Dabei versteht man unter  $D[E']$  den *induzierten Teildigraphen* von  $D$ , der aus den Ecken von  $E'$  und allen Bogen von  $D$  besteht, deren Anfangs- und Endpunkte in  $E'$  liegen. Besitzt  $D$  genau eine starke Zusammenhangskomponente, so heißt  $D$  *stark zusammenhängend*.

Es sei  $D$  ein Digraph, und es seien  $H_1, H_2, \dots, H_s$  die Zusammenhangskomponenten des untergeordneten Graphen  $G(D)$ . Versieht man alle Kanten aus  $H_1, H_2, \dots, H_s$  wieder mit ihrer ursprünglichen Orientierung, so erhält man die *Komponenten*  $D_1, D_2, \dots, D_s$  von  $D$ . Man nennt einen Digraphen  $D$  *zusammenhängend*, wenn er aus nur einer Komponente besteht.

Sind  $x, y \in E$  und fügt man zu  $D$  einen neuen Bogen  $k = (x, y)$  hinzu, so schreiben wir dafür auch  $D + k$  oder  $D + (x, y)$ .

Ein Digraph ist die Vereinigung seiner Komponenten aber nicht notwendig die Vereinigung seiner starken Zusammenhangskomponenten.

Analog zum Satz 1.8 bzw. Satz 1.9 von Dirac beweist man die nächsten beiden Sätze.

**Satz 1.23.** Ist  $D$  ein Digraph mit  $\max\{\delta^+(D), \delta^-(D)\} > 0$ , so besitzt  $D$  einen orientierten Kreis.

**Satz 1.24.** Ist  $D$  ein schlichter Digraph mit

$$t = \max\{\delta^+(D), \delta^-(D)\} > 0,$$

so existiert ein orientierter Kreis  $C$  der Länge  $L(C) \geq t + 1$ .

**Satz 1.25.** Es sei  $D$  ein zusammenhängender Digraph.  $D$  ist genau dann stark zusammenhängend, wenn jeder Bogen auf einem orientierten Kreis liegt.

*Beweis.* Ist  $D$  stark zusammenhängend und  $k = (a, b)$  ein Bogen von  $D$ , so existiert ein orientierter Weg  $W_{ba}$  von  $b$  nach  $a$ , der den Bogen  $k$  nicht enthält. Dann ist aber  $W_{ba} + k$  ein orientierter Kreis in  $D$ .

Es liege nun jeder Bogen auf einem orientierten Kreis. Es sei  $D_1$  eine starke Zusammenhangskomponente von  $D$ , und wir nehmen an, daß  $D_1 \neq D$  gilt. Da  $D$  zusammenhängend ist, existiert eine Ecke  $a \in E(D) - E(D_1)$ , die mit einer Ecke  $b \in E(D_1)$  adjazent ist. Es gelte o.B.d.A.  $k = (a, b) \in B(D)$ . Da  $k$  auf einem orientierten Kreis  $C$  liegt, gehören aber die Ecken aus  $E(C) \cup E(D_1)$  zu einer starken Zusammenhangskomponente. Dieser Widerspruch liefert das gewünschte Ergebnis. ||

Mit den wenigen Hilfsmitteln die wir zur Verfügung haben, können wir schon folgenden interessanten Satz beweisen, der im Zusammenhang mit der Konstruktion von "guten" Einbahnstraßensystemen steht.

**Satz 1.26 (Robbins [1] 1939).** Ein zusammenhängender Graph  $G$  besitzt genau dann eine stark zusammenhängende Orientierung, wenn  $G$  keine Brücken hat.

*Beweis.* Hat  $G$  eine Brücke, so sieht man unmittelbar, daß  $G$  keine stark zusammenhängende Orientierung besitzt.

Nun enthalte  $G$  keine Brücke, und es sei  $H \subseteq G$  ein kantenmaximaler Teilgraph von  $G$ , der eine stark zusammenhängende Orientierung  $H^*$  besitzt. Ist  $H \neq G$ , so gibt es wegen des Zusammenhangs von  $G$  eine Kante  $k = a_1 a_2 \in K(G) - K(H)$ , so daß o.B.d.A.  $a_1 \in E(H)$  gilt. Da  $G$  nach Voraussetzung keine Brücken enthält, liegt  $k$  nach Folgerung 1.1 auf einem

Kreis  $C = a_1 a_2 \cdots a_{p-1} a_p$  mit  $a_p = a_1$  von  $G$ . Nun sei  $a_j$  mit  $2 \leq j \leq p$  der kleinste Index mit  $a_j \in E(H)$ . Wegen  $a_p = a_1 \in E(H)$  existiert ein solcher Index  $j$ . Damit gehören die Kanten  $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{j-1} a_j$  nicht zu  $H$ . Geben wir diesen Kanten die Orientierungen  $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{j-1}, a_j)$  und fügen diese  $j - 1$  Bogen und die Ecken  $a_2, a_3, \dots, a_{j-1}$  im Fall  $j \geq 3$  zu  $H^*$  hinzu, so erhalten wir eine stark zusammenhängende Orientierung eines Teilgraphen von  $G$ , der  $H$  echt umfaßt, was einen Widerspruch zur Kantenmaximalität von  $H$  bedeutet. Daraus folgt  $H = G$ , und der Beweis des Satzes ist erbracht.  $\parallel$

**Definition 1.25.** Es seien  $D_1, D_2, \dots, D_q$  die starken Zusammenhangskomponenten eines Digraphen  $D$ . Der sogenannte *kondensierte Digraph*  $D^*$  von  $D$  besitzt die Eckenmenge  $E(D^*) = \{D_1, D_2, \dots, D_q\}$ , und  $(D_i, D_j)$  ist genau dann ein Bogen von  $D^*$ , wenn es in  $D$  einen Bogen von  $D_i$  nach  $D_j$  für  $i \neq j$  gibt.

**Satz 1.27.** Es seien  $D_1, D_2, \dots, D_q$  die starken Zusammenhangskomponenten eines Digraphen  $D$  mit  $q \geq 2$ . Dann existieren zwei verschiedene starke Zusammenhangskomponenten  $D_s$  und  $D_t$ , so daß in  $D_s$  kein Bogen hineinführt und aus  $D_t$  kein Bogen herausführt, also  $N^-(E(D_s)) - E(D_s) = \emptyset$  und  $N^+(E(D_t)) - E(D_t) = \emptyset$  gilt.

*Beweis.* Angenommen, es gilt  $N^-(E(D_i)) - E(D_i) \neq \emptyset$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$ . Dann folgt  $\delta^-(D^*) > 0$  für den kondensierten Digraphen  $D^*$ . Daher besitzt  $D^*$  nach Satz 1.23 einen orientierten Kreis  $D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_r} D_{j_1}$ , womit alle Ecken aus  $D_{j_1} \cup D_{j_2} \cup \cdots \cup D_{j_r}$  stark zusammenhängend sind. Das ist ein offensichtlicher Widerspruch, womit es ein  $s \in \mathbf{N}$  gibt, so daß  $N^-(E(D_s)) - E(D_s) = \emptyset$  gilt. Analog beweist man die Existenz einer Zahl  $t$  mit  $N^+(E(D_t)) - E(D_t) = \emptyset$ . Wegen  $q \geq 2$  kann man auch noch  $s \neq t$  schließen.  $\parallel$

Der Beweis von Satz 1.27 liefert uns sofort folgendes Resultat.

**Satz 1.28.** Der kondensierte Digraph eines Digraphen enthält keinen orientierten Kreis, und er besitzt mindestens eine Ecke vom Innengrad Null und mindestens eine Ecke vom Außengrad Null.

**Definition 1.26.** Ein Digraph, dessen untergeordneter Graph keinen Kreis besitzt, heißt *Wald*; ist der untergeordnete Graph zusätzlich noch zusammenhängend, so ist der Digraph ein *Baum*. Ein Digraph  $D$  heißt *orientierter Wurzelbaum* oder *orientierter Baum*, wenn  $D$  ein Baum ist, und wenn  $D$  eine Ecke  $a$  besitzt, von der aus alle anderen Ecken erreichbar sind; die Ecke  $a$  nennt man *Wurzel* von  $D$ . Insbesondere ist der triviale Graph ein orientierter Wurzelbaum.

Ist  $D = (E, B)$  ein Digraph und  $a \in E$ , so heißt ein Teildigraph  $H$  von  $D$  *vollständig orientierter Wurzelbaum bezüglich  $a$* , wenn  $H$  ein orientierter Wurzelbaum mit der Wurzel  $a$  ist, und wenn kein orientierter Wurzelbaum  $H'$  mit der Wurzel  $a$  in  $D$  existiert mit  $H \subseteq H'$  und  $H \neq H'$ .

**Satz 1.29.** Ist  $D = (E, B)$  ein orientierter Wurzelbaum mit der Wurzel  $a$  und  $|E| \geq 2$ , so gilt:

- i)  $d^-(a) = 0$ .
- ii)  $d^-(x) = 1$  für alle  $x \in E - \{a\}$ .

*Beweis.* i) Unter der Annahme  $d^-(a) > 0$  existiert ein Bogen  $k$  mit  $k = (b, a)$ . Da es von  $a$  nach  $b$  einen orientierten Weg  $W_{ab}$  gibt, der  $k$  nicht enthält, ist  $W_{ab} + k$  ein orientierter Kreis, was unserer Voraussetzung widerspricht.



ii) Angenommen, es gibt eine Ecke  $b \neq a$  mit  $d^-(b) \geq 2$ . Dann existieren zwei Bogen  $k_1 = (x, b)$  und  $k_2 = (y, b)$  und orientierte Wege von  $a$  nach  $x$  sowie von  $a$  nach  $y$ . Damit gibt es wegen  $k_1 \neq k_2$  im untergeordneten Graphen  $G(D)$  zwei verschiedene Wege von  $a$  nach  $b$ . Im Widerspruch zur Voraussetzung besäße dann  $G(D)$  nach Satz 1.5 einen Kreis.

Da es zu jeder Ecke  $x \neq a$  einen orientierten Weg von  $a$  nach  $x$  gibt, gilt natürlich  $d^-(x) \geq 1$ , womit wir insgesamt  $d^-(x) = 1$  für alle  $x \neq a$  gezeigt haben.  $\parallel$

Als nächstes wollen wir einen effizienten Algorithmus vorstellen, der uns alle starken Zusammenhangskomponenten eines Digraphen liefert. Dazu benötigen wir noch folgende Definition.

**Definition 1.27.** Wir nennen einen Digraphen  $D$  *negativ orientierten Wurzelbaum bezüglich  $b$* , wenn  $D$  ein Baum ist, und die Ecke  $b$  von allen anderen Ecken aus erreichbar ist. Ein Teilgraph  $H$  eines Digraphen  $D$  heißt *vollständig negativ orientierter Wurzelbaum bezüglich  $b$* , wenn  $H$  ein negativ orientierter Wurzelbaum bezüglich  $b$  ist, und wenn kein negativ orientierter Wurzelbaum  $H'$  bezüglich  $b$  existiert mit  $H \subseteq H'$  und  $H \neq H'$ .

### 3. Algorithmus

#### Algorithmus zur Bestimmung der starken Zusammenhangskomponenten

Es sei  $D$  ein Digraph.

1. Man wähle eine Ecke  $a \in E(D)$ .
2. Analog zum 1. Algorithmus bestimme man in  $D$  einen vollständig orientierten Wurzelbaum  $H^+$  bezüglich  $a$ .
3. Analog zum 1. Algorithmus bestimme man in  $D$  einen vollständig negativ orientierten Wurzelbaum  $H^-$  bezüglich  $a$ .
4. Dann besteht  $S = E(H^+) \cap E(H^-)$  aus genau denjenigen Ecken, die zu der starken Zusammenhangskomponente gehören in der  $a$  liegt.

*Beweis.* Ist  $a \in E(D)$ , so sei  $Z$  diejenige starke Zusammenhangskomponente von  $D$ , die die Ecke  $a$  enthält. Es gilt  $E(Z) \subseteq E(H^+)$ , denn in  $E(H^+)$  liegen alle Ecken von  $D$ , die man von  $a$  aus erreichen kann. Ebenso gilt  $E(Z) \subseteq E(H^-)$ , also  $E(Z) \subseteq E(H^+) \cap E(H^-)$ . Nun erkennt man leicht  $E(H^+) \cap E(H^-) \subseteq E(Z)$ , womit der 3. Algorithmus vollständig bewiesen ist.  $\parallel$

## 1.7 Aufgaben

**Aufgabe 1.1.** Man beweise  $\delta(G)n(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)n(G)$  für jeden Graphen  $G$ .

**Aufgabe 1.2.** Es sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $n = 4p + 1$ . Gibt es einen Graphen  $G$  mit  $E(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  und  $d(x_i, G) = i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$ ?

**Aufgabe 1.3.** Man beweise Bemerkung 1.2.

**Aufgabe 1.4.** Man beweise Bemerkung 1.4.

**Aufgabe 1.5.** Man beweise Satz 1.3.

**Aufgabe 1.6.** Man gebe einen schlichten, 4-regulären Graphen minimaler Ordnung an.



**Aufgabe 1.7.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $W_1, W_2$  zwei längste Wege in  $G$ . Man zeige  $E(W_1) \cap E(W_2) \neq \emptyset$ .

**Aufgabe 1.8.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer Graph. Existieren in  $G$  zwei verschiedene Ecken  $x, y$  mit  $N(x) \cup N(y) = E(G)$ , so beweise man die Ungleichung  $2\Delta(G) \geq n(G)$ .

**Aufgabe 1.9.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $n(G) \geq 2$ , so zeige man:

- $\Delta(G) - \delta(G) \leq n(G) - 2$ .
- In  $G$  existieren zwei verschiedene Ecken  $a, b$  mit  $d(a, G) = d(b, G)$ .

**Aufgabe 1.10.** Für schlichte Graphen  $G$  zeige man:

- Aus  $\Delta(G) + \delta(G) + 1 \geq n(G)$  folgt  $\kappa(G) = 1$ .
- Besteht  $G$  aus zwei Komponenten, die beide nicht regulär sind, so gilt  $n(G) \geq \Delta(G) + \delta(G) + 3$ .

**Aufgabe 1.11.** Gibt es einen schlichten Graphen  $G$  mit  $\kappa(G) = 3$ ,  $n(G) = 12$ ,  $\delta(G) = 3$  und  $\Delta(G) = 4$ ?

**Aufgabe 1.12.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $n(G) = 5$ ,  $m(G) = 8$ , und es bedeute  $\tau_i$  die Anzahl der Ecken vom Grade  $i$  in  $G$ .

- Man berechne  $\tau_0, \tau_1$  und  $\tau_i$  für  $i \geq 5$ . Man zeige  $1 \leq \tau_4 \leq 2$  und berechne  $\tau_4 - \tau_2$ .
- Man gebe einen Graphen  $G_1$  mit  $\tau_4(G_1) = 1$  und einen Graphen  $G_2$  mit  $\tau_4(G_2) = 2$  an.

**Aufgabe 1.13.** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung  $n$  mit  $\delta(G) \geq 2$ . Besitzt  $G$  eine Brücke, so beweise man die Ungleichung  $2m(G) \leq (n-3)(n-4) + 8$ .

**Aufgabe 1.14.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  und  $q \in \mathbf{N}$  mit  $2 \leq q \leq n$ . Ist  $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$ , so zeige man  $\kappa(G) \leq q - 1$ .

**Aufgabe 1.15.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $2q$ . Besitzt  $G$  keine Dreiecke (d.h. keine Kreise der Länge 3), so beweise man die Abschätzung  $m(G) \leq q^2$ .

**Aufgabe 1.16.** Man zeige, daß es genau 11 paarweise nicht isomorphe schlichte Graphen der Ordnung 4 gibt.

**Aufgabe 1.17.** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph, der nicht vollständig ist. Im Fall  $n(G) \geq 3$  zeige man, daß es drei verschiedene Ecken  $a, b, c$  aus  $G$  gibt mit  $ab \in K(G)$ ,  $bc \in K(G)$ , aber  $ac \notin K(G)$ .

**Aufgabe 1.18.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph der Ordnung  $n(G) \geq 2$ . Ist  $d(a, G)$  für jede Ecke  $a \in E(G)$  gerade, so zeige man  $2\kappa(G - a) \leq d(a, G)$  für alle  $a \in E(G)$ .

**Aufgabe 1.19.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit  $\kappa$  vollständigen Komponenten. Ist  $n \equiv r \pmod{\kappa}$  mit  $0 \leq r < \kappa$ , so zeige man

$$m(G) \geq \frac{1}{2\kappa}(n-r)(n+r-\kappa).$$

**Aufgabe 1.20.** Es sei  $d_1, d_2, \dots, d_n$  eine Folge nicht negativer ganzer Zahlen, deren Summe gerade ist. Man zeige, daß es einen Graphen (Schlingen und Mehrfachkanten sind zugelassen)  $G$  mit der Gradsequenz  $d_1, d_2, \dots, d_n$  gibt.

**Aufgabe 1.21.** Welche der nachstehenden Folgen sind Gradsequenzen schlichter Graphen?

- 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1

- ii) 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 1
- iii) 5, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3
- iv) 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
- v) 8, 7, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1
- vi) 11, 9, 9, 7, 7, 7, 7, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1
- vii) 14, 13, 12, 11, 11, 8, 8, 8, 8, 8, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1

**Aufgabe 1.22.** Ist eine gegebene Folge eine Gradsequenz eines schlichten Graphen, so konstruiere man mit Hilfe des Beweises von Satz 1.14 einen effektiven Algorithmus, der einen entsprechenden schlichten Graphen liefert.

**Aufgabe 1.23.** Ist eine gegebene Folge eine Gradsequenz eines Multigraphen, so konstruiere man mit Hilfe der Sätze 1.15 und 1.16 einen effektiven Algorithmus, der einen entsprechenden Multigraphen liefert.

**Aufgabe 1.24.** Man beweise die Sätze 1.23 und 1.24.

**Aufgabe 1.25.** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph, so zeige man  $me(G) + me(\overline{G}) \geq 3$ .

**Aufgabe 1.26.** Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph vom Maximalgrad  $\Delta \geq 3$ , so zeige man

$$n(G) \leq \frac{\Delta(\Delta - 1)^{\text{dm}(G)} - 2}{\Delta - 2}.$$

**Aufgabe 1.27.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n(G) \geq 5$ . Sind  $G$  und  $\overline{G}$  zusammenhängend, so beweise man die Abschätzung  $\text{dm}(G) + \text{dm}(\overline{G}) \leq n(G) + 1$ .

**Aufgabe 1.28.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph ohne Kreise der Länge 3. Ist  $\delta(G) \geq \frac{n(G)+1}{4}$ , so zeige man, daß  $G$  zusammenhängend ist.

**Aufgabe 1.29.** Ist  $G$  ein nicht trivialer selbstkomplementärer Graph, so zeige:

- a)  $G$  ist zusammenhängend.
- b) Besitzt  $G$  eine Endecke, so gilt  $\text{dm}(G) = 3$ .
- c)  $G$  besitzt höchstens zwei Endecken.

**Aufgabe 1.30.** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph mit  $\text{dm}(G) \geq 3$ , so zeige man  $\text{dm}(G) \leq n(G) - 2\delta(G) + 1$ .

**Aufgabe 1.31.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph ohne Kreise der Länge 3. Ist  $\delta(G) \geq 2$ , so zeige man, daß  $G$  einen Kreis  $C$  mit  $L(C) \geq 2\delta(G)$  besitzt.

**Aufgabe 1.32.** Ist  $D$  ein nicht trivialer negativ orientierter Wurzelbaum bzgl.  $b$ , so zeige man  $d^+(b, D) = 0$  und  $d^+(x, D) = 1$  für alle  $x \in E(D) - \{b\}$ .

**Aufgabe 1.33.** Es seien  $p, q \geq 2$  gerade Zahlen und  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n = p + q - 1$ . Ist  $\Delta(\overline{G}) \leq q - 1$ , so zeige man  $\Delta(G) \geq p$ .

**Aufgabe 1.34.** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph ohne orientierte Kreise der Länge 2. Ist  $\delta^-(D) \geq 1$ , so zeige man, daß  $D$  einen orientierten Kreis  $C$  der Länge  $L(C) \geq \delta^-(D) + 2$  besitzt.

# Kapitel 2

## Wälder, Kreise, Faktoren und Gerüste

### 2.1 Bäume, Wälder und Kreise

**Definition 2.1.** Ein Graph ohne Kreise heißt *Wald*. Ein Wald, der nur aus einer Komponente besteht, heißt *Baum*.

**Bemerkung 2.1.** Die Komponenten eines Waldes sind Bäume. Ein Wald ist notwendig schlicht.

Aus Folgerung 1.1 ergibt sich sofort

**Satz 2.1.** Ein Graph ist genau dann ein Wald, wenn jede Kante eine Brücke ist.

**Satz 2.2.** Ein Multigraph  $G$  ist genau dann ein Baum, wenn je zwei verschiedene Ecken durch genau einen Weg verbunden sind.

*Beweis.* Ist  $G$  ein Baum, so ist  $G$  zusammenhängend, und damit lassen sich je zwei Ecken durch einen Weg verbinden. Gäbe es einen zweiten Weg, so besäße  $G$  nach Satz 1.5 einen Kreis, was aber nach Voraussetzung nicht möglich ist.

Existiert umgekehrt zwischen je zwei Ecken genau ein Weg, so ist  $G$  zusammenhängend. Gäbe es einen Kreis  $(a_1, a_2, \dots, a_p, a_1)$  der Länge  $p \geq 2$ , so wären  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  und  $(a_p, a_1)$  zwei verschiedene Wege zwischen  $a_1$  und  $a_p$ . ||

**Bemerkung 2.2.** Der skizzierte Graph zeigt, daß Satz 2.2 im allgemeinen nicht mehr gilt, wenn man Schlingen zuläßt.



**Satz 2.3.** Ein Baum  $G$  mit  $|E(G)| \geq 2$  besitzt mindestens zwei Endecken.

*Beweis.* Ist  $W = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  ein längster Weg in  $G$ , so gilt nach Voraussetzung  $a_1 \neq a_p$ . Analog zum Beweis von Satz 1.8 zeigt man leicht  $d(a_1, G) = d(a_p, G) = 1$ . ||

**Definition 2.2.** Mit  $\nu = \nu(G)$  bezeichnen wir die *Anzahl der Kreise* eines Graphen  $G$ .

Im Zusammenhang mit dem in Definition 1.12 eingeführten Index  $\mu(G)$  beweisen wir nun eine wichtige Charakterisierung von Wäldern.

**Satz 2.4 (Listing [2] 1862, König [3] 1936).** Ist  $G$  ein Graph, so gilt:

$$\mu(G) = 0 \iff G \text{ ist ein Wald} \quad (2.1)$$

$$0 \leq \mu(G) \leq \nu(G) \quad (2.2)$$

*Beweis.* Zunächst beweisen wir (2.1). Ist  $G$  ein Wald, so ist nach Satz 2.1 jede Kante eine Brücke. Daher gilt für den Nullgraphen  $T_0 := G - K(G)$  nach Folgerung 1.1

$$\kappa(T_0) = n(G) = \kappa(G) + m(G),$$

woraus sich unmittelbar  $\mu(G) = m(G) - n(G) + \kappa(G) = 0$  ergibt.

Es gelte umgekehrt  $\mu(G) = 0$ . Angenommen,  $G$  besitzt einen Kreis. Liegt die Kante  $k$  auf einem Kreis von  $G$ , so folgt aus Satz 1.7

$$\begin{aligned} \mu(G - k) &= m(G - k) - n(G - k) + \kappa(G - k) \\ &= m(G) - 1 - n(G) + \kappa(G) \\ &= \mu(G) - 1 = -1. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zum Satz 1.11, womit  $G$  keinen Kreis besitzt, also  $G$  ein Wald ist. Damit ist (2.1) bewiesen.

Wir beweisen (2.2) durch Induktion nach  $\nu(G)$ . Aus  $\nu(G) = 0$  folgt mit (2.1) auch  $\mu(G) = 0$ . Ist  $\nu(G) \geq 1$  und  $k$  eine Kante eines Kreises von  $G$ , so ergibt sich (2.2) aus Satz 1.7 induktiv wie folgt:

$$\begin{aligned} \nu(G) &\geq \nu(G - k) + 1 \geq \mu(G - k) + 1 \\ &= m(G - k) - n(G - k) + \kappa(G - k) + 1 \\ &= m(G) - 1 - n(G) + \kappa(G) + 1 = \mu(G). \end{aligned} \quad \parallel$$

**Folgerung 2.1.** Ist  $T$  ein Graph, so sind folgende Aussagen äquivalent.

- i)  $T$  ist ein Baum.
- ii) Es gilt  $\kappa(T) = 1$  und  $\mu(T) = 0$ , also  $m(T) = n(T) - 1$ .
- iii) Es gilt  $\kappa(T) = 1$  und  $\sum_{x \in E(T)} d(x, T) = 2n(T) - 2$ .

*Beweis.* Wegen Satz 2.4 folgt ii) unmittelbar aus i).

Aus ii) folgt iii): Ist  $m(T) = n(T) - 1$ , so ergibt sich aus dem Handschlaglemma

$$\sum_{x \in E(T)} d(x, T) = 2m(T) = 2n(T) - 2.$$

Aus iii) folgt i): Ist  $\kappa(T) = 1$  und  $\sum_{x \in E(T)} d(x, T) = 2n(T) - 2$ , so folgt zusammen mit dem Handschlaglemma  $\mu(T) = 0$ , womit  $T$  nach Satz 2.4 ein Baum ist. ||

**Satz 2.5.** Eine Folge  $d_1, d_2, \dots, d_{n \geq 2}$  natürlicher Zahlen ist genau dann die Gradsequenz eines Baumes, wenn  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$  gilt.

*Beweis.* Ist  $d_1, d_2, \dots, d_{n \geq 2}$  die Gradsequenz eines Baumes  $T$ , so liefert Folgerung 2.1 iii) unmittelbar  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ .

Die Umkehrung beweisen wir mittels vollständiger Induktion nach  $n \geq 2$ . Für  $n = 2$  folgt notwendig  $d_1 = d_2 = 1$ , und der Baum  $K_2$  besitzt diese Gradsequenz. Nun sei  $n \geq 3$ , und o.B.d.A. setzen wir  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  voraus. Dann folgt aus  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$  leicht  $d_n = 1$  und  $d_1 \geq 2$ . Daher besteht die Gradsequenz  $d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1}$  aus  $n - 1$  natürlichen Zahlen, und die Summe ihrer Glieder beträgt  $2(n - 1) - 2$ . Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Baum  $T'$  mit  $E(T') = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ , so daß  $d(x_1, T') = d_1 - 1$  und  $d(x_i, T') = d_i$  für  $i = 2, 3, \dots, n - 1$  gilt. Fügt man nun zu  $T'$  eine neue Ecke  $x_n$  hinzu und verbindet  $x_n$  mit  $x_1$  durch eine Kante, so erhält man einen Baum  $T$ , der die Ausgangsfolge  $d_1, d_2, \dots, d_n$  als Gradsequenz besitzt. ||

**Definition 2.3.** Ein Graph  $G$ , der die Gleichung  $\mu(G) = \nu(G)$  erfüllt, heißt *Kaktusgraph*.

**Satz 2.6.** Ein Graph  $G$  ist genau dann ein Kaktusgraph, wenn alle Kreise von  $G$  paarweise kantendisjunkt sind.

*Beweis.* Es gelte  $\mu(G) = \nu(G)$ . Angenommen, es gibt zwei Kreise  $C_1$  und  $C_2$  mit  $k \in K(C_1) \cap K(C_2)$ . Dann gilt für  $G' = G - k$  wegen (2.2)

$$\mu(G) - 1 = \mu(G') \leq \nu(G') < \nu(G) - 1,$$

was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet.

Umgekehrt seien nun alle Kreise  $C_1, C_2, \dots, C_r$  von  $G$  kantendisjunkt. Wählt man aus jedem Kreis eine Kante  $k_i \in K(C_i)$ , so folgt aus (2.1)

$$0 = \mu\left(G - \bigcup_{i=1}^r \{k_i\}\right) = \mu(G) - r$$

und damit  $\mu(G) = r = \nu(G)$ . ||

**Satz 2.7.** Ist  $G$  ein schlichter Kaktusgraph, so gilt

- a)  $2m(G) \leq 3n(G) - 3$ ,
- b)  $\delta(G) \leq 2$ .

*Beweis.* a) Da  $G$  schlicht ist, besitzt jeder Kreis mindestens drei Kanten, und nach Satz 2.6 sind alle Kreise kantendisjunkt. Daher gilt

$$\begin{aligned} m(G) &\geq 3\nu(G) = 3\mu(G) \\ &= 3m(G) - 3n(G) + 3\kappa(G) \\ &\geq 3m(G) - 3n(G) + 3, \end{aligned}$$

woraus a) unmittelbar folgt.

b) Die Annahme  $\delta(G) \geq 3$ , liefert zusammen mit Teil a) und dem Handschlaglemma folgenden Widerspruch:

$$3n(G) - 3 \geq 2m(G) = \sum_{x \in E(G)} d(x, G) \geq 3n(G). \quad ||$$

In (2.1) haben wir gezeigt, daß  $\mu(G) = 0$  gleichbedeutend ist mit  $\nu(G) = 0$ . Nun beweisen wir:

**Satz 2.8.** Ist  $G$  ein Graph, so gilt:

$$\mu(G) = 1 \iff \nu(G) = 1$$

*Beweis.* Ist  $\nu(G) = 1$ , so folgt aus Satz 2.4 sofort  $\mu(G) = 1$ .

Ist  $\mu(G) = 1$ , aber  $\nu(G) > 1$ , so existieren nach Satz 2.6 zwei Kreise mit einer gemeinsamen Kante  $k$ . Dann besitzt  $G - k$  nach Satz 1.5 einen Kreis. Aus Satz 1.7 erhalten wir aber

$$\mu(G - k) = m(G) - 1 - n(G) + \kappa(G) = 0,$$

womit wir einen Widerspruch zu (2.1) hergestellt haben. ||

**Bemerkung 2.3.** Für  $\mu(G) \geq 2$  ist Satz 2.8 im allgemeinen nicht mehr richtig. Denn zum Beispiel gilt für den Multigraphen  $G$ , der aus zwei Ecken und  $p \geq 1$  parallelen Kanten besteht,  $\mu(G) = p - 1$  und  $\nu(G) = \frac{1}{2}p(p - 1)$ .

**Definition 2.4.** Ist  $G$  ein Graph, so bezeichnen wir mit  $\tau_i = \tau_i(G)$  die Anzahl der Ecken vom Grad  $i$  in  $G$  und mit  $\Gamma(G)$  die Menge seiner Ecken, also  $|\Gamma(G)| = \tau_1(G)$ .

**Satz 2.9.** Für jeden Graphen  $G$  gilt

$$2\tau_0(G) + \tau_1(G) + 2(\mu(G) - \kappa(G)) = \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i - 2)\tau_i(G). \quad (2.3)$$

*Beweis.* Aus dem Handschlaglemma folgt

$$\begin{aligned} \tau_1 + 2\tau_2 + \sum_{i=3}^{\Delta} i\tau_i &= \sum_{x \in E(G)} d(x) = 2m = 2\mu - 2\kappa + 2n \\ &= 2\mu - 2\kappa + 2\tau_0 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2 \sum_{i=3}^{\Delta} \tau_i, \end{aligned}$$

woraus sich sofort (2.3) ergibt. ||

Aus diesem Satz erhält man leicht eine weitere Charakterisierung von Bäumen.

**Satz 2.10.** Ein nicht trivialer zusammenhängender Graph  $G$  ist genau dann ein Baum, wenn gilt:

$$\tau_1(G) = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i - 2)\tau_i(G) \quad (2.4)$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt  $\kappa(G) = 1$  und  $\tau_0(G) = 0$ .

Ist  $G$  ein Baum, so liefert Folgerung 2.1  $\mu(G) = 0$ , womit sich (2.4) sofort aus (2.3) ergibt.

Gilt umgekehrt (2.4), so muß wegen (2.3) notwendig  $\mu(G) = 0$  gelten, womit  $G$  nach Folgerung 2.1 ein Baum ist. ||

Satz 2.10 liefert unmittelbar eine Verallgemeinerung von Satz 2.3.

**Folgerung 2.2.** Ist  $G$  ein nicht trivialer Baum, so gilt

$$\tau_1(G) \geq \max\{2, \Delta(G)\}$$

und  $\tau_1(G) = 2$  genau dann, wenn  $\tau_i(G) = 0$  für  $i \geq 3$ , also wenn  $G$  ein Weg ist.

**Beispiel 2.1. Eine Anwendung in der Chemie.** Kohlenwasserstoffmoleküle der Form  $C_jH_{2j+2}$  heißen *Alkane*. Bekanntlich ist die Wertigkeit eines Kohlenstoffatoms 4 und die eines Wasserstoffatoms 1. Fassen wir die Kohlenstoffatome  $C$  und die Wasserstoffatome  $H$  als Ecken eines Graphen  $G$  auf, so gilt:

Alle Alkane  $C_jH_{2j+2}$  haben Baumstruktur.

*Beweis.* Den  $j$  Kohlenstoffatomen ordnen wir die Ecken  $a_1, a_2, \dots, a_j$  mit  $d(a_i, G) = 4$  und den  $2j + 2$  Wasserstoffatomen die Ecken  $b_1, b_2, \dots, b_{2j+2}$  mit  $d(b_i, G) = 1$  zu. Natürlich fassen wir  $G$  als zusammenhängenden Graphen auf. Nun gilt

$$\tau_1(G) = 2j + 2 = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i - 2)\tau_i(G),$$

womit  $G$  nach Satz 2.10 ein Baum ist. ||

**Beispiel 2.2.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 2$ , so gilt folgende Erweiterung von Satz 1.8:

$$\nu(G) \geq \mu(G) \geq \frac{1}{2}\Delta(G)(\delta(G) - 1) \quad (2.5)$$

*Beweis.* Da  $G$  schlicht ist, gilt  $n(G) = n \geq \Delta + 1$ . Daraus ergibt sich zusammen mit (2.2) und dem Handschlaglemma:

$$\begin{aligned} 2\nu &\geq 2\mu = 2m - 2n + 2\kappa = \sum_{x \in E(G)} d(x) - 2n + 2\kappa \\ &\geq \Delta + (n - 1)\delta - 2n + 2 = n(\delta - 2) + \Delta - \delta + 2 \\ &\geq (\Delta + 1)(\delta - 2) + \Delta - \delta + 2 = \Delta(\delta - 1). \end{aligned} \quad ||$$

**Satz 2.11.** Für den vollständigen Graphen  $K_n$  mit  $n \geq 3$  gilt

$$\nu(K_n) = \sum_{i=3}^n \frac{n!}{2i(n-i)!} = \frac{n!}{2} \sum_{i=3}^n \frac{1}{i(n-i)!}. \quad (2.6)$$

*Beweis* (Harary, Manvel [1] 1971). Jedem Kreis der Länge  $p$  ordnen wir  $2p$  orientierte Kreise mit einer Wurzel zu, indem man nach Anfangsecke und Orientierung unterscheidet. Für  $3 \leq p \leq n$  beträgt im  $K_n$  die Anzahl der orientierten Kreise der Länge  $p$  mit Wurzel

$$n(n-1) \cdots (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!},$$

denn bei der Wahl der Wurzel hat man  $n$  Möglichkeiten, bei der Wahl der nächsten Ecke  $n-1$  Möglichkeiten usw. und bei der Wahl der  $p$ -ten Ecke  $n-(p-1)$  Möglichkeiten. Folglich ergibt sich für die Anzahl der Kreise der Länge  $p$  im  $K_n$  die Zahl  $\frac{n!}{2p(n-p)!}$  und daraus durch Summation die Formel (2.6). ||

Analog zum Beweis von (2.6) zeigten Harary und Manvel [1] für den vollständigen bipartiten Graphen  $K_{r,s}$  mit  $r \leq s$  (man vgl. Definition 4.5)

$$\nu(K_{r,s}) = \frac{r!s!}{2} \sum_{i=2}^r \frac{1}{i(r-i)!(s-i)!}. \quad (2.7)$$



Für alle schlichten Graphen fanden Golovko und Khomenko [1] 1972 eine Formel für die Anzahl der Kreise, die von der Adjazenzmatrix des Graphen abhängt. Als Spezialfall dieses Resultats wollen wir die Anzahl der Dreiecke (d.h. Kreise der Länge 3) eines schlichten Graphen bestimmen.

**Satz 2.12.** Ist  $G = (E, K)$  ein schlichter Graph mit der Eckenmenge  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , und ist  $A = (m(x_i, x_j)) = (a_{ij})$  die Adjazenzmatrix von  $G$ , so gelten folgende Aussagen:

- i) Für  $p \in \mathbf{N}$  gibt das  $(i, j)$ -Element der Matrix  $A^p$ , das wir mit  $a_{ij}^p$  bezeichnen, die Anzahl der Kantenfolgen der Länge  $p$  von  $x_i$  nach  $x_j$  an (mit Berücksichtigung des Anfangspunktes und des Durchlaufsinns).
- ii) Das Element  $a_{ii}^3$  in  $A^3$  gibt die doppelte Anzahl der Dreiecke an, die durch die Ecke  $x_i$  gehen. Daraus ergibt sich sofort, daß die Anzahl der Dreiecke  $\frac{1}{6}\text{Spur}(A^3)$  beträgt.

*Beweis.* i) Wir führen den Beweis von i) mittels Induktion nach  $p$ , wobei die Aussage für  $p = 1$  nach Definition der Adjazenzmatrix richtig ist.

Wegen  $A^{p+1} = A^p A$  gilt

$$a_{ij}^{p+1} = \sum_{r=1}^n a_{ir}^p a_{rj}. \quad (2.8)$$

Die Kantenfolgen der Länge  $p + 1$  von  $x_i$  nach  $x_j$  erhält man auf folgende Weise. Man bestimme zunächst die Anzahl der Kantenfolgen der Länge  $p$  von  $x_i$  zu jeder Ecke  $x_r$  ( $r = i$  und  $r = j$  sind natürlich zugelassen). Diese Anzahl wird nach Induktionsvoraussetzung durch  $a_{ir}^p$  gegeben. Daher ist  $a_{ir}^p a_{rj}$  die Anzahl der Kantenfolgen der Länge  $p + 1$  von  $x_i$  nach  $x_j$  mit  $x_r$  als vorletzte Ecke. Summiert man über alle Ecken  $x_r$ , so erhält man die gesuchte Anzahl, die mit (2.8) übereinstimmt.

ii) Nach i) ist  $a_{ii}^3$  die Anzahl der Kantenfolgen der Länge 3 von  $x_i$  nach  $x_i$ . Da  $G$  schlicht ist, bildet eine solche Kantenfolge aber notwendig ein Dreieck, und jedes Dreieck ist eine solche Kantenfolge. Ein Dreieck mit der Anfangsecke  $x_i$  wurde aber in (2.8) doppelt gezählt, womit  $a_{ii}^3$  die doppelte Anzahl der Dreiecke angibt, die durch  $x_i$  gehen. ||

## 2.2 Faktoren gleicher Parität

**Definition 2.5.** Ein Teilgraph  $T$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  heißt *Gerüst* (*spannender Baum* oder *Baumfaktor*) von  $G$ , wenn  $T$  ein Baum mit  $E(T) = E(G)$  ist.

Der nun folgende Satz, der sich sofort aus Satz 1.7 durch sukzessives "zerstören" aller Kreise ergibt, geht auf Kirchhoff [1] zurück.

**Satz 2.13 (Kirchhoff [1] 1847).** Jeder zusammenhängende Graph besitzt ein Gerüst.

Die Abschätzung  $\mu(G) \leq \nu(G)$  aus Satz 2.4 für die Anzahl der Kreise eines Graphen befindet sich implizit auch schon in der grundlegenden Abhandlung von Kirchhoff [1] aus dem Jahre 1847.

**Definition 2.6.** Sind  $A$  und  $B$  zwei Mengen, so definieren wir durch

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

die *symmetrische Differenz* der beiden Mengen.



**Definition 2.7.** Es sei  $G$  ein Graph. Haben alle Ecken von  $G$  geraden (oder ungeraden) Grad, so nennt man  $G$  einen *geraden* (oder *ungeraden*) *Graphen*.

Ein Faktor von  $G$ , der ein gerader (oder ungerader) Graph ist, wird auch *gerader* (oder *ungerader*) *Faktor* von  $G$  genannt.

Sind  $F$  und  $H$  zwei Faktoren von  $G$ , so daß  $d(x, F)$  genau dann gerade ist, wenn  $d(x, H)$  gerade ist für alle  $x \in E(G)$ , so nennt man  $F$  und  $H$  *Faktoren gleicher Parität*.

Sind  $F$  und  $H$  zwei Faktoren von  $G$ , so definiert man die *symmetrische Differenz*  $F \triangle H$  von  $F$  und  $H$  als denjenigen Faktor von  $G$ , der die Kantenmenge  $K(F) \triangle K(H)$  besitzt.

**Hilfssatz 2.1.** Sind  $F$  und  $H$  zwei Faktoren eines Graphen  $G$ , so gilt

$$d(x, F \triangle H) \equiv d(x, F) + d(x, H) \pmod{2}$$

für alle  $x \in E(G)$ .

*Beweis.* Es sei  $x \in E(G)$  eine beliebige Ecke von  $G$ . Weiter seien  $s$  und  $r$  die Anzahl der gemeinsamen Schlingen und Kanten (die keine Schlingen sind) in  $F$  und  $H$ , die mit  $x$  inzidieren. Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus der folgenden Identität:

$$d(x, F \triangle H) = d(x, F) + d(x, H) - 2r - 4s. \quad \parallel$$

Im Jahre 1936 zeigte König [3], daß die Anzahl der geraden Faktoren eines Graphen  $G$  gleich  $2^{\mu(G)}$  ist. Dabei werden zwei Faktoren eines Graphen  $G$  mit der Eckenmenge  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  genau dann als verschieden angesehen, wenn ein Eckenpaar  $i, j$  mit  $i \neq j$  existiert, das in einem Faktor adjazent ist, in dem anderen jedoch nicht.

**Satz 2.14 (König [3] 1936).** In einem Graphen  $G$  beträgt die Anzahl der geraden Faktoren genau  $2^{\mu(G)}$ .

*Beweis.* Zunächst nehmen wir an, daß der Graph  $G$  zusammenhängend ist. Nach Satz 2.13 besitzt  $G$  dann ein Gerüst  $T$ . Da  $T$  ein Baum ist, folgt aus (2.1)

$$|K(T)| = m(T) = n(T) - 1 = n(G) - 1$$

und damit

$$|K(G) - K(T)| = m(G) - m(T) = m(G) - n(G) + 1 = \mu(G).$$

Setzt man

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \subseteq K(G) - K(T)\},$$

so gilt bekanntlich  $|\mathcal{A}| = 2^{\mu(G)}$ . Weiter sei  $\mathcal{F}$  die Menge der geraden Faktoren von  $G$ . Zum Beweis der Aussage werden wir zeigen, daß die Abbildung  $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}$  mit  $h(F) = K(F) - K(T)$  für alle  $F \in \mathcal{F}$  bijektiv ist.

Seien  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  mit  $h(F_1) = h(F_2)$ . Wegen Hilfssatz 2.1 ist  $F_1 \triangle F_2 \in \mathcal{F}$ . Aus

$$K(F_1) - K(T) = h(F_1) = h(F_2) = K(F_2) - K(T)$$

ergibt sich dann  $K(F_1 \triangle F_2) \subseteq K(T)$ . Da  $T$  ein Baum ist, folgt daraus aber  $K(F_1 \triangle F_2) = \emptyset$ , womit  $F_1 = F_2$  gilt. Daher ist die Abbildung  $h$  injektiv.

Sei nun  $A \in \mathcal{A}$ . Ist  $A = \emptyset$ , so ist  $A = h(G^0)$ , wobei  $G^0 \in \mathcal{F}$  der Nullgraph mit  $E(G^0) = E(G)$  ist. Ist  $A \neq \emptyset$ , so sei  $A = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$  mit  $r \geq 1$ . Nach Satz 2.2 können wir zu

jedem  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  einen Kreis  $C_i$  wählen mit  $K(C_i) \cap A = \{k_i\}$ . Für  $1 \leq i \leq r$  sei  $H_i$  der gerade Faktor von  $G$  mit  $K(H_i) = K(C_i)$ . Nach Hilfssatz 2.1 ist

$$H = H_1 \triangle H_2 \triangle \dots \triangle H_r$$

ein gerader Faktor, und es gilt  $h(H) = A$ . Daher ist  $h$  auch surjektiv, und der Satz ist bewiesen, falls  $G$  zusammenhängend ist.

Hat  $G$  nun  $\kappa \geq 2$  Komponenten  $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$ , so gilt offensichtlich

$$2^{\mu(G)} = 2^{\mu(G_1)} \cdot 2^{\mu(G_2)} \dots 2^{\mu(G_\kappa)}.$$

Wendet man den Satz von König auf jede Komponente von  $G$  an, so zeigt diese Identität die Richtigkeit des Satzes auch für unzusammenhängende Graphen. ||

**Folgerung 2.3 (Ahrens [1] 1897).** Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph, so gilt

$$\nu(G) \leq 2^{\mu(G)} - 1. \tag{2.9}$$

Im Jahre 1976 charakterisierten Maurer [1] sowie Mateti und Deo [1] alle schlichten Graphen, für die in (2.9) die Gleichheit gilt.

Sie zeigten, daß genau diejenigen schlichten und zusammenhängenden Graphen (2.9) mit Gleichheit erfüllen, die man auf einen der folgenden fünf Graphen "reduzieren" kann:

$$K_1, K_3, K_4, K_{3,3} \text{ oder } K_4 - l,$$

wobei  $l$  eine beliebige Kante des  $K_4$  ist. Dabei wird bei der Reduktion folgendes getan. Es werden sukzessive die Endecken entfernt, bis keine mehr vorhanden sind. Ist  $a$  eine Ecke vom Grad 2 und sind die beiden Nachbarn  $x$  und  $y$  nicht adjazent, so wird die Ecke  $a$  aus dem Graphen entfernt und die Kante  $xy$  hinzugenommen. Dieser Prozeß wird solange durchgeführt, bis es keine solchen Ecken  $a$  mehr gibt.

Beispielsweise kann man alle Bäume auf den  $K_1$  oder alle Kreise auf den  $K_3$  reduzieren.

Reid [1] bestimmte 1976 diejenigen Komplementärgraphen von Bäumen mit den wenigsten Kreisen und Zhou [1] 1988 die mit den meisten Kreisen. Entringer und Slater [1] zeigten 1981, daß bei vorgegebener Differenz von Ecken- und Kantenzahl immer kubische Graphen mit maximaler Anzahl von Kreisen existieren.

**Definition 2.8.** Ist  $T$  ein Baum, und sind  $u$  und  $v$  zwei verschiedene Ecken von  $T$ , so sei  $T[u, v]$  derjenige Faktor von  $T$ , der genau die Kanten des eindeutigen Weges (man vgl. Satz 2.2) von  $u$  nach  $v$  in  $T$  enthält.

Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $U \subseteq E(G)$  eine Eckenmenge gerader Kardinalität. Im folgenden bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}_G(U)$  die Menge der Faktoren  $H$  von  $G$ , die die Eigenschaft  $d(u, H)$  ungerade für  $u \in U$  und  $d(v, H)$  gerade für  $v \in E(H) - U$  besitzen. Damit ist  $\mathcal{A}_G(U)$  eine Menge von Faktoren gleicher Parität.

**Satz 2.15 (McKee, Volkmann [1] 2009).** Es sei  $T$  ein Baum. Ist  $U \subseteq E(T)$  eine Eckenmenge gerader Kardinalität, so gilt  $|\mathcal{A}_T(U)| = 1$ .

*Beweis.* Ist  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{2r}\}$ , so ist

$$H = T[u_1, u_2] \triangle T[u_3, u_4] \triangle \dots \triangle T[u_{2r-1}, u_{2r}]$$

wegen Hilfssatz 2.1 ein Faktor von  $G$  mit der Eigenschaft  $d(u, H)$  ungerade für  $u \in U$  und  $d(v, H)$  gerade für  $v \in E(H) - U$ .

Damit haben wir  $|\mathcal{A}_T(U)| \geq 1$  nachgewiesen. Sind nun  $H_1$  und  $H_2$  zwei Faktoren aus  $\mathcal{A}_T(U)$ , so ist  $H_1 \Delta H_2$  nach Hilfssatz 2.1 ein gerader Faktor von  $T$ . Da  $T$  ein Baum ist, folgt daraus aber  $K(H_1 \Delta H_2) = \emptyset$  und damit  $H_1 = H_2$ . Dies zeigt uns das gewünschte Ergebnis  $|\mathcal{A}_T(U)| = 1$ . ||

**Folgerung 2.4 (Itai, Rodeh [1] 1978).** Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph, so besitzt jedes Gerüst von  $G$  genau einen Faktor dessen Parität mit derjenigen von  $G$  übereinstimmt.

**Hilfssatz 2.2 (McKee, Volkmann [1] 2009).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph. Ist  $H \in \mathcal{A}_G(U)$ , so gilt

$$\mathcal{A}_G(U) = \{H \Delta F \mid F \text{ ist ein gerader Faktor von } G\}.$$

*Beweis.* Ist  $H \in \mathcal{A}_G(U)$ , so ist wegen Hilfssatz 2.1  $H \Delta F \in \mathcal{A}_G(U)$  für jeden geraden Faktor  $F$  von  $G$ . Sind umgekehrt  $H, H' \in \mathcal{A}_G(U)$ , so ist  $H \Delta H' = F$  nach Hilfssatz 2.1 ein gerader Faktor von  $G$  und somit  $H' = H \Delta F$ . ||

Der Satz von König (Satz 2.14), Satz 2.15 und Hilfssatz 2.2 zeigen nun daß die Anzahl der Faktoren gleicher Parität in einem zusammenhängenden Graphen  $G$  immer gleich  $2^{\mu(G)}$  ist.

**Satz 2.16 (McKee, Volkmann [1] 2009).** Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $U \subseteq E(G)$  eine Eckenmenge gerader Kardinalität, so gilt  $|\mathcal{A}_G(U)| = 2^{\mu(G)}$ .

**Folgerung 2.5 (Little [1] 1976).** Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph gerader Ordnung, so beträgt die Anzahl der ungeraden Faktoren  $2^{\mu(G)}$ .

Es sei  $G$  ein Graph mit  $\kappa$  Komponenten  $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$ . Aus der Identität

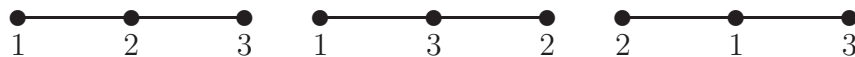
$$2^{\mu(G)} = 2^{\mu(G_1)} \cdot 2^{\mu(G_2)} \dots 2^{\mu(G_\kappa)}$$

und Satz 2.16 ergibt sich folgendes Analogon zum Satz von König (Satz 2.14).

**Satz 2.17 (McKee, Volkmann [1] 2009).** Durch  $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$  seien die Komponenten eines Graphen  $G$  gegeben. Ist  $U \subseteq E(G)$  mit der Eigenschaft, dass  $|U \cap E(G_i)|$  gerade für alle  $i = 1, 2, \dots, \kappa$ , dann hat  $G$  genau  $2^{\mu(G)}$  Faktoren  $H$ , die die Eigenschaft  $d(u, H)$  ungerade für  $u \in U$  und  $d(v, H)$  gerade für  $v \in E(H) - U$  besitzen.

## 2.3 Anzahl der Gerüste

Wir wenden uns nun der Frage zu, wieviel verschiedene Gerüste ein Graph besitzt. Im Falle eines vollständigen Graphen ist dieses Problem gleichbedeutend mit der Bestimmung aller verschiedenen Bäume mit einer festen Eckenzahl. Dabei werden zwei Bäume mit derselben Eckenmenge  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  genau dann als verschieden angesehen, wenn ein Eckenpaar  $i, j$  mit  $i \neq j$  existiert, das in einem der beiden Bäume adjazent ist, in dem anderen jedoch nicht. Bei dieser Betrachtung werden also die verschiedenen Bäume gezählt, nicht aber die Isomorphietypen. In diesem Sinne besitzt z.B. der  $K_3$  genau drei verschiedene Gerüste (man vgl. die Skizze).



Im Jahre 1889 bewies Cayley [4] folgende Anzahlformel, die er in Zusammenhang mit gewissen Determinanten brachte, die 1860 schon bei Borchardt [1] auftraten.

**Satz 2.18 (Cayley [4] 1889).** Der vollständige Graph  $K_n$  besitzt genau  $n^{n-2}$  verschiedene Gerüste.

Wir wollen das Cayleysche Ergebnis nicht direkt beweisen, sondern mit Hilfe des sogenannten Matrix-Gerüst-Satzes, der uns eine Formel liefert, mit der man die Anzahl der Gerüste eines beliebigen Graphen bestimmen kann. Auch der Matrix-Gerüst-Satz befindet sich der Idee nach in der mehrfach erwähnten Abhandlung von Kirchhoff [1] aus dem Jahre 1847. Er wurde später mehrmals wiederentdeckt und neu bewiesen. Ein klarer, auf dem Determinantensatz von Cauchy-Binet beruhender Beweis wurde 1954 von Trent [1] geliefert.

Wir werden für diesen Satz einen Induktionsbeweis geben, den man in dem Buch von Sachs [2] findet. Dieser Beweis schließt sich an eine Arbeit von Hutschenreuther [1] aus dem Jahre 1967 an und macht nur von elementaren Determinantensätzen Gebrauch.

Vorbereitend behandeln wir einige einfache Manipulationen von quadratischen Matrizen.

Ist  $M = (a_{ij})$  eine quadratische  $n \times n$  Matrix, so bezeichnen wir mit  $|M|$  die Determinante von  $M$ .

Die  $(n-1) \times (n-1)$  Matrix  $M_i$  entstehe aus  $M$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte, wobei die ursprüngliche Numerierung beibehalten wird. Für  $i \neq j$  sei

$$M_{ij} = (M_i)_j, \quad (2.10)$$

womit  $M_{ij}$  durch Streichen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeilen und Spalten entsteht.

Ersetzt man in  $M$  das Element  $a_{ii}$  durch 1 und die restlichen Elemente der  $i$ -ten Spalte durch Nullen, so schreiben wir für die neue Matrix  $M_i^*$ .

$M^i$  entstehe aus  $M$ , indem man das Element  $a_{ii}$  durch  $a_{ii} - 1$  ersetzt.

Dem Entwicklungssatz entnehmen wir sofort

$$|M_i| = |M_i^*|. \quad (2.11)$$

Weiter sieht man leicht für  $i \neq j$

$$(M_i)^j = (M^j)_i, \quad (2.12)$$

so daß wir dafür kurz  $M_i^j$  schreiben können.

Für  $i \neq j$  unterscheiden sich  $(M_i)^j$  und  $(M_i)_j^*$  nur in der  $j$ -ten Spalte, und zwar ist die Summe der  $j$ -ten Spalten dieser beiden Matrizen gleich der  $j$ -ten Spalte der Matrix  $M_i$ . Daher ergibt sich aus den Rechenregeln (der Linearität) für Determinanten

$$|M_i| = |(M_i)^j| + |(M_i)_j^*|$$

und daraus zusammen mit (2.10), (2.11) und (2.12)

$$|M_i| = |M_i^j| + |M_{ij}|. \quad (2.13)$$

**Definition 2.9.** Es sei  $G$  ein Multigraph und  $k = ab \in K(G)$ . Der neue Multigraph  $G^{(k)}$  entstehe aus  $G$  durch *Kontraktion der Kante  $k$*  wie folgt:

Man identifiziere  $a$  und  $b$  zu einer neuen Ecke  $u$  und streiche die dabei auftretenden Schlingen.

**Hilfssatz 2.3.** Es sei  $G$  ein Multigraph und  $k \in K(G)$ . Bezeichnen wir mit  $z(G)$  die Anzahl der Gerüste von  $G$ , so gilt

$$z(G) = z(G^{(k)}) + z(G - k).$$

*Beweis.* Den Gerüsten von  $G^{(k)}$  entsprechen umkehrbar eindeutig diejenigen Gerüste von  $G$ , die die Kante  $k$  enthalten.

Den Gerüsten von  $G - k$  entsprechen umkehrbar eindeutig diejenigen Gerüste von  $G$ , die die Kante  $k$  nicht enthalten.

Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung. ||

**Definition 2.10.** Es sei  $G$  ein Graph und  $D = (d_{ij})$  eine  $n \times n$  Diagonalmatrix mit  $d_{ii} = d(x_i, G)$  für  $x_i \in E(G)$ . Ist  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G$ , so heißt  $B = B_G = D - A$  *Admittanzmatrix* von  $G$ .

Offenbar bleibt das Hinzufügen oder das Fortlassen von Schlingen für die Admittanzmatrix ohne Einfluß. Wegen Bemerkung 1.4 ii) erkennt man sofort, daß die Summen der Spalten- und Zeilenvektoren der Admittanzmatrix verschwinden.

Sind  $B^{(k)}$  bzw.  $B_{(k)}$  die Admittanzmatrizen von  $G^{(k)}$  bzw.  $G - k$  mit  $g(k) = \{x_i, x_j\}$ , so macht man sich für  $i \neq j$  leicht die Gültigkeit folgender Identitäten klar:

$$(B^{(k)})_j = (B_i)_j = B_{ij} \tag{2.14}$$

$$(B_{(k)})_i = (B_i)^j = B_i^j \tag{2.15}$$

**Satz 2.19 (Matrix-Gerüst-Satz).** Es sei  $G$  ein Graph mit  $E(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  und  $n \geq 2$ . Ist  $B_G = B$  die Admittanzmatrix von  $G$ , so gilt für alle  $1 \leq i \leq n$

$$z(G) = |B_i|. \tag{2.16}$$

Insbesondere ist  $|B_i|$  unabhängig von  $i$ .

*Beweis.* Da sich weder die Anzahl der Gerüste noch die Admittanzmatrix ändern, wenn man zu  $G$  Schlingen hinzufügt oder von  $G$  wegnimmt, sei im folgenden o.B.d.A.  $G$  ein Multigraph. Der Beweis des Satzes erfolgt nun durch Induktion nach  $n = n(G)$  und  $m = m(G)$ . Ist  $m = 0$ , so ist (2.16) richtig, denn es gilt  $z(G) = 0$  (wegen  $n \geq 2$ ) und  $|B_i| = 0$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

Auch im Fall  $n = 2$  gilt (2.16), denn es ist  $z(G) = m$  und

$$|B_1| = d(2, G) = m = d(1, G) = |B_2|.$$

Nun sei (2.16) für alle Multigraphen mit weniger als  $m \geq 1$  Kanten bewiesen. Hat  $G$  genau  $m$  Kanten und  $n \geq 3$  Ecken, so unterscheiden wir zwei Fälle.

i) Ist  $i$  eine isolierte Ecke, so gilt natürlich  $z(G) = 0$ . Es ist aber auch  $|B_i| = 0$ , denn die Summe der Spaltenvektoren von  $B_i$  ergibt den Nullvektor, womit die Spaltenvektoren linear abhängig sind.

ii) Es existiert eine Kante  $k$  mit  $g(k) = \{i, j\}$ . Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung, (2.14) und (2.15):

$$\begin{aligned} z(G^{(k)}) &= |(B^{(k)})_j| = |B_{ij}| \\ z(G - k) &= |(B_{(k)})_i| = |B_i^j| \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zusammen mit dem Hilfssatz 2.3 und (2.13)

$$z(G) = z(G^{(k)}) + z(G - k) = |B_{ij}| + |B_i^j| = |B_i|,$$

womit der Matrix-Gerüst-Satz vollständig bewiesen ist. ||

Aus dem Matrix-Gerüst-Satz folgt nun sehr leicht die Anzahlformel von Cayley (Satz 2.17).

*Beweis.* [Beweis von Satz 2.17] Ist  $K_n$  der vollständige Graph, so liefert die Formel (2.16) für  $n \geq 2$ :

$$z(K_n) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

Subtrahiert man in dieser  $(n-1)$ -reihigen Determinante die erste Spalte von allen anderen Spalten, so erhält man:

$$z(K_n) = \begin{vmatrix} n-1 & -n & -n & \cdots & -n \\ -1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

Addiert man in dieser Determinante zur ersten Zeile alle anderen Zeilen, so ergibt sich:

$$z(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

||

Erfüllen zwei natürliche Zahlen  $s$  und  $n$  die Bedingung  $1 \leq s \leq n$ , so sei  $F(n, s)$  die Anzahl der verschiedenen Wälder mit der Eckenmenge  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ , die aus  $s$  Komponenten bestehen, wobei die Ecken  $1, 2, \dots, s$  zu verschiedenen Komponenten gehören sollen. In der schon erwähnten Arbeit von Cayley [4] findet man eine Formel für  $F(n, s)$ , die erstmalig 1959 von Rényi [1] bewiesen wurde.

**Satz 2.20 (Cayley [4] 1889, Rényi [1] 1959).** Für  $1 \leq s \leq n$  gilt

$$F(n, s) = sn^{n-s-1}.$$

*Beweis* (Takács [1] 1990). Für  $n > 1$  und  $1 \leq s \leq n$  beweisen wir zunächst folgende Rekursionsformel

$$F(n, s) = \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} F(n-1, s+j-1), \tag{2.17}$$

wobei  $F(1, 1) = 1$  und  $F(n, 0) = 0$  für  $n \geq 1$  gilt. Zur Herleitung von (2.17) betrachten wir einen Wald  $T$  mit der Eckenmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$ , der aus  $s$  Komponenten besteht, wobei die Ecken  $1, 2, \dots, s$  zu verschiedenen Komponenten gehören sollen. Hat die Ecke 1 den Eckengrad  $j$  in  $T$ , so gilt  $0 \leq j \leq n-s$ , und die Ecke 1 ist zu  $j$  Ecken aus der Eckenmenge  $\{s+1, s+2, \dots, n\}$  adjazent. Nun gibt es  $\binom{n-s}{j}$  Möglichkeiten, um  $j$  Nachbarn aus der Eckenmenge  $\{s+1, s+2, \dots, n\}$  zu wählen, und der Wald  $T-1$  der Ordnung  $n-1$  besteht aus  $s+j-1$  Komponenten (man vgl. Aufgabe 2.2), so daß die Ecken  $2, 3, \dots, n$  und die  $j$  Nachbarn von 1 in verschiedenen Komponenten liegen. Die Anzahl solcher Wälder ist

$F(n-1, s+j-1)$ . Addieren wir für alle möglichen  $j$  die Größen  $\binom{n-s}{j}F(n-1, s+j-1)$ , so erhalten wir  $F(n, s)$ , womit (2.17) bewiesen ist.

Mit (2.17) leiten wir die Anzahlformel durch vollständige Induktion nach  $n$  her, wobei der Fall  $n=1$  unmittelbar einleuchtet. Ist  $n > 1$ , so gilt nach Induktionsvoraussetzung  $F(n-1, i) = i(n-1)^{n-i-2}$  für  $1 \leq i \leq n-1$ . Daraus ergibt sich zusammen mit (2.17)

$$F(n, s) = \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (s+j-1)(n-1)^{n-s-j-1}$$

für alle  $1 \leq s \leq n$ . Benutzt man in dieser Gleichung für  $j \geq 1$  die Identität

$$j \binom{n-s}{j} = (n-s) \binom{n-s-1}{j-1},$$

so folgt aus der binomischen Formel

$$\begin{aligned} F(n, s) &= \frac{s-1}{n-1} \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (n-1)^{n-s-j} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-s} \binom{n-s}{j} j (n-1)^{n-s-j-1} \\ &= \frac{s-1}{n-1} n^{n-s} + \frac{n-s}{n-1} \sum_{j=1}^{n-s} \binom{n-s-1}{j-1} (n-1)^{n-s-j} \\ &= \frac{s-1}{n-1} n^{n-s} + \frac{n-s}{n-1} \sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n-s-1}{i} (n-1)^{n-s-1-i} \\ &= \frac{s-1}{n-1} n^{n-s} + \frac{n-s}{n-1} n^{n-s-1} = sn^{n-s-1}. \quad \parallel \end{aligned}$$

Setzt man in Satz 2.20  $s=1$ , so ergibt sich sofort die Anzahlformel aus Satz 2.18.

Im Jahre 1958 zeigten Fiedler und Sedlacek [1], daß der  $K_{p,q}$  (man vgl. Definition 4.5) genau  $p^{q-1}q^{p-1}$  verschiedene Gerüste besitzt. Für diese Formel gab Abu-Sbeih [1] 1990 einen neuen Beweis, und er leitete daraus den Satz 2.18 von Cayley her.

## 2.4 Minimalgeruste

Wir betrachten einmal folgendes praktische Problem:

Es sollen  $n$  Orte durch ein Eisenbahnnetz (oder Telefonnetz oder Kanalsystem) verbunden werden. Für je zwei Orte seien die (positiven) Kosten, die der Bau einer Direktverbindung verursachen würde (oder die Entfernungen zwischen je zwei Orten), bekannt. Das gesuchte Eisenbahnnetz soll dabei folgenden Bedingungen genügen:

- Je zwei Orte sind direkt oder durch Schienen, die über andere Orte führen, miteinander verbunden.
- Verzweigungspunkte befinden sich nur in den Orten, und zwar maximal einer in jedem Ort.
- Unter allen Netzen, die den Bedingungen a) und b) genügen, wird dasjenige gesucht, das die geringsten Baukosten verursacht (oder geringste Länge besitzt).



Der diesem Problem zugeordnete bewertete Graph  $G$  ist wegen a) und b) zusammenhängend und von der Ordnung  $n$ . Darüber hinaus muß  $G$  nach c) ein Baum sein, denn besäße  $G$  einen Kreis, so könnte man eine beliebige Kante dieses Kreises löschen, ohne die Bedingungen a) und b) zu verletzen, und erhielte so ein Eisenbahnnetz mit geringeren Baukosten (oder von geringerer Länge).

Zur Lösung dieses Problems könnte man natürlich die Kosten aller Eisenbahnnetze, die die Bedingungen a), b) und c) erfüllen, berechnen und dann das Minimum auswählen. Dieser Lösungsvorschlag ist gleichbedeutend mit der Bestimmung aller Gerüste in einem vollständigen Graphen, womit nach dem Satz von Cayley die Anzahl der Rechenschritte größer als  $n^{n-2}$  ist. Somit ist diese Methode hochgradig aufwendig und daher im allgemeinen praktisch nicht durchführbar. Im weiteren wollen wir verschiedene Algorithmen vorstellen, die uns das angesprochene Problem effizient lösen.

**Problem (Problem eines Minimalgerüsts).** Es sei  $G = (E, K, \rho)$  ein schlichter, bewerteter Graph. Gesucht wird ein *Minimalgerüst*  $T$  von  $G$ , d.h. ein Gerüst  $T$  von  $G$ , dessen Gesamtlänge

$$\rho(T) = \sum_{k \in K(T)} \rho(k)$$

minimal ist.

Der bekannteste Algorithmus zur Lösung dieses Problems dürfte der sogenannte Algorithmus von Kruskal [1] aus dem Jahre 1956 sein.

#### 4. Algorithmus

##### Algorithmus von Kruskal

Es sei  $G = (E, K, \rho)$  ein schlichter, bewerteter Graph der Ordnung  $n = n(G) \geq 2$ .

1. Es sei  $T$  der leere Graph.
2. Ist  $K = \emptyset$ , so stoppe man den Algorithmus. Ist  $K \neq \emptyset$ , so wähle man eine Kante  $k \in K$  minimaler Bewertung, setze  $K = K - \{k\}$  und gehe zu 3.
3. Besitzt der Graph  $G[K(T) \cup \{k\}]$  einen Kreis, so gehe man wieder zu 2.  
Besitzt der Graph  $G[K(T) \cup \{k\}]$  keinen Kreis, so setze man  $T = G[K(T) \cup \{k\}]$ . Ist  $m(T) = n(G) - 1$ , so stoppe man den Algorithmus.  
Ist  $m(T) < n(G) - 1$ , so gehe man zu 2.

Im Fall, daß der Algorithmus im 3. Schritt abbricht, ist  $\kappa(G) = 1$  und  $T$  ein Minimalgerüst von  $G$ .

Im Fall, daß der Algorithmus im 2. Schritt abbricht, ist  $G$  nicht zusammenhängend, womit kein Gerüst existieren kann. Daher braucht der Zusammenhang des Ausgangsgraphen nicht gesondert geprüft werden.

*Beweis.* 1) Nach Konstruktion ist  $T$  ein Wald, womit sich aus (2.1)  $m(T) = n(T) - \kappa(T)$  ergibt. Bricht der Algorithmus im 3. Schritt ab, so erhält man daraus

$$m(T) = n(G) - 1 \geq n(T) - \kappa(T) = m(T),$$

womit  $T$  ein Gerüst von  $G$  sein muß.

Bricht der Algorithmus im 2. Schritt ab, so folgt

$$n(T) - \kappa(T) = m(T) < n(G) - 1,$$



also  $n(T) < n(G)$  oder  $1 < \kappa(T)$ , womit  $T$  kein Gerüst von  $G$  sein kann. In diesem Fall gilt notwendig  $\kappa(G) \geq 2$ . Denn wäre  $G$  zusammenhängend und  $n(T) < n(G)$  oder  $\kappa(T) > 1$ , so gäbe es noch mindestens eine weitere Kante  $k$  mit der Eigenschaft, daß  $G[K(T) \cup \{k\}]$  kreislos ist. Das widerspricht aber der Abbruchbedingung im 2. Schritt.

2) Nun sei  $G$  zusammenhängend, und die Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$  des Gerüstes  $T$  seien in dieser Reihenfolge durch den Algorithmus von Kruskal bestimmt worden. Nach Konstruktion gilt dann notwendig  $\rho(k_1) \leq \rho(k_2) \leq \dots \leq \rho(k_{n-1})$ . Zu zeigen bleibt, daß  $T$  ein Minimalgerüst ist. Wir nehmen einmal an, daß  $T$  kein Minimalgerüst ist. Dann wählen wir unter allen Minimalgerusten eines aus, das mit  $T$  die meisten Kanten gemeinsam hat. Bezeichnen wir dieses mit  $H$ , so gilt  $K(H) \neq K(T)$ . Es sei  $i$  der kleinste Index mit  $k_i \in K(T)$  und  $k_i \notin K(H)$ . Da  $H$  ein Gerüst von  $G$  ist, gilt  $\mu(H + k_i) = 1$ , womit der Graph  $H + k_i$  nach Satz 2.8 genau einen Kreis besitzt. Auf diesem Kreis liegt notwendig eine Kante  $l$ , die nicht zum Baum  $T$  gehört. Daher ist  $H' = (H + k_i) - l$  nach Satz 1.7 ein zusammenhängender Graph der Ordnung  $n(G)$  mit  $n(G) - 1$  Kanten. Das bedeutet aber nach Folgerung 2.1, daß auch  $H'$  ein Gerüst von  $G$  ist mit der Bewertung

$$\rho(H') = \rho(H) + \rho(k_i) - \rho(l). \quad (2.18)$$

Da  $H$  ein Minimalgerüst ist, ergibt sich aus der Identität (2.18) sofort  $\rho(k_i) \geq \rho(l)$ . Nach Wahl der Kante  $k_i$  gehören die Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}$  und die Kante  $l$  zum Gerüst  $H$ , womit  $G[\{k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, l\}]$  keinen Kreis besitzt. Daher liefert der Algorithmus von Kruskal die Ungleichung  $\rho(k_i) \leq \rho(l)$  und somit  $\rho(k_i) = \rho(l)$ . Dies zeigt uns zusammen mit (2.18), daß auch  $H'$  ein Minimalgerüst ist, das aber eine Kante mehr als  $H$  mit  $T$  gemeinsam hat, was einen Widerspruch zur Wahl von  $H$  bedeutet. ||

**Bemerkung 2.4.** Man beachte, daß im Gegensatz zum Algorithmus von Dantzig und Dijkstra, beim Algorithmus von Kruskal auch negative Bewertungen zugelassen sind.

Der Algorithmus von Kruskal liefert entsprechend modifiziert auch Maximalgeruste.

Der 4. Algorithmus läßt sich auch auf nicht schlichte und bewertete Graphen anwenden. Aber in dieser Situation ist es günstiger, zunächst die Schlingen zu entfernen und bei parallelen Kanten nur eine von minimaler Bewertung im Graphen zu belassen, um dann auf den verbleibenden schlichten Graphen den Algorithmus von Kruskal anzuwenden.

**Bemerkung 2.5.** Zum praktischen Gebrauch des 4. Algorithmus ist es im allgemeinen günstig, die  $m$  bewerteten Kanten des Graphen der Größe nach zu ordnen. (Spezielle Sortieralgorithmen ermöglichen dies mit einem Aufwand von  $O(m \log m)$ .)

Weiter notiere man sich immer die Komponenten des Waldes  $T$ . Denn dann kann man den 3. Schritt im 4. Algorithmus auf folgende Weise schnell durchführen. Liegen die Endpunkte der Kante  $k$  in einer Komponente von  $T$ , so besitzt  $G[K(T) \cup \{k\}]$  einen Kreis, und in allen anderen Fällen besitzt  $G[K(T) \cup \{k\}]$  keinen Kreis. Diese Entscheidung kann man mit  $n$  Abfragen treffen. Da man höchstens  $m$  solche Abfragen tätigt, ist die Komplexität des Algorithmus von Kruskal  $O(n \cdot m)$ , womit dieser Algorithmus effizient ist.

Liegt ein schlichter, bewerteter Graph als Skizze vor, so läßt sich der 4. Algorithmus besonders schnell durchführen, denn dann erkennt man die Komponenten des Waldes  $T$  ohne Schwierigkeiten. Wir wollen nun ein Beispiel durchrechnen, bei dem der Graph durch eine "halbe" Bewertungsmatrix gegeben ist. Bei einer *halben Bewertungsmatrix* eines schlichten, bewerteten Graphen werden nur die Bewertungen oberhalb der Hauptdiagonalen eingetragen, wodurch der Graph auch vollständig bestimmt ist.

**Beispiel 2.3.** Ein schlichter, bewerteter Graph sei durch folgende halbe Bewertungsmatrix gegeben.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
$a_1$		$\infty$	7	-2	6	2	1	2	1
$a_2$			$\infty$	4	6	2	-1	2	3
$a_3$				$\infty$	-1	5	6	5	5
$a_4$					6	1	-1	$\infty$	4
$a_5$						7	6	8	9
$a_6$							4	5	3
$a_7$								7	8
$a_8$									-2
$a_9$									

Man bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal ein Minimalgerüst und skizziere es.

*Lösung.* Das Ordnen der bewerteten Kanten erledigen wir in diesem Beispiel durch “scharfes” Hinsehen.

Als erste Kante wählen wir  $k_1 = a_1a_4$ , setzen  $T = T_1 = G[\{k_1\}]$  und notieren mit  $E(T_1) = \{a_1, a_4\}$  die Ecken der einzigen Komponente von  $T$ .

Als zweite Kante wählen wir  $k_2 = a_8a_9$ , deren Endpunkte in keiner Komponente von  $T$  liegen. Wir setzen daher  $T = G[\{k_1, k_2\}]$  und notieren mit  $E(T_2) = \{a_8, a_9\}$  die Ecken der zweiten Komponente des Waldes  $T$ .

Als dritte Kante wählen wir  $k_3 = a_2a_7$ , setzen  $T = G[\{k_1, k_2, k_3\}]$ , was offensichtlich möglich ist und notieren mit  $E(T_3) = \{a_2, a_7\}$  die Ecken der dritten Komponente von  $T$ .

Als vierte Kante wählen wir  $k_4 = a_3a_5$ , setzen  $T = G[\{k_1, k_2, k_3, k_4\}]$  und notieren  $E(T_4) = \{a_3, a_5\}$ .

Als fünfte Kante wählen wir  $k_5 = a_4a_7$ . Da  $a_4$  zu  $T_1$  und  $a_7$  zu  $T_3$  gehören, setzen wir  $T = G[\{k_1, k_2, \dots, k_5\}]$ . Nun sind die Komponenten  $T_1$  und  $T_3$  zu einer Komponente zusammengewachsen, und wir notieren mit  $E(T_1) = \{a_1, a_2, a_4, a_7\}$  die Ecken der neuen Komponente  $T_1$  von  $T$  und streichen die Komponente  $T_3$ .

Fügt man nun die Kante  $a_1a_7$  zu  $T$  hinzu, so entsteht offensichtlich ein Kreis, womit diese Kante gestrichen werden muß.

Als sechste Kante wählen wir  $k_6 = a_1a_9$ . Mit dieser Kante wachsen die Komponenten  $T_1$  und  $T_2$  zu einer Komponente  $T_1$  mit  $E(T_1) = \{a_1, a_2, a_4, a_7, a_8, a_9\}$  zusammen, so daß wir  $T = G[\{k_1, k_2, \dots, k_6\}]$  setzen können und  $T_2$  streichen müssen.

Als siebte Kante wählen wir  $k_7 = a_4a_6$ . Mit dieser Kante vergrößert sich die Komponente  $T_1$  um die Ecke  $a_6$  zu

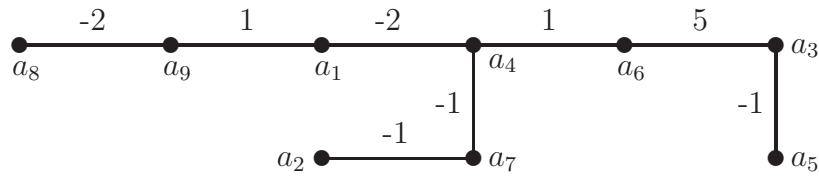
$$E(T_1) = \{a_1, a_2, a_4, a_6, a_7, a_8, a_9\}.$$

Daher können wir  $T = G[\{k_1, k_2, \dots, k_7\}]$  setzen.

Nun besteht  $T$  aus den Komponenten  $T_1$  und  $T_4$  mit  $E(T_4) = \{a_3, a_5\}$ . Man erkennt nun leicht, daß mit den folgenden Kanten in  $T_1$  ein Kreis entsteht:  $a_1a_6$ ,  $a_1a_8$ ,  $a_2a_6$ ,  $a_2a_8$ ,  $a_2a_9$ ,  $a_6a_9$ ,  $a_2a_4$ ,  $a_4a_9$  und  $a_6a_7$ . Daher sind diese Kanten zu streichen.

Die nächst größte Kante mit der Bewertung 5 ist  $k_8 = a_3a_6$  mit der  $T_1$  und  $T_4$  zu einem Baum mit 8 Kanten zusammenwachsen, womit  $G[\{k_1, k_2, \dots, k_8\}]$  ein gewünschtes Minimalgerüst ist. ||

Das gefundene Minimalgerüst, das wir nun skizzieren werden, ist keineswegs eindeutig.



**Bemerkung 2.6.** Praktiker könnte gegen die vorgeschlagene Verfahrensweise zur Bestimmung eines Eisenbahnnetzes mit geringsten Baukosten (oder kürzester Länge) den Einwand erheben, daß im allgemeinen schon gewisse Eisenbahnverbindungen bereits vorhanden sein werden, die natürlich mitbenutzt werden sollen. In einem solchen Fall setze man die Kosten und damit die Bewertungen schon vorhandener Verbindungen mit Null an und verfarene sonst wie gehabt.

Ein Konkurrenzverfahren zum 4. Algorithmus wurde 1957 von Prim [1] entwickelt. Ausgehend von einer beliebigen Ecke  $y_0$  eines bewerteten Graphen  $G$  läßt Prim einen Baum wachsen, indem er eine kürzeste Kante  $k_1$  sucht, die mit  $y_0$  inzidiert und  $T_1 = G[\{k_1\}]$  setzt. Danach sucht er eine kürzeste Kante  $k_2$ , die mit  $E(T_1)$  und mit  $E(G) - E(T_1)$  inzidiert und setzt  $T_2 = G[\{k_1, k_2\}]$ . Dann wird eine kürzeste Kante  $k_3$  bestimmt, die mit  $E(T_2)$  und mit  $E(G) - E(T_2)$  inzidiert usw.

Diese Vorgehensweise haben wir schon im 1. Kapitel algorithmisch erfaßt. Denn der Algorithmus von Prim läuft analog zum Algorithmus von Dantzig und Dijkstra, wobei allerdings die dort auftretenden Additionen wegfallen. Auch im Algorithmus von Prim wird der Graph  $G$  o.B.d.A. als schlicht vorausgesetzt.

### 5. Algorithmus

#### Algorithmus von Prim

Sei  $G = (E, K, \rho)$  ein bewerteter Graph der Ordnung  $n$  und  $y_0 \in E$ .

- 0) Man setze  $A_0 = \{y_0\}$  und  $T_0 = A_0$ .
- 1) Für  $y \in \bar{A}_0$  setze man  $t_1(y) = \rho(y_0y)$  und wähle ein  $y_1 \in \bar{A}_0$  mit

$$t_1(y_1) = \min_{y \in \bar{A}_0} \{t_1(y)\}.$$

Man setze  $A_1 = A_0 \cup \{y_1\}$ , und ist  $k_1$  die zugehörige Kante von  $A_0$  nach  $y_1$ , so setze man  $T_1 = G[\{k_1\}]$ .

- 2) Für  $y \in \bar{A}_1$  setze man  $t_2(y) = \min\{t_1(y), \rho(y_1y)\}$  und wähle ein  $y_2 \in \bar{A}_1$  mit

$$t_2(y_2) = \min_{y \in \bar{A}_1} \{t_2(y)\}.$$

Man setze  $A_2 = A_1 \cup \{y_2\}$ , und ist  $k_2$  die zugehörige Kante von  $A_1$  nach  $y_2$ , so setze man  $T_2 = G[\{k_1, k_2\}]$ .

.....

- q) Für  $y \in \bar{A}_{q-1}$  setze man  $t_q(y) = \min\{t_{q-1}(y), \rho(y_{q-1}y)\}$  und wähle ein  $y_q \in \bar{A}_{q-1}$  mit

$$t_q(y_q) = \min_{y \in \bar{A}_{q-1}} \{t_q(y)\}.$$

Man setze  $A_q = A_{q-1} \cup \{y_q\}$ , und ist  $k_q$  die zugehörige Kante von  $A_{q-1}$  nach  $y_q$ , so setze man  $T_q = G[\{k_1, k_2, \dots, k_q\}]$ .

Man stoppe den Algorithmus beim ersten  $i \in \mathbf{N}$  mit  $t_i(y) = \infty$  für alle  $y \in \bar{A}_{i-1}$  oder  $A_i = E$ .

Bricht der Algorithmus mit  $A_i = E$  ab, so ist  $i = n - 1$ , und der Graph  $T_{n-1}$  ist ein Minimalgerüst von  $G$ .

Bricht der Algorithmus vorher mit  $t_i(y) = \infty$  für alle  $y \in \bar{A}_{i-1}$  ab, so ist  $G$  nicht zusammenhängend.

*Beweis.* 1) Nach Konstruktion ist der Graph  $T_i$  für jedes  $i \in \mathbf{N}_0$  ein Baum mit  $E(T_i) = A_i$  der Ordnung  $i + 1$ . Daher ist im Fall  $A_i = E$  notwendig  $i = n - 1$  und  $T_{n-1}$  ein Gerüst von  $G$ .

Bricht der Algorithmus aber für ein  $i \leq n - 1$  mit  $t_i(y) = \infty$  für alle  $y \in \bar{A}_{i-1}$  ab, so gibt es keine Kante von  $E(T_{i-1})$  nach  $E - E(T_{i-1})$ , womit der Graph nicht zusammenhängend sein kann.

2) Der Nachweis, daß  $T_{n-1}$  ein Minimalgerüst ist, verläuft völlig analog zum zweiten Teil des Beweises des Kruskalschen Algorithmus. ||

**Bemerkung 2.7.** Bei zusammenhängenden und bewerteten Graphen kann man auch durch sukzessives Herausnehmen von längsten Kanten in Kreisen zu einem Minimalgerüst gelangen. Da diese Methode nur für Graphen mit sehr wenig Kreisen günstig ist, bleibt der Beweis dem Leser überlassen.

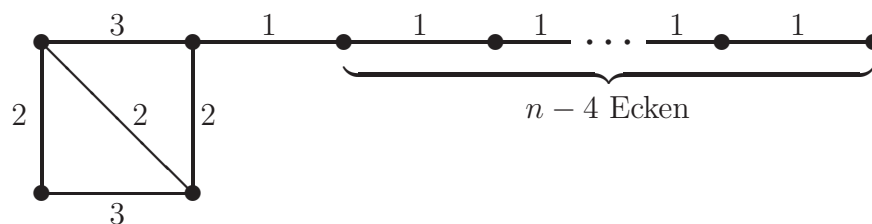
**Bemerkung 2.8.** Um die in Bemerkung 2.7 vorgeschlagene Methode algorithmisch durchzuführen, benötigt man ein Verfahren, um in einem Graphen  $G$  Kreise aufzuspüren. Dazu kann man wie folgt vorgehen.

Man entferne zunächst sukzessive alle Ecken, bis zu einem Teilgraphen  $G'$  mit  $\delta(G') \geq 2$ . Danach durchlaufe man in  $G'$  einen beliebigen Kantenzug solange, bis man einen ersten Kreis gefunden hat. Wegen  $\delta(G') \geq 2$  führt dieses Verfahren immer zum Ziel. Nun entferne man eine Kante (für die Methode in Bemerkung 2.7 eine längste Kante) dieses Kreises. Im verbleibenden Graphen nehme man wieder sukzessiv alle Ecken heraus usw.

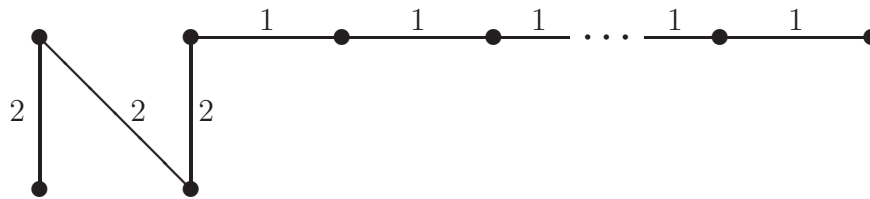
Wegen der Ähnlichkeit der Algorithmen von Dantzig und Dijkstra sowie von Prim, könnte der Verdacht aufkommen, daß ein Minimalgerüst mit mindestens einem Entfernungsbaum übereinstimmt. Daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist, zeigt uns das nächste Beispiel.

**Beispiel 2.4.** Zu jeder natürlichen Zahl  $n \geq 4$  existiert ein zusammenhängender und bewerteter Graph  $G = (E, K, \rho)$  der Ordnung  $n$  und  $\rho(k) > 0$  für alle  $k \in K$ , so daß jeder Entfernungsbaum von jedem Minimalgerüst verschieden ist.

*Beweis.* Wir betrachten den skizzierten zusammenhängenden und bewerteten Graphen der Ordnung  $n$ .



Der 4. oder 5. Algorithmus liefert das skizzierte Minimalgerüst, welches im vorliegenden Fall eindeutig ist.



Mit Hilfe des Algorithmus von Dantzig und Dijkstra überzeugt man sich leicht, daß jeder der  $n$  möglichen Entfernungsbäume mindestens eine Kante der Länge 3 enthält, womit jeder Entfernungsbau vom Minimalgerüst verschieden ist. ||

**Bemerkung 2.9.** Im Zusammenhang mit dem Problem von Minimalgerüsten schreibt Sedlacek in seinem Buch [1]:

“In der Tschechoslowakei hat die Graphentheorie eine lange Tradition. In der Literatur wird häufig O. Boruvkas Arbeit [1] aus dem Jahre 1926 zitiert. Darin wird die Methode beschrieben, wie man das kürzeste Stromnetz für eine gegebene Gruppe von Städten finden kann.”

## 2.5 Aufgaben

**Aufgabe 2.1.** Man zeige, daß ein Graph genau dann ein Wald ist, wenn jede Kante eine Brücke ist.

**Aufgabe 2.2.** Es sei  $G = (E, K)$  ein nicht trivialer Baum. Ist  $x \in E$ , so zeige man  $\kappa(G-x) = d(x, G)$ .

**Aufgabe 2.3.** Man zeige, daß alle Alkohole von der Form  $C_j H_{2j+1} O H$  Baumstruktur haben.

**Aufgabe 2.4.** Man zeige, daß alle Moleküle mit der Summenformel  $C_j H_{2j}$  genau einen Kreis besitzen. (Diejenigen Moleküle  $C_j H_{2j}$ , die einen Kreis der Länge 2 haben, heißen *Alkene*.)

**Aufgabe 2.5.** Es sei  $p \in \mathbf{N}$  und  $G$  ein zusammenhängender Graph mit  $|K(G)| \geq p$ . Weiter sei  $K' \subseteq K(G)$  mit  $|K'| = p$  und  $G' = G - K'$ . Ist  $G'$  ein Wald, so zeige man  $\nu(G) \geq p + 1 - \kappa(G')$ .

**Aufgabe 2.6.** Man bestimme alle nicht isomorphen Bäume mit 6 Ecken.

**Aufgabe 2.7.** Man bestimme alle schlichten, nicht isomorphen Graphen ohne isolierte Ecken mit genau 3 Kreisen und 6 Kanten.

**Aufgabe 2.8.** Man gebe eine einfache Charakterisierung aller Bäume, die die Eigenschaft besitzen, daß der Abstand zwischen je zwei verschiedenen Ecken ungerade ist.

**Aufgabe 2.9.** Es sei  $p \in \mathbf{N}$  und  $G$  ein schlichter Graph vom Minimalgrad  $\delta(G) \geq p$ . Ist  $T$  ein Baum mit  $p$  Kanten, so zeige man, daß  $G$  einen zu  $T$  isomorphen Teilgraphen besitzt.

**Aufgabe 2.10.** Man bestimme alle schlichten, nicht isomorphen Graphen  $G$  ohne isolierte Ecken mit  $\mu(G) = 1$  und  $n(G) = 5$ .

**Aufgabe 2.11.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 5$ . Sind  $a$  und  $b$  zwei verschiedene Ecken aus  $G$  und  $G' = G - \{a, b\}$ , so zeige man  $\mu(G') \geq 3$ .

**Aufgabe 2.12.** Man beweise die Identität (2.7).

**Aufgabe 2.13.** Man beweise Bemerkung 2.7.

**Aufgabe 2.14.** Man zeige, daß das Zentrum  $Z(G)$  eines Baumes aus einer Ecke oder zwei adjazenten Ecken besteht.

**Aufgabe 2.15.** Es sei  $G$  ein Baum und  $W = W_{ab}$  ein Weg von  $a$  nach  $b$  in  $G$  der Länge  $L(W) = 2p$  mit  $p \geq 1$ . Weiter sei die Eckenmenge  $A \subseteq E(G)$  definiert durch

$$A = \{x \mid x \in E(G) \text{ und } d(a, x) = d(b, x)\}.$$

- a) Man zeige, daß im Durchschnitt von  $A$  und  $E(W)$  genau eine Ecke liegt.
- b) Man zeige, daß der von  $A$  induzierte Teilgraph  $G[A]$  zusammenhängend ist.

**Aufgabe 2.16.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer Baum. Man zeige, daß alle längsten Wege in  $G$  mindestens eine gemeinsame Ecke besitzen.

**Aufgabe 2.17.** Man bestimme alle nicht isomorphen, schlichten Graphen  $G$  mit  $n(G) = 15$  und  $m(G) = 17$ , die aus drei Komponenten  $G_1, G_2$  und  $G_3$  bestehen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- i)  $G_1$  ist 3-regulär.
- ii)  $G_2$  ist ein Kreis gerader Länge.
- iii)  $\mu(G_3) = 0$  und  $\Delta(G_3) = 3$ .

**Aufgabe 2.18.** Man bestimme alle nicht isomorphen, schlichten Graphen  $G$  ohne isolierte Ecken mit  $n(G) = 10$  und  $m(G) = 15$ , die aus drei Komponenten  $G_1, G_2$  und  $G_3$  bestehen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- i)  $G_1$  ist 4-regulär.
- ii)  $G_2$  ist ein Baum.
- iii)  $G_3$  ist ein Kreis.

**Aufgabe 2.19.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit genau einer Ecke maximalen Grades,  $\mu(G) = 3$ ,  $\delta(G) \geq 2$  und  $\Delta(G) = 4$ .

- a) Man bestimme die Anzahl der Ecken vom Grad 3 in  $G$ .
- b) Man gebe ein Modell minimaler Ordnung  $n(G)$  an.
- c) Man konstruiere bis auf Isomorphie alle schlichten Modelle der Ordnung  $n(G) = 6$ , die genau ein Dreieck enthalten.

**Aufgabe 2.20.** Ist  $B$  die Admittanzmatrix eines Graphen, so zeige man unabhängig vom Beweis des Satzes 2.19, daß die Determinante  $|B_i|$  unabhängig von  $i$  ist.

**Aufgabe 2.21.** Es sei  $G$  ein Multigraph und  $B_G$  seine Admittanzmatrix. Ist  $D$  eine Orientierung von  $G$  und  $I_D$  die zugehörige Inzidenzmatrix, so zeige man  $I_D I_D^T = B_G$ .

**Aufgabe 2.22.** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender Digraph mit einem schlichten untergeordneten Graphen  $G = G(D)$ . Weiter existiere eine Ecke  $a$  in  $D$ , so daß  $D - a$  stark zusammenhängend bleibt, und es gelte  $m(D) = n(D) + 1$ . Man beweise  $\nu(G) = 3$ .

**Aufgabe 2.23.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph, der keine Kreise gerader Länge besitzt. Man zeige, daß  $G$  ein Kaktusgraph ist.

**Aufgabe 2.24.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit mindestens zwei Ecken maximalen Grades,  $\tau_0(G) = 0$ ,  $\tau_1(G) = 1$  und  $\mu(G) = 2$ .

- a) Man bestimme  $\kappa(G)$ .
- b) Man berechne  $\tau_i(G)$  für  $i \geq 3$ .
- c) Man gebe ein Modell minimaler Ordnung an.

**Aufgabe 2.25.** Ist  $G$  ein nicht trivialer Baum mit  $\tau_2(G) = 0$ , so zeige man  $\tau_1(G) \geq \lceil \frac{n(G)}{2} \rceil + 1$ .

**Aufgabe 2.26.** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Kaktusgraph. Sind  $a$  und  $b$  zwei Ecken aus  $G$  mit  $d_G(a, b) = \text{dm}(G)$ , so zeige man  $\max\{d(a, G), d(b, G)\} \leq 2$ .



# Kapitel 3

## Eulersche Graphen

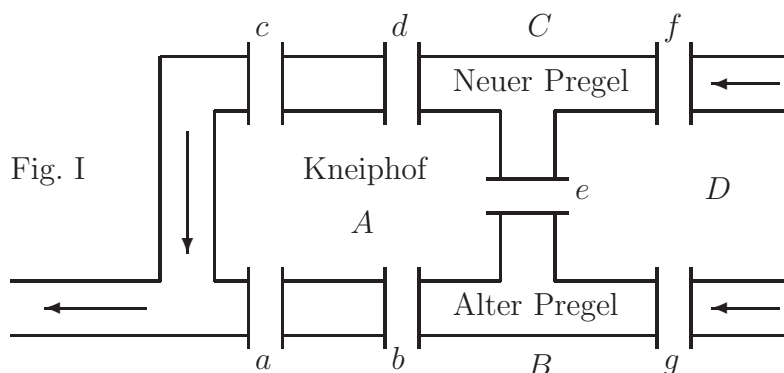
### 3.1 Das Königsberger Brückenproblem

**Definition 3.1.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender und nicht trivialer Graph. Existiert in  $G$  ein Kantenzug  $Z$  mit  $K(Z) = K(G)$ , also enthält  $Z$  alle Kanten des Graphen, so heißt  $G$  *semi-Eulerscher Graph* und  $Z$  *Eulerscher Kantenzug*. Ist ein solcher Kantenzug  $Z$  zusätzlich geschlossen, so nennen wir  $Z$  *Eulertour*, und der Graph  $G$  heißt dann *Eulerscher Graph*.

**Bemerkung 3.1.** Jeder Eulersche Graph ist auch semi-Eulersch.

Die in Definition 3.1 gegebenen Graphenklassen sind nach dem produktivsten Mathematiker aller Zeiten, dem Schweizer Genie *Leonhard Euler* (1707 – 1783) benannt. Mit seiner bekannten Abhandlung über das Königsberger Brückenproblem aus dem Jahre 1736 wurde die Graphentheorie “geboren”. Lassen wir Euler selbst zu Wort kommen.

“... 2. Das Problem, das ziemlich bekannt sein soll, war folgendes: Zu Königsberg in Preussen ist eine Insel  $A$ , genannt “der Kneiphof”, und der Fluss, der sie umfließt, teilt sich in zwei Arme, wie dies aus der Fig. I ersichtlich ist. Über die Arme dieses Flusses führen sieben Brücken  $a, b, c, d, e, f$  und  $g$ . Nun wurde gefragt, ob jemand seinen Spazierweg so einrichten könne, dass er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreite. Es wurde mir gesagt, dass einige diese Möglichkeit verneinen, andere daran zweifeln, dass aber niemand sie erhärte. Hieraus bildete ich mir folgendes höchst allgemeine Problem: Wie auch die Gestalt des Flusses und seine Verteilung in Arme, sowie die Anzahl der Brücken ist, zu finden, ob es möglich sei, jede Brücke genau einmal zu überschreiten oder nicht.



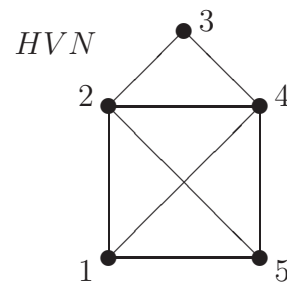
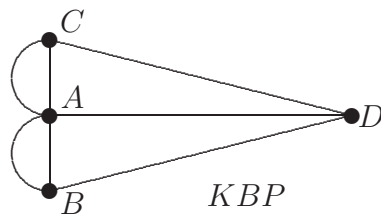
3. Was das Königsberger Problem von den sieben Brücken betrifft, so könnte man es lösen durch eine genaue Aufzählung aller Gänge, die möglich sind; denn dann wüsste man, ob einer



derselben der Bedingung genügt oder keiner. Diese Lösungsart ist aber wegen der grossen Zahl von Kombinationen zu mühsam und schwierig, und zudem könnte sie in andern Fragen, wo noch viel mehr Brücken vorhanden sind, gar nicht mehr angewendet werden. Würde die Untersuchung in der eben erwähnten Weise geführt, so würde Vieles gefunden, wonach gar nicht gefragt war; dies ist zweifellos der Grund, warum dieser Weg so beschwerlich wäre. Darum habe ich diese Methode fallen gelassen und eine andere gesucht, die nur so weit reicht, dass sie erweist, ob ein solcher Spazierweg gefunden werden kann oder nicht; denn ich vermutete, dass eine solche Methode viel einfacher sein werde.

4. Meine ganze Methode beruht nun darauf, dass ich das *Überschreiten* der Brücken in geeigneter Weise bezeichne, wobei ich die grossen Buchstaben  $A, B, C, D$  gebrauche zur Bezeichnung der einzelnen Gebiete, welche durch den Fluss voneinander getrennt sind. Wenn also einer vom Gebiet  $A$  in das Gebiet  $B$  gelangt über die Brücke  $a$  oder  $b$ , so bezeichne ich diesen Übergang mit den Buchstaben  $AB, \dots$ ”

Man erkennt deutlich, wie Euler hier implizit die Ecken  $A, B, C, D$  sowie die Kanten  $AB, AC, AD, BD, CD$  einführt. Graphentheoretisch formuliert fragt das Königsberger Brückenproblem danach, ob der links skizzierte Graph  $KBP$  einen Eulerschen Kantenzug besitzt. Die ersten Ergebnisse in diesem Abschnitt werden zeigen, daß dies nicht der Fall ist.



Noch bekannter als das Königsberger Brückenproblem dürfte das Problem im Zusammenhang mit dem rechts skizzierten Graphen  $HVN$  sein. Denn diesen Graphen haben wir alle während unserer Schulzeit mit dem begleitenden Spruch “das ist das Haus vom Nikolaus”, ohne den Schreibstift abzusetzen, mit großer Begeisterung zu zeichnen versucht. Daß man die Kanten des Graphen  $HVN$  wirklich in einem Zug skizzieren kann, zeigt der Kantenzug  $(1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 1, 5)$ , womit das Haus vom Nikolaus ein semi-Eulerscher Graph ist.

Unser erstes Ergebnis stellt eine sehr schöne und einfache Charakterisierung der Eulerschen Graphen dar.

**Satz 3.1 (Euler [1] 1736, Hierholzer [1] 1873).** Es sei  $G$  ein nicht trivialer, zusammenhängender Graph. Der Graph  $G$  ist genau dann ein Eulerscher Graph, wenn der Grad jeder Ecke gerade ist.

*Beweis.* Der Graph  $G$  sei Eulersch, und es sei  $W$  eine Eulertour von  $G$ . Bewegen wir uns entlang der Eulertour, so liefert jeder Durchgang durch eine Ecke den Beitrag 2 zum Grad dieser Ecke (dies gilt auch für den Anfangspunkt von  $W$ , da dieser gleichzeitig Endpunkt von  $W$  ist). Da  $G$  zusammenhängend ist und  $K(G) = K(W)$  gilt, wurden alle Kanten des Graphen berücksichtigt. Daher hat jede Ecke  $a$  geraden Grad mit  $d(a, G) \geq 2$ .

Hat nun umgekehrt jede Ecke von  $G$  geraden Grad, so sei  $W = a_0, k_1, a_1, \dots, a_t$  ein längster Kantenzug in  $G$ . Da wir  $W$  nicht verlängern können, gehören alle mit  $a_t$  inzidenten Kanten von  $G$  zu  $W$ . Da nach Voraussetzung  $d(a_t, G)$  gerade ist, folgt  $a_t = a_0$ , womit  $W$  geschlossen ist. Ist  $W$  keine Eulertour von  $G$ , so existiert wegen des Zusammenhangs von  $G$  eine nicht zu

$W$  gehörende Kante  $k$  in  $G$ , die mit einer Ecke von  $W$  inzidiert. Ist  $k = xa_i$  mit  $1 \leq i \leq t-1$ , so ist aber

$$x, k, a_i, k_{i+1}, \dots, a_t, k_1, a_1, \dots, k_i, a_i$$

ein längerer Kantenzug in  $G$ , was der Wahl von  $W$  widerspricht. ||

**Bemerkung 3.2.** Euler hat nur gezeigt, daß in einem Eulerschen Graphen alle Ecken von geradem Grad sind. Den ersten vollständigen Beweis von Satz 3.1 gab Hierholzer [1] 1873.

**Bemerkung 3.3.** Satz 3.1 zeigt, daß weder der Graph  $KBP$  noch der Graph  $HVN$  Eulersch ist.

**Satz 3.2 (Veblen [1] 1912).** Ein nicht trivialer, zusammenhängender Graph  $G$  ist genau dann Eulersch, wenn man ihn in kantendisjunkte Kreise zerlegen kann, d.h. wenn man ihn als Vereinigung von kantendisjunkten Kreisen darstellen kann.

*Beweis.* Ist  $G$  Eulersch, so hat nach Satz 3.1 jede Ecke geraden Grad. Damit besitzt  $G$  nach Satz 1.8 einen Kreis  $C$ , und in  $G' = G - K(C)$  sind wieder alle Ecken von geradem Grad. Auf die nicht trivialen Komponenten wende man wieder Satz 1.8 an usw. Da der Graph endlich ist, findet man so eine Zerlegung von  $G$  in kantendisjunkte Kreise.

Kann  $G$  in kantendisjunkte Kreise zerlegt werden, so hat jede Ecke geraden Grad. Denn gehen durch eine Ecke  $a$  genau  $j$  kantendisjunkte Kreise, so gilt  $d(a, G) = 2j$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, folgt unsere Behauptung wieder aus Satz 3.1. ||

**Satz 3.3.** Jeder zusammenhängende, nicht triviale Graph  $G$  besitzt eine geschlossene Kantenfolge, in der jede Kante des Graphen genau zweimal vorkommt.

*Beweis.* Jeder Kante  $k$  von  $G$  entsprechend fügen wir eine neue, in  $G$  nicht enthaltene Kante  $k'$  ein, die mit den gleichen Ecken wie  $k$  inzidiert. Durch diese Operation ist ein neuer, ebenfalls zusammenhängender Graph  $G'$  entstanden, der doppelt so viel Kanten wie  $G$  besitzt, und in dem jede Ecke geraden Grad hat. Nach Satz 3.1 besitzt  $G'$  eine Eulertour. Ersetzt man in einer Eulertour von  $G'$  jede neu hinzugefügte Kante  $k'$  durch die entsprechende Kante  $k$  aus  $G$ , so erhält man eine geschlossene Kantenfolge von  $G$ , die die geforderten Eigenschaften besitzt. ||

**Bemerkung 3.4.** Sind bei einer Messe oder Ausstellung auf beiden Seiten jedes Ganges Auslagen zu besichtigen, so gibt es immer optimale Möglichkeiten, die Gänge zu durchqueren, falls man alles in Augenschein nehmen möchte. Denn nach Satz 3.3 kann man einen Rundgang so anlegen, daß man jede Seite jedes Ganges genau einmal passiert, um dann zum Ausgangspunkt zurückzukehren.

Offen bleibt die Frage, wie man in einem Eulerschen Graphen eine Eulertour findet. Mit diesem Problem befassen wir uns in einem späteren Abschnitt.

Die nächste Anwendung von Satz 3.1 wurde erstmalig 1847 von Listing [1] ohne Beweis ausgesprochen. Einen vollständigen Beweis hat dann 1882 Lucas [1] gegeben.

**Satz 3.4 (Listing [1] 1847, Lucas [1] 1882).** Es sei  $p$  eine natürliche Zahl und  $G$  ein zusammenhängender Graph mit genau  $2p$  Ecken ungeraden Grades.

- i)  $G$  läßt sich in  $p$  kantendisjunkte offene Kantenzüge  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  zerlegen, deren Anfangs- und Endpunkte die  $2p$  Ecken ungeraden Grades sind.
- ii) Ist  $W_1, W_2, \dots, W_r$  eine Zerlegung von  $G$  in  $r$  kantendisjunkte Kantenzüge, so gilt  $r \geq p$ .

*Beweis.* i) Die Ecken ungeraden Grades fassen wir zu Paaren  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_p, b_p)$  zusammen und fügen  $p$  neue Kanten  $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_pb_p$  zum Graphen  $G$  hinzu. Nach Satz 3.1 ist der so entstandene Graph  $G'$  Eulersch und besitzt eine Eulertour  $Z$ . Entfernt man aus  $Z$  die  $p$  neuen Kanten, so erhält man die gesuchte Zerlegung von  $G$  in  $p$  offene kantendisjunkte Kantenzüge, deren Anfangs- und Endpunkte genau die Ecken ungeraden Grades sind.

ii) Ist  $a$  eine Ecke aus  $G$ , die von allen Anfangs- und Endpunkten der  $r$  Kantenzüge  $W_1, W_2, \dots, W_r$  verschieden ist, so liefert jeder Kantenzug einen geraden Beitrag zum Eckengrad von  $a$ . Da die Kantenzüge  $W_1, W_2, \dots, W_r$  den Graphen  $G$  disjunkt zerlegen, muß  $d(a, G)$  notwendig gerade sein. Daher liefert diese Zerlegung höchstens  $2r$  Ecken ungeraden Grades, woraus  $r \geq p$  folgt. ||

Aus den Sätzen 3.1 und 3.4 ergibt sich folgende Charakterisierung der semi-Eulerschen Graphen.

**Folgerung 3.1.** Ein zusammenhängender und nicht trivialer Graph ist genau dann semi-Eulersch, wenn er zwei Ecken oder keine Ecke ungeraden Grades besitzt.

Diese Folgerung zeigt, daß der Graph *KBP* des Königsberger Brückenproblems keinen Eulerschen Kantenzug besitzen kann, denn alle vier Ecken dieses Graphen sind von ungeradem Grad.

Wir wollen noch eine weitere Charakterisierung von Eulerschen Graphen vorstellen, die auf S. Toida [1] und T.A. McKee [1] zurückgeht.

**Satz 3.5 (Toida [1] 1973, McKee [1] 1984).** Es sei  $G$  ein nicht trivialer, zusammenhängender Graph. Der Graph  $G$  ist genau dann Eulersch, wenn jede Kante von  $G$  auf einer ungeraden Anzahl von Kreisen liegt.

*Beweis.* Für beliebige Kanten  $k, k' \in K(G)$  sei  $\nu(k, G)$  die Anzahl von Kreisen in  $G$ , die  $k$  enthalten und  $\nu(k, k', G)$  die Anzahl von Kreisen in  $G$ , die  $k$  und  $k'$  enthalten.

Es sei  $\nu(k, G)$  ungerade für jede Kante  $k \in K(G)$ . Weiter sei  $S$  die Menge der Schlingen in  $G$  und  $G^* = G - S$ . Falls  $S = K(G)$  gilt, so ist  $G$  Eulersch. Falls  $S \neq K(G)$ , so ist  $\nu(k, G^*) = \nu(k, G)$  ungerade für jede Kante  $k \in K(G^*)$ , und  $G$  ist genau dann Eulersch, wenn  $G^*$  Eulersch ist. Daher kann o.B.d.A.  $S = \emptyset$  vorausgesetzt werden.

Ist  $u$  eine beliebige Ecke von  $G$ , so sei  $\nu(u, G)$  die Anzahl der Kreise in  $G$ , die  $u$  enthalten. Da jeder dieser Kreise zwei zu  $u$  inzidente Kanten enthält und  $\nu(k, G)$  ungerade ist für jede Kante  $k$ , gilt

$$2\nu(u, G) = \sum_{k \text{ inzident zu } u} \nu(k, G) \equiv d(u, G) \pmod{2}.$$

Somit ist der Grad jeder Ecke in  $G$  gerade und  $G$  nach Satz 3.1 Eulersch.

Sei nun umgekehrt  $G$  Eulersch mit  $m(G) = m \geq 1$  Kanten. Wir beweisen die Notwendigkeit mittels vollständiger Induktion nach  $m$ .

Ist  $m = 1$ , so ist die einzige vorhandene Kante  $k$  eine Schlinge, und es gilt  $\nu(k, G) = 1$ .

Sei nun  $m \geq 2$ . Falls  $G$  eine Schlinge  $k$  besitzt, so ist  $\nu(k, G) = 1$ , und der Graph  $G - k$  ist ebenfalls Eulersch. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also für jede Kante  $l \in K(G) - \{k\}$ , daß  $\nu(l, G - k) = \nu(l, G)$  ungerade ist, womit alles gezeigt ist.

Falls  $G$  keine Schlingen besitzt, so sei  $k = xy \in K(G)$  eine beliebige Kante. Wir betrachten den Graphen  $G_k$ , der durch Kontraktion der Kante  $k$  aus  $G$  entsteht. Kontraktion der Kante  $k$  bedeutet hier, daß die Kante  $k$  gelöscht wird, die Ecken  $x$  und  $y$  zu einer neuen Ecke  $z$  identifiziert werden und eventuell zu  $k$  parallele Kanten zu Schlingen an der Ecke  $z$  werden.

Offensichtlich ist der Graph  $G_k$  wieder Eulersch mit  $m(G_k) = m - 1$ . Es sei  $\lambda = m(x, y)$  die Anzahl der (parallelen) Kanten zwischen  $x$  und  $y$ . Damit ist die Anzahl der Kreise der Länge 2 in  $G$ , die  $k$  enthalten, gleich  $\lambda - 1$ . Weiter sei  $K_x = \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$  die Menge der Kanten in  $G$ , die mit  $x$  aber nicht mit  $y$  inzidieren. Da jeder Kreis der Länge  $\geq 3$  in  $G$ , der  $k$  enthält, in  $G_k$  zu einem Kreis wird der genau eine Kante aus  $K_x$  enthält, gilt

$$\nu(k, G) = (\lambda - 1) + \sum_{i=1}^t \nu(k_i, G_k) - 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq t} \nu(k_i, k_j, G_k).$$

Da nach Induktionsvoraussetzung  $\nu(k_i, G_k)$  für jedes  $1 \leq i \leq t$  ungerade ist, folgt

$$\nu(k, G) \equiv \lambda - 1 + t \pmod{2}.$$

Nach Satz 3.1 ist  $d(x, G)$  gerade und wegen  $d(x, G) = \lambda + t$ , ergibt sich daher, daß  $\nu(k, G)$  ungerade ist. Da die Kante  $k$  beliebig gewählt war, ist der Beweis vollständig erbracht.  $\parallel$

## 3.2 Gute Ecken in Eulerschen Graphen

Wir wollen uns nun mit einer speziellen Klasse von Eulerscher Graphen beschäftigen, die Ore [1] 1951 vorgestellt hat.

**Definition 3.2.** Es sei  $G$  ein Eulerscher Graph. Besitzt eine Ecke  $a$  von  $G$  die Eigenschaft, daß jeder Kantenzug  $Z$  von  $G$  mit der Anfangsecke  $a$  zu einer Eulertour fortgesetzt werden kann, so nennen wir  $a$  gute Ecke.

Ist  $Z = (a_1, k_1, a_2, \dots, k_p, a_{p+1})$  ein Kantenzug, so nennt man einen Kantenzug  $W$  der Form  $W = (a_1, k_1, a_2, \dots, k_p, a_{p+1}, l_1, b_2, \dots, l_r, b_{r+1})$  mit  $r \geq 1$  eine Fortsetzung von  $Z$ .

**Satz 3.6 (Ore [1] 1951).** Ist  $G$  ein Eulerscher Graph und  $a \in E(G)$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $a$  ist eine gute Ecke.
- ii) Alle Kreise von  $G$  gehen durch die Ecke  $a$ .
- iii)  $G - a$  ist ein Wald.
- iv) Es gilt  $\kappa(G - a) = d(a, G) - \mu(G) - s(a)$ , wobei  $s(a)$  die Anzahl der Schlingen bedeutet, die mit  $a$  inzidieren.

*Beweis.* Aus i) folgt ii). Es sei  $a$  eine gute Ecke. Angenommen, es gibt in  $G$  einen Kreis  $C$  mit  $a \notin E(C)$ . Nach Satz 3.1 ist dann die Komponente  $G'$  von  $G - K(C)$ , in der die Ecke  $a$  liegt Eulersch, und es gilt  $d(a, G) = d(a, G')$ . Daher kann eine Eulertour von  $G'$  mit der Anfangsecke  $a$  in  $G$  nicht mehr fortgesetzt werden, was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet.

Aus ii) folgt i). Gehen alle Kreise von  $G$  durch die Ecke  $a$ , so betrachte man in  $G$  einen beliebigen Kantenzug mit der Anfangsecke  $a$ . Diesen Kantenzug setze man in  $G$  so lange fort, bis ein Kantenzug  $Z$  entstanden ist, den man nicht mehr fortsetzen kann. Da jede Ecke in  $G$  geraden Grad hat, muß die Ecke  $a$  auch Endecke von  $Z$  sein, und für den Graphen  $G' = G - K(Z)$  gilt notwendig  $d(a, G') = 0$ . Wäre  $G'$  kein Nullgraph, so gäbe es in  $G'$  einen Kreis, der nicht durch  $a$  ginge. Daher ist  $Z$  eine Eulertour von  $G$ , also  $a$  eine gute Ecke von  $G$ .

Die Bedingungen ii) und iii) sind natürlich äquivalent.

Ein Graph  $H$  ist nach Satz 2.4 genau dann ein Wald, wenn  $\mu(H) = 0$  gilt. Daraus ergibt sich die Äquivalenz von iii) und iv) wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \mu(G - a) &= m(G) - d(a, G) + s(a) - (n(G) - 1) + \kappa(G - a) \\ &= \mu(G) - d(a, G) + s(a) + \kappa(G - a). \end{aligned} \quad \parallel$$

Ist  $G$  ein Kreis, so ist natürlich jede Ecke von  $G$  eine gute Ecke. Das nächste Ergebnis zeigt uns, daß in allen anderen Fällen höchstens zwei gute Ecken existieren können.

**Satz 3.7 (Bäbler [2] 1953).** Ein Eulerscher Graph  $G$ , der kein Kreis ist, besitzt höchstens zwei gute Ecken.

*Beweis.* Angenommen, der Graph  $G$  besitzt die drei guten Ecken  $a, b$  und  $u$ . Wegen der Sätze 3.2 und 3.6 existiert eine Zerlegung von  $G$  in kantendisjunkte Kreise  $C_1, C_2, \dots, C_r$  mit  $a, b, u \in E(C_i)$  für  $1 \leq i \leq r$ . Da  $G$  kein Kreis ist, gilt  $r \geq 2$ . Haben die beiden Kreise  $C_1$  und  $C_2$  die Gestalt

$$\begin{aligned} C_1 &= (a, x_1, \dots, x_p, b, \dots, u, \dots, a), \\ C_2 &= (a, y_1, \dots, y_s, b, \dots, u, \dots, a), \end{aligned}$$

so ist

$$Z = (a, x_1, \dots, x_p, b, y_s, \dots, y_1, a)$$

ein geschlossener Kantenzug, der die Ecke  $u$  nicht enthält. Nach Satz 1.3 gibt es dann auch einen Kreis  $C$ , der die Ecke  $u$  nicht enthält, was der Annahme widerspricht, daß  $u$  eine gute Ecke ist. ||

**Satz 3.8 (Bäbler [2] 1953).** Ist  $G$  ein Eulerscher Graph mit einer guten Ecke  $a$ , so gilt:

- i)  $d(a, G) = \Delta(G)$ .
- ii) Jede Ecke  $b$  mit  $d(b, G) = \Delta(G)$  ist eine gute Ecke.

*Beweis.* i) Es sei  $C_1, C_2, \dots, C_r$  eine Zerlegung von  $G$  in  $r$  kantendisjunkte Kreise. Da nach Satz 3.6 jeder dieser Kreise durch die Ecke  $a$  geht, ergibt sich  $d(a, G) = 2r \geq \Delta(G)$  und damit die Behauptung.

ii) Es sei  $C$  ein beliebiger Kreis von  $G$  und  $C, C_2, \dots, C_r$  eine Zerlegung von  $G$  in kantendisjunkte Kreise. Dann gilt

$$d(a, G) = 2r = \Delta(G) = d(b, G),$$

womit auch die Ecke  $b$  auf jedem dieser Kreise liegen muß. Insbesondere gehört  $b$  zu dem beliebig gewählten Kreis  $C$ , so daß  $b$  nach Satz 3.6 notwendig eine gute Ecke ist. ||

Analog zu Definition 3.2 und dem Satz 3.6 von Ore, läßt sich auch für semi-Eulersche Graphen mit zwei Ecken ungeraden Grades ein Konzept der guten Ecken entwickeln.

**Definition 3.3.** Es sei  $G$  ein semi-Eulerscher Graph mit den zwei Ecken  $a$  und  $b$  ungeraden Grades. Kann man jeden Kantenzug aus  $G$  mit dem Anfangspunkt  $a$  zu einem Eulerschen Kantenzug fortsetzen, so heißt  $a$  *gute Ecke*.

**Satz 3.9.** Ist  $G$  ein semi-Eulerscher Graph mit den zwei Ecken  $a$  und  $b$  ungeraden Grades, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $a$  ist eine gute Ecke von  $G$ .
- ii) Alle Kreise von  $G$  gehen durch die Ecke  $b$ .
- iii)  $G - b$  ist ein Wald.
- iv) In dem Eulerschen Graphen  $G' = G + ab$  ist  $b$  eine gute Ecke.
- v) Es gilt  $\kappa(G - b) = d(b, G) - \mu(G) - s(b)$ , wobei  $s(b)$  die Anzahl der Schlingen bedeutet, die mit  $b$  inzidieren.

*Beweis.* Aus i) folgt ii). Angenommen, es gibt in  $G$  einen Kreis  $C$  mit  $b \notin E(C)$ . Dann liegen die beiden Ecken  $a$  und  $b$  notwendig in der gleichen semi-Eulerschen Komponente  $H$  von  $G - K(C)$ , und es gilt  $d(b, G) = d(b, H)$ . Daher kann ein Eulerscher Kantenzug von  $H$  mit der Anfangsecke  $a$  in  $G$  nicht mehr fortgesetzt werden, da dieser natürlich in  $b$  endet.

Offensichtlich folgt iii) aus ii).

Aus iii) folgt iv). Wegen  $G' - b = G - b$ , ist auch  $G' - b$  ein Wald, womit  $b$  nach Satz 3.6 eine gute Ecke von  $G'$  ist.

Aus iv) folgt i). Ist  $G' = G + k$  mit  $k = ab$ , so kann man nach Satz 3.6 den Kantenzug  $(b, k, a)$  von  $G'$  zu einer Eulertour von  $G'$  fortsetzen, womit jeder Kantenzug  $Z$  in  $G$  mit der Anfangsecke  $a$  zu einem Eulerschen Kantenzug in  $G$  fortsetzbar ist.

Ein Graph  $H$  ist nach Satz 2.4 genau dann ein Wald, wenn  $\mu(H) = 0$  gilt. Daraus ergibt sich die Äquivalenz von iii) und v) wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \mu(G - b) &= m(G) - d(b, G) + s(b) - (n(G) - 1) + \kappa(G - b) \\ &= \mu(G) - d(b, G) + s(b) + \kappa(G - b). \end{aligned} \quad \parallel$$

**Bemerkung 3.5.** Es sei  $G$  ein semi-Eulerscher Graph mit den zwei Ecken  $a$  und  $b$  ungeraden Grades. Im Zusammenhang mit den Sätzen 3.7 und 3.8 läßt sich folgendes sagen. Natürlich besitzt  $G$  höchstens zwei gute Ecken. Ist  $a$  eine gute Ecke von  $G$ , so muß weder  $a$  noch  $b$  vom Maximalgrad sein.

**Bemerkung 3.6.** Semi-Eulersche Graphen mit guten Ecken sind für Ausstellungen besonders praktisch, denn beginnt der Besucher seine Besichtigungstour in einer guten Ecke, so muß er sich nur an die Vorschrift halten, an jeder Kreuzung einen Gang zu wählen, den er noch nicht benutzt hat, um einen Gesamtüberblick zu erhalten.

### 3.3 Eulersche Digraphen

**Definition 3.4.** Es sei  $D$  ein nicht trivialer, zusammenhängender Digraph. Existiert in  $D$  ein orientierter Kantenzug  $Z$  mit  $B(Z) = B(D)$ , so heißt  $D$  *semi-Eulerscher Digraph* und  $Z$  *orientierter Eulerscher Kantenzug*. Ist  $Z$  zusätzlich geschlossen, so nennen wir  $Z$  *orientierte Eulertour* und  $D$  *Eulerschen Digraphen*.

**Bemerkung 3.7.** Jeder Eulersche Digraph ist semi-Eulersch und stark zusammenhängend.

Die nächsten beiden Sätze beweist man mit Satz 1.23 völlig analog zu den entsprechenden Sätzen 3.1 und 3.2.

**Satz 3.10.** Ein nicht trivialer, zusammenhängender Digraph  $D$  ist genau dann Eulersch, wenn

$$d^+(x, D) = d^-(x, D)$$

für alle Ecken  $x$  aus  $D$  gilt.



**Satz 3.11.** Ein nicht trivialer, zusammenhängender Digraph ist genau dann Eulersch, wenn man ihn in bogendisjunkte orientierte Kreise zerlegen kann.

Nun wollen wir ein Analogon zu Folgerung 3.1 herleiten.

**Satz 3.12.** Ein nicht trivialer und zusammenhängender Digraph  $D$  ist genau dann semi-Eulersch, wenn  $D$  Eulersch ist, oder wenn zwei Ecken  $a, b$  in  $D$  existieren mit

$$d^+(a, D) = d^-(a, D) + 1 \text{ und } d^+(b, D) = d^-(b, D) - 1 \quad (3.1)$$

und außerdem  $d^+(x, D) = d^-(x, D)$  für alle  $x \in E(D) - \{a, b\}$  gilt.

*Beweis.* Es sei  $D$  semi-Eulersch und  $Z = (a_1, k_1, \dots, a_p)$  ein orientierter Eulerscher Kantenzug. Ist  $a_1 = a_p$ , so ist  $D$  Eulersch. Ist  $a_1 \neq a_p$ , so gilt

$$d^+(a_1, D) = d^-(a_1, D) + 1 \text{ und } d^+(a_p, D) = d^-(a_p, D) - 1$$

und  $d^+(x, D) = d^-(x, D)$  für alle anderen Ecken aus  $D$ .

Ist umgekehrt  $D$  Eulersch, so ist  $D$  semi-Eulersch. Ist für die Ecken  $a, b$  die Bedingung (3.1) erfüllt, so füge man zu  $D$  einen neuen Bogen  $(b, a)$  hinzu. Der so entstandene Digraph ist nach Satz 3.10 Eulersch und besitzt eine orientierte Eulertour. Entfernt man aus dieser Eulertour den Bogen  $(b, a)$ , so entsteht ein orientierter Eulerscher Kantenzug von  $D$ , womit  $D$  semi-Eulersch ist. ||

**Satz 3.13.** Es sei  $D$  ein zusammenhängender Digraph,  $p$  eine natürliche Zahl und  $a, b$  zwei Ecken aus  $D$  mit

$$d^+(a, D) - d^-(a, D) = p = d^-(b, D) - d^+(b, D).$$

Gilt  $d^+(x, D) = d^-(x, D)$  für alle Ecken  $x \in E(D) - \{a, b\}$ , so existieren  $p$  bogendisjunkte orientierte Wege von  $a$  nach  $b$ .

*Beweis.* Fügt man  $p$  neue Bogen  $k_1, k_2, \dots, k_p$  von  $b$  nach  $a$  zu  $D$  hinzu, so entsteht ein Digraph  $D'$  mit  $d^+(x, D') = d^-(x, D')$  für alle  $x \in E(D')$ . Daher besitzt  $D'$  nach Satz 3.10 eine orientierte Eulertour, die o.B.d.A. die Gestalt

$$Z = (a, \dots, b, k_1, a, \dots, b, k_2, a, \dots, b, k_p, a, \dots, a)$$

haben möge. Dieser Darstellung von  $Z$  entnehmen wir, daß es in  $D$  mindestens  $p$  bogendisjunkte orientierte Kantenzüge von  $a$  nach  $b$  gibt, aus denen man  $p$  bogendisjunkte orientierte Wege von  $a$  nach  $b$  auswählen kann. ||

Vertiefte Informationen zur Theorie der Eulerschen Graphen findet man in einem von Fleischner 1983 verfaßten Artikel [2] und vor allen Dingen in den umfassenden Monographien "Eulerian Graphs and Related Topics" Teil 1 [3] und Teil 2 [4] von Fleischner aus den Jahren 1990 und 1991.

## 3.4 Das chinesische Briefträgerproblem

Ein Briefträger verläßt sein Postamt, durchläuft die Straßen seines Zustellbereiches mindestens einmal und kehrt am Ende seines Rundganges zum Ausgangspunkt zurück. Wie hat er seine Tour anzulegen, damit seine Gesamtstrecke minimal wird? Graphentheoretisch können wir dieses Problem wie folgt formulieren.

**Problem (Das chinesische Briefträgerproblem).** Es sei  $G = (E, K, \rho)$  ein zusammenhängender, bewerteter Graph mit  $\rho(k) \geq 0$  für alle Kanten  $k \in K$ . Gesucht wird eine geschlossene Kantenfolge  $Z$  von minimaler Gesamtlänge mit  $K(Z) = K$ . Eine solche Kantenfolge nennen wir *optimal*.

Der Name dieses Problems weist auf den chinesischen Mathematiker Kuan [1] hin, der sich 1962 als erster mit diesem Gegenstand beschäftigt hat.

Zur Lösung des chinesischen Briefträgerproblems unterscheiden wir die beiden Fälle, ob der Graph Eulersch oder nicht Eulersch ist.

### 1. Fall: $G$ ist ein Eulerscher Graph.

Ist  $G$  ein Eulerscher Graph, so ist natürlich jede Eulertour optimal, womit in diesem Fall das chinesische Briefträgerproblem theoretisch gelöst ist.

Offen bleibt die Frage, wie man in einem Eulerschen Graphen eine Eulertour möglichst effizient konstruiert. Einen Hinweis auf eine solche Konstruktion gibt uns der Beweis von Satz 3.1. Daher wollen wir den folgenden Algorithmus nach Hierholzer benennen.

## 6. Algorithmus

### Bestimmung einer Eulertour nach Hierholzer

Es sei  $G$  ein Eulerscher Graph. Man wähle eine beliebige Ecke  $x_1$  und konstruiere von  $x_1$  ausgehend einen Kantenzug  $Z_1$  von  $G$ , den man nicht mehr fortsetzen kann. Da jeder Eckengrad von  $G$  gerade ist, besitzt  $Z_1$  den Endpunkt  $x_1$ . Ist  $Z_1$  eine Eulertour von  $G$ , so ist man fertig.

Ist  $Z_1$  keine Eulertour von  $G$ , so setze man  $G_1 = G - K(Z_1)$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, existiert eine Ecke  $x_2 \in E(Z_1)$ , die mit einer Kante aus  $G_1$  inzidiert. Von  $x_2$  ausgehend konstruiere man einen Kantenzug  $Z_2$  von  $G_1$ , den man nicht mehr fortsetzen kann. Die beiden geschlossenen Kantenzüge  $Z_1$  und  $Z_2$  setze man zu einem geschlossenen Kantenzug von  $G$  wie folgt zusammen. Man beginne in  $x_1$ , laufe entlang  $Z_1$  bis  $x_2$ , durchlaufe nun ganz  $Z_2$  bis  $x_2$ , und dann durchlaufe man die noch verbliebenen Kanten von  $Z_1$  bis  $x_1$ .

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man nach endlich vielen Schritten eine Eulertour von  $G$ .

Die Korrektheit des 6. Algorithmus ergibt sich unmittelbar aus den vorangegangenen Untersuchungen.

**Bemerkung 3.8.** Der 6. Algorithmus läßt sich entsprechend modifiziert auch auf Eulersche Digraphen anwenden.

Ohne Beweis wollen wir einen zweiten Algorithmus zur Bestimmung einer Eulertour vorstellen, der nach Lucas [1] auf Fleury zurückgeht. Beweise dazu findet man z.B. in den Büchern von Bondy und Murty [1] oder Chartrand und Lesniak [1].

## 7. Algorithmus

### Fleury's Algorithmus

Es sei  $G$  ein Eulerscher Graph.

- i) Man wähle eine beliebige Ecke  $x_0$  und setze  $Z_0 = (x_0)$ .



- ii) Hat man den Kantenzug  $Z_p = (x_0, k_1, x_1, \dots, k_p, x_p)$  bestimmt, so wähle man eine Kante  $k_{p+1} \in K(G) - K(Z_p)$  nach folgender Vorschrift und verlängere  $Z_p$  durch  $k_{p+1}$  zu einem Kantenzug  $Z_{p+1}$ .
- Die Kante  $k_{p+1}$  inzidiert mit  $x_p$ .
  - Die Kante  $k_{p+1}$  ist nur dann eine Brücke von  $G - K(Z_p)$ , wenn es keine andere Möglichkeit gibt.
- iii) Man stoppe den Algorithmus, wenn man ii) nicht mehr durchführen kann.

**Bemerkung 3.9.** Die Schwierigkeit beim 7. Algorithmus liegt darin, zu erkennen, ob  $k_{p+1}$  eine Brücke des Restgraphen  $G - K(Z_p)$  ist. Bei skizzierten Graphen ist dies zwar einfach, aber bei Graphen, die durch ihre Adjazenzmatrizen gegeben sind, ist dies relativ aufwendig.

## 2. Fall: $G$ ist kein Eulerscher Graph.

Ist der Graph  $G$  zusammenhängend, aber nicht Eulersch, so müssen einige Kanten mehrmals durchlaufen werden, um das chinesische Briefträgerproblem zu lösen. Der folgende Satz liefert eine Möglichkeit, in einem nicht Eulerschen Graphen, eine optimale Kantenfolge zu konstruieren.

**Satz 3.14 (Goodman, Hedetniemi [1] 1973).** Es sei  $G = (E, K, \rho)$  ein nicht trivialer, zusammenhängender, bewerteter und nicht Eulerscher Graph mit  $\rho(k) > 0$  für alle  $k \in K$ . Sind  $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$  die Ecken ungeraden Grades von  $G$ , so berechne man die Längen  $d_\rho(a_i, a_j)$  für  $1 \leq i < j \leq 2p$  und setze

$$L = \min \left\{ \sum_{i=1}^p d_\rho(x_i, x'_i) \mid \bigcup_{i=1}^p \{x_i, x'_i\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2p}\} \right\}.$$

Fügt man die dem Minimum  $L$  entsprechenden  $p$  Wege zu  $G$  hinzu, so entsteht ein bewerteter Eulerscher Graph  $H$ , dessen Eulertour eine optimale Kantenfolge in  $G$  induziert.

*Beweis.* Nach Konstruktion ist der bewertete Graph  $H$  Eulersch. Nun sei  $G' = (E, K')$  ein beliebiger Eulerscher Graph, der aus  $G$  durch Vervielfachung von Kanten (gleicher Bewertung) entstanden ist und  $K^* = K' - K$ . Da wir  $\rho(H) \leq \rho(G')$  zu zeigen haben, genügt es  $L \leq \rho(K^*)$  nachzuweisen. Setzen wir  $G^* = G[K^*] = (E^*, K^*)$ , so gilt für alle  $x \in E^*$

$$d(x, G^*) = d(x, G') - d(x, G),$$

womit  $G^*$  nach Satz 3.1 genau die Ecken  $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$  ungeraden Grades besitzt. Mit  $G_1^*, G_2^*, \dots, G_r^*$  bezeichnen wir alle Komponenten von  $G^*$ , in denen sich Ecken ungeraden Grades befinden. Nach Satz 3.4 lassen sich diese  $r$  Komponenten in  $p$  offene Kantenzüge  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  zerlegen, deren Anfangs- und Endpunkte die Ecken  $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$  sind. Haben die Kantenzüge die Form  $Z_i = (u_i, \dots, v_i)$  für  $1 \leq i \leq p$ , so folgt

$$\rho(K^*) = \sum_{k \in K^*} \rho(k) \geq \sum_{i=1}^p \rho(Z_i) \geq \sum_{i=1}^p d_\rho(u_i, v_i) \geq L,$$

wobei sich die Abstände  $d_\rho(u_i, v_i)$  auf unseren Ausgangsgraphen  $G$  beziehen. ||

**Bemerkung 3.10.** Benutzt man zur Lösung des chinesischen Briefträgerproblems die in Satz 3.14 vorgestellte Methode, so kann man zur Berechnung der Größen  $d_\rho(a_i, a_j)$  den 2. Algorithmus von Dantzig und Dijkstra verwenden. Diesen muß man genau  $\binom{2p}{2}$  mal anwenden, so daß der Rechenaufwand polynomial bleibt. Das Minimum  $L$  muß man aber unter  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)$  möglichen Kombinationen herausfinden, womit der gesamte Rechenaufwand nicht mehr polynomial in  $n = n(G)$  ist.

Ein erster effizienter Algorithmus zur Lösung des chinesischen Briefträgerproblems wurde 1973 von Edmonds und Johnson [1] gegeben. Der an diesem schwierigen Algorithmus interessierte Leser vgl. z.B. Papadimitriou und Steiglitz [1], Lovász und Plummer [1] oder Jungnickel [1].

## 3.5 Aufgaben

**Aufgabe 3.1.** a) Kann ein Eulerscher Graph eine Brücke besitzen?

b) Kann ein schlichter, semi-Eulerscher Graph  $G$  mit  $\delta(G) \geq 2$  eine Brücke besitzen?

**Aufgabe 3.2.** Es sei  $k$  eine Kante des vollständigen Graphen  $K_n$ . Für welche  $n \geq 3$  ist der Graph  $K_n - k$  semi-Eulersch?

**Aufgabe 3.3.** Man skizziere einen Eulerschen Graphen  $G$  mit minimaler Kanten- und Eckenzahl, der den Bedingungen  $n(G)$  gerade und  $m(G)$  ungerade genügt.

**Aufgabe 3.4.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer und zusammenhängender Graph. Man zeige, daß  $G$  eine Orientierung  $D$  besitzt, die für alle  $x \in E(D)$  die Bedingung  $|d^+(x, D) - d^-(x, D)| \leq 1$  erfüllt.

**Aufgabe 3.5.** Es sei  $G$  ein Eulerscher Graph mit einer ungeraden Anzahl von Kanten  $m(G)$ , und die Menge  $A \subseteq E(G)$  sei definiert durch

$$A = \{x \mid x \in E(G) \text{ mit } d(x, G)/2 \text{ ungerade}\}.$$

Man beweise, daß  $|A|$  ungerade ist.

**Aufgabe 3.6.** Man bestimme alle nicht isomorphen, schlichten Graphen  $G$  mit  $n(G) = 13$  und  $m(G) = 14$ , die aus drei Komponenten  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  bestehen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- i)  $G_1$  ist Eulersch mit  $\Delta(G_1) \geq 4$ .
- ii)  $\mu(G_2) = 0$  und  $G_2$  besitzt genau drei Ecken.
- iii)  $\nu(G_3) = 3$ .

**Aufgabe 3.7.** Man beweise die Sätze 3.10 und 3.11.

**Aufgabe 3.8.** Man definiere und charakterisiere *gute Ecken* in Eulerschen Digraphen (man vgl. Definition 3.2 und die Sätze 3.6–3.8).

**Aufgabe 3.9.** Es sei  $K_n$  ein vollständiger Graph mit  $n \geq 7$  und  $k, l$  zwei verschiedene Kanten aus  $K_n$ . Welche Bedingungen muß man an  $k, l$  und  $n$  stellen, damit der Graph  $K_n - \{k, l\}$  eine semi-Eulersche Orientierung besitzt?

**Aufgabe 3.10.** Im Zusammenhang mit Satz 3.14 zeige man, daß die  $p$  Wege, die man zu  $G$  hinzufügt, um eine optimale Kantenfolge zu erhalten, paarweise kantendisjunkt sind.

**Aufgabe 3.11.** Es sei  $G$  ein semi-Eulerscher Graph mit den zwei Ecken  $a$  und  $b$  ungeraden Grades. Man zeige: Ist  $G$  kein Weg und sind  $a$  und  $b$  gute Ecken von  $G$ , so gilt  $d(a, G) = d(b, G) = \Delta(G)$ , und es gibt keine weiteren Ecken vom Maximalgrad in  $G$ .

**Aufgabe 3.12.** Man beweise die Korrektheit des 7. Algorithmus.

**Aufgabe 3.13.** Es sei  $G$  ein Eulerscher Kactusgraph. Man zeige, daß jede stark zusammenhängende Orientierung von  $G$  Eulersch ist.

**Aufgabe 3.14.** Es sei  $G$  ein schlichter Eulerscher Graph vom Maximalgrad  $\Delta(G) = 6$ . Ferner gelte  $\mu(G - a) = 0$  und  $\kappa(G - a) = 2$  für eine Ecke  $a \in E(G)$ . Man berechne  $d(a, G)$ ,  $\mu(G)$  und  $\tau_i(G)$  für alle  $i \geq 3$  und gebe ein Modell minimaler Ordnung an.

**Aufgabe 3.15.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer zusammenhängender Kactusgraph. Man zeige, daß  $G$  genau dann Eulersch ist wenn  $G$  keine Brücken besitzt.

**Aufgabe 3.16.** Man bestimme alle schlichten Eulerschen Graphen der Ordnung  $n = 8$ , die folgende Eigenschaften besitzen. Je zwei Ecken maximalen Grades sind nicht adjazent,  $\mu(G) = 3$  und  $G$  besitzt eine gute Ecke.

**Aufgabe 3.17.** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ . Man beweise oder widerlege:

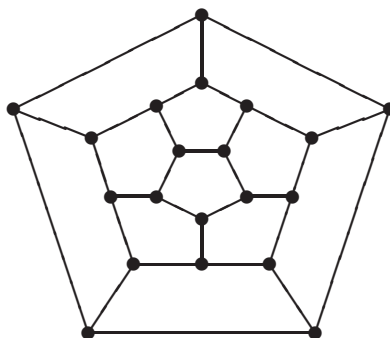
- a) Ist  $G$  Eulersch, so ist die Ordnung  $n(G)$  gerade.
- b) Ist  $G$  Eulersch, so ist die Größe  $m(G)$  gerade.
- c) Ist  $|A| \equiv |B| \pmod{2}$  und besitzt  $G$  genau einen Kreis, so ist die Größe  $m(G)$  gerade.

# Kapitel 4

## Hamiltonkreise

### 4.1 Notwendige Bedingungen für Hamiltonkreise

Im Jahre 1859 hat *Sir William Hamilton* (1805 – 1865), der in der reinen Mathematik durch die Einführung der Quaternionen bekannt geworden ist, ein Spiel herausgegeben, das auf dem unten skizzierten *Dodekaeder* beruht. Eine der von ihm gestellten Aufgaben besteht im Auffinden eines Kreises, der alle Ecken des Dodekaeders enthält (man vgl. Aufgabe 4.1).



**Definition 4.1.** Besitzt ein Graph  $G$  einen Kreis  $C$  mit der Eigenschaft  $E(C) = E(G)$ , so heißt  $C$  *Hamiltonkreis* und  $G$  *Hamiltonscher Graph*.

Besitzt ein Digraph  $D$  einen orientierter Kreis  $C$  mit der Eigenschaft  $E(C) = E(D)$ , so heißt  $C$  *orientierter Hamiltonkreis* und  $D$  *Hamiltonscher Digraph*.

**Beispiel 4.1.** Auch das uralte und vielbehandelte *Problem des Rösselsprunges* auf dem Schachbrett ist gleichbedeutend mit dem Auffinden eines Hamiltonkreises in einem speziellen Graphen. Dabei handelt es sich um folgendes Problem. Man soll mit dem Springer alle Felder des Schachbretts genau einmal in einer Zugfolge erreichen und zum Anfangsfeld zurückkehren.

Wir definieren den *Rösselsprunggraphen*  $R(8)$  wie folgt. Jedem der  $8 \times 8 = 64$  Felder lassen wir eine Ecke von  $R(8)$  entsprechen und verbinden zwei Ecken durch eine Kante genau dann, wenn zwischen den entsprechenden zwei Feldern ein Springerzug möglich ist. Das Rösselsprungproblem ist äquivalent damit, in  $R(8)$  einen Hamiltonkreis zu finden. Eine von Euler stammende Lösung geben wir in gewohnter Darstellung und verzichten darauf, den Graphen  $R(8)$  zu skizzieren, was wegen der 168 Kanten auch unübersichtlich wäre.

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

Obwohl die Definitionen für Eulersche und Hamiltonsche Graphen gewisse Ähnlichkeiten aufweisen, sind die zu untersuchenden Probleme von unterschiedlicher Schwierigkeit. Während nämlich durch Satz 3.1 ein einfaches hinreichendes und notwendiges Kriterium für Eulersche Graphen zur Verfügung steht, ist bisher für Hamiltonsche Graphen keine befriedigende Charakterisierung gelungen. Hinzu kommt, daß das Erkennen Hamiltonscher Graphen als NP-vollständig bekannt ist.

Im vorliegenden Abschnitt untersuchen wir Eigenschaften Hamiltonscher Graphen und Digraphen, und danach geben wir verschiedene hinreichende Bedingungen an. Zuvor benötigen wir noch folgende Begriffe.

**Definition 4.2.** Es sei  $G$  ein Graph. Eine Menge  $\{P_1, P_2, \dots, P_q\}$  von eckendisjunkten Wegen in  $G$  heißt *Wegüberdeckung* von  $G$ , falls  $E(G) = \bigcup_{i=1}^q E(P_i)$  gilt. Die minimale Anzahl von eckendisjunkten Wegen mit der man  $G$  überdecken kann, heißt *Wegüberdeckungsanzahl* und wird mit  $\pi = \pi(G)$  bezeichnet. Ist  $\pi(G) = 1$ , so nennt man einen Weg  $P$  mit  $E(P) = E(G)$  *Hamiltonschen Weg* und  $G$  heißt *semi-Hamiltonscher Graph*.

Es sei  $D$  ein Digraph. Eine Menge  $\{P_1, P_2, \dots, P_q\}$  von eckendisjunkten orientierten Wegen in  $D$  heißt *orientierte Wegüberdeckung* von  $D$ , falls  $E(D) = \bigcup_{i=1}^q E(P_i)$  gilt. Die minimale Anzahl von eckendisjunkten orientierten Wegen mit der man  $D$  überdecken kann, heißt *orientierte Wegüberdeckungsanzahl* und wird mit  $\pi^* = \pi^*(D)$  bezeichnet. Ist  $\pi^*(D) = 1$ , so nennt man einen orientierten Weg  $P$  mit  $E(P) = E(D)$  *orientierten Hamiltonschen Weg* und  $D$  heißt *semi-Hamiltonscher Digraph*.

**Bemerkung 4.1.** Jeder Hamiltonsche Graph ist ein semi-Hamiltonscher Graph und jeder Hamiltonsche Digraph ist ein semi-Hamiltonscher Digraph.

**Definition 4.3.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph. Eine Ecke  $x$  aus  $G$  heißt *Schnittecke* von  $G$ , wenn  $\kappa(G - x) > 1$  gilt. Ein zusammenhängender Graph ohne Schnittecken wird auch *Block* (man vgl. Definition 8.1) oder *2-fach eckenzusammenhängend* genannt (man vgl. Definition 14.1).

Jeder Hamiltonsche Graph ist zusammenhängend und besitzt keine Schnittecken.

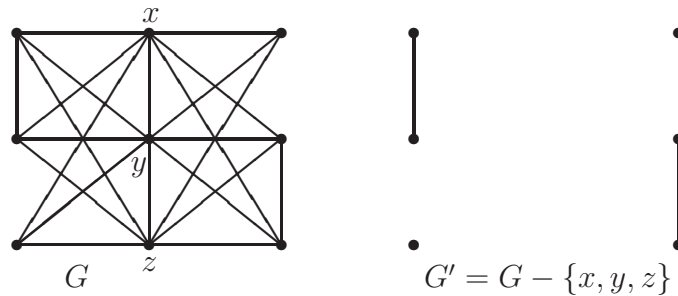
**Satz 4.1.** Ist  $G$  ein Hamiltonscher Graph, so gilt für jede nicht leere Eckenmenge  $S \subseteq E(G)$

$$\kappa(G - S) \leq \pi(G - S) \leq |S|.$$

*Beweis.* Es sei  $C$  ein Hamiltonkreis von  $G$  und  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ . Dann ist  $C - \{x_1\}$  ein Weg, und der Graph  $C - \{x_1, x_2\}$  besteht aus höchstens zwei Wegen. Induktiv erkennt man, daß  $C - \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  aus höchstens  $p$  Wegen besteht, womit wir  $\pi(C - S) \leq |S|$  nachgewiesen haben. Unsere Behauptung folgt sofort aus der Ungleichung

$$\kappa(G - S) \leq \pi(G - S) \leq \pi(C - S) \leq |S|. \quad \parallel$$

**Beispiel 4.2.** Ist  $G$  der links skizzierte Graph, so hat der Teilgraph  $G' = G - \{x, y, z\}$  die rechts skizzierte Gestalt. Nach Satz 4.1 ist  $G$  nicht Hamiltonsch, denn es gilt  $\kappa(G') = 4 > 3 = |\{x, y, z\}|$ .



**Definition 4.4.** Ein zusammenhängender Graph  $G$  heißt *1-tough*, falls er für jede nicht leere Eckenmenge  $S \subseteq E(G)$  die Ungleichung  $\kappa(G - S) \leq |S|$  erfüllt.

Ein zusammenhängender Graph  $G$  heißt *path-tough*, falls er für jede nicht leere Eckenmenge  $S \subseteq E(G)$  die Ungleichung  $\pi(G - S) \leq |S|$  erfüllt.

**Bemerkung 4.2.** Aus Definition 4.4 ergibt sich unmittelbar:

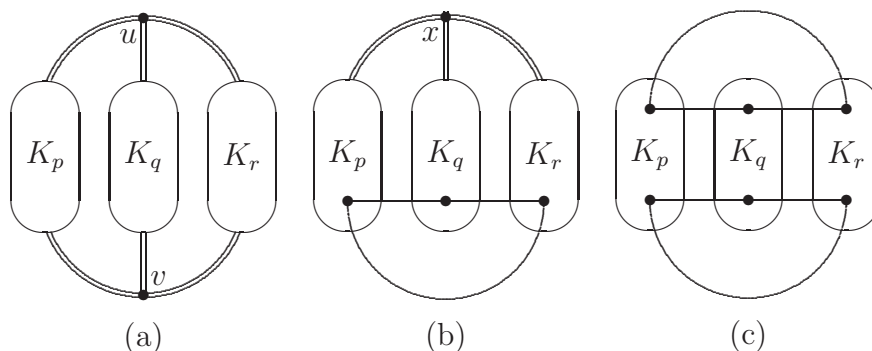
- a) Ist ein Graph 1-tough, so ist er auch 2-fach eckenzusammenhängend.
- b) Ist ein Graph path-tough, so ist er auch 1-tough.
- c) Aus Satz 4.1 folgt: Ist ein Graph Hamiltonsch, so ist er sowohl 1-tough als auch path-tough.

**Satz 4.2.** Ein Graph  $G$  ist genau dann path-tough, wenn  $G - x$  für jede Ecke  $x \in E(G)$  semi-Hamiltonsch ist.

*Beweis.* Ist  $G$  path-tough, so gilt  $\pi(G - x) = 1$  für jede Ecke  $x \in E(G)$ , womit  $G - x$  semi-Hamiltonsch ist.

Ist  $G - x$  semi-Hamiltonsch für jede Ecke  $x \in E(G)$ , so gilt  $\pi(G - S) = 1$  für alle  $S \subseteq E(G)$  mit  $|S| = 1$ . Analog zum Beweis von Satz 4.1 ergibt sich daraus auch  $\pi(G - S) \leq |S|$  für alle  $S \subseteq E(G)$  mit  $|S| \geq 2$ , womit  $G$  path-tough ist. ||

**Beispiel 4.3.** Wir betrachten nun die drei skizzierten Familien von Graphen. Dabei bedeuten die parallelen Linien, daß die Ecken  $u, v$  und  $x$  zu allen Ecken der jeweiligen vollständigen Graphen adjazent sind.



Es ist leicht zu sehen, daß keiner der skizzierten Graphen eine Schnittecke besitzt, womit alle Graphen aus den drei Familien 2-fach eckenzusammenhängend sind.

Entfernt man aus der Familie (a) die Ecken  $u$  und  $v$ , so erkennt man, daß diese Graphen nicht 1-tough und damit auch nicht path-tough und nicht Hamiltonsch sind.

Für die vollständigen Graphen aus der Familie (b) gelte  $p, q, r \geq 2$  und für die aus (c)  $p, q, r \geq 3$ . Unter diesen Voraussetzungen überlegt man sich leicht, daß keiner der skizzierten Graphen Hamiltonsch ist (man vgl. Aufgabe 4.2).

Entfernt man in (b) die Ecke  $x$ , so besitzen die verbleibenden Graphen keinen Hamiltonschen Weg, womit die ursprünglichen Graphen nicht path-tough sind. Man verifiziert ohne größere Mühe, daß die Graphen aus (b) aber 1-tough sind (man vgl. Aufgabe 4.3).

Benutzt man Satz 4.2, so sieht man, daß die Graphen aus der Familie (c) path-tough und damit auch 1-tough sind.

Ein weiterer Graph, der auch path-tough aber nicht Hamiltonsch ist, ist der im Abschnitt 13.1 skizzierte Petersen-Graph.

Analog zu Satz 4.1 beweist man die folgenden Ergebnisse (man vgl. Aufgabe 4.10).

**Satz 4.3.** Ist  $G$  ein semi-Hamiltonscher Graph, so gilt für alle Eckenmengen  $S \subseteq E(G)$

$$\kappa(G - S) \leq \pi(G - S) \leq |S| + 1.$$

**Satz 4.4.** Ist  $D$  ein Hamiltonscher Digraph, so gilt für alle nicht leeren Mengen  $S \subseteq E(D)$

$$\kappa(G(D - S)) \leq \pi^*(D - S) \leq |S|.$$

Ist  $D$  ein semi-Hamiltonscher Digraph, so gilt für alle  $S \subseteq E(D)$

$$\kappa(G(D - S)) \leq \pi^*(D - S) \leq |S| + 1.$$

## 4.2 Hinreichende Bedingungen für Hamiltonkreise

Das erste und bekannteste hinreichende Kriterium für Hamiltonsche Graphen hat Dirac [2] 1952 gegeben.

**Satz 4.5 (Dirac [2] 1952).** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $n(G) \geq 3$  und  $2\delta(G) \geq n(G)$ , so ist  $G$  Hamiltonsch.

Diese Bedingung wurde 1960 von Ore [4] durch folgendes Ergebnis verallgemeinert.

**Satz 4.6 (Ore [4] 1960).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n(G) \geq 3$ , und gilt für alle nicht adjazenten Ecken  $x, y$  die Ungleichung  $d(x, G) + d(y, G) \geq n(G)$ , so ist  $G$  Hamiltonsch.

Die Sätze von Dirac und Ore sind eine leichte Folgerung aus dem nächsten Resultat.

**Satz 4.7 (Lemma von Ore, Ore [4] 1960).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, und erfüllen zwei nicht adjazente Ecken  $a, b \in E(G)$  die Bedingung  $d(a, G) + d(b, G) \geq n(G)$ , so ist  $G$  genau dann Hamiltonsch, wenn  $G + ab$  Hamiltonsch ist.

*Beweis.* Ist  $G$  Hamiltonsch, so ist natürlich auch  $G + ab$  Hamiltonsch.

Nun sei umgekehrt  $G + ab$  Hamiltonsch,  $n = n(G)$  und  $C$  ein Hamiltonkreis in  $G + ab$ . Ist  $ab \notin K(C)$ , so ist auch  $G$  Hamiltonsch. Ist  $ab \in K(C)$ , so besitzt  $G$  einen Hamiltonschen Weg  $(a, x_1, \dots, x_{n-2}, b)$ . Mit der Voraussetzung  $d(a, G) + d(b, G) \geq n$  folgt, wie wir anschließend



nachweisen werden, die Existenz einer Zahl  $p \in \{1, 2, \dots, n-3\}$  mit  $ax_{p+1} \in K(G)$  und  $bx_p \in K(G)$ . Dann ist aber  $(a, x_1, \dots, x_p, b, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_{p+1}, a)$  ein Hamiltonkreis in  $G$ .

Um die Existenz dieser Zahl  $p$  nachzuweisen, setzen wir

$$\begin{aligned} A &= \{i \mid 1 \leq i \leq n-3 \text{ mit } ax_{i+1} \in K(G)\}, \\ B &= \{i \mid 1 \leq i \leq n-3 \text{ mit } bx_i \in K(G)\}. \end{aligned}$$

Es gilt  $|A| = d(a, G) - 1$  und  $|B| = d(b, G) - 1$ , also  $|A| + |B| \geq n - 2$ . Wegen  $A, B \subseteq \{1, 2, \dots, n-3\}$  ergibt sich schließlich  $A \cap B \neq \emptyset$ . ||

*Beweis.* [Beweis von Satz 4.6.] Wegen  $d(x, G) + d(y, G) \geq n(G)$  für alle nicht adjazenten Ecken von  $G$  kann man diese Ecken nach dem Lemma von Ore paarweise miteinander durch eine Kante verbinden, ohne dabei die Eigenschaft, daß die Graphen Hamiltonsch sind, zu verändern. Da der vollständige Graph  $K_n$  für  $n \geq 3$  natürlich Hamiltonsch ist, haben wir damit Satz 4.6 bewiesen. ||

Für eine erste Anwendung der Sätze 4.1 und 4.5 benötigen wir folgende Begriffe.

**Definition 4.5.** Es sei  $G$  ein Graph und  $p$  eine natürliche Zahl. Der Graph  $G$  heißt *p-partit*, wenn man  $E(G)$  in  $p$  paarweise disjunkte Eckenmengen  $E_1, E_2, \dots, E_p$  zerlegen kann, so daß  $G[E_i]$  für alle  $1 \leq i \leq p$  Nullgraphen sind. Wir nennen  $E_1, E_2, \dots, E_p$  eine *Partition* des  $p$ -partiten Graphen  $G$ . Damit hat ein  $p$ -partiter Graph keine Schlingen, und ein 1-partiter Graph ist ein Nullgraph.

Im Fall  $p = 2$  spricht man von einem *bipartiten Graphen*, und man nennt dann  $E_1, E_2$  auch eine *Bipartition*.

Ist ein  $p$ -partiter Graph  $G$  schlicht und gilt  $xy \in K(G)$  für alle  $x \in E_i$  und  $y \in E_j$  mit  $1 \leq i < j \leq p$ , so heißt  $G$  *vollständiger p-partiter Graph*, und wir schreiben dafür  $K_{r_1, r_2, \dots, r_p}$  mit  $r_i = |E_i|$ . Im Fall  $p = 2$  spricht man von einem *vollständigen bipartiten Graphen*.

**Satz 4.8.** Es sei  $G = K_{r_1, r_2, \dots, r_p}$  ein vollständiger  $p$ -partiter Graph mit  $p \geq 2$ ,  $n(G) \geq 3$  und  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ . Der Graph  $G$  ist genau dann Hamiltonsch, wenn  $\sum_{i=1}^{p-1} r_i \geq r_p$  gilt.

*Beweis.* Es sei  $E_1, E_2, \dots, E_p$  eine Partition von  $G$  mit  $|E_i| = r_i$  für  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Ist  $G$  Hamiltonsch, so ergibt sich aus Satz 4.1 mit  $S = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{p-1}$

$$r_p = |E_p| = \kappa(G - S) \leq |S| = \sum_{i=1}^{p-1} r_i.$$

Ist umgekehrt  $\sum_{i=1}^{p-1} r_i \geq r_p$ , so gilt  $n = n(G) \geq 2r_p$  und daher für  $x \in E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )

$$d(x, G) = n - r_i \geq n - r_p \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2},$$

also  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ . Damit ist  $G$  nach dem Satz von Dirac (Satz 4.5) Hamiltonsch. ||

Es gibt in der Literatur eine Fülle interessanter Verallgemeinerungen der Sätze von Dirac und Ore. Eine von diesen kann ebenfalls mit dem Lemma von Ore bewiesen werden.

**Satz 4.9 (Fan [1] 1984).** Es sei  $G$  ein schlichter und 2-fach eckenzusammenhängender Graph mit  $n = n(G) \geq 3$ . Gilt für alle Ecken  $a, b$  mit  $d_G(a, b) = 2$  die Bedingung

$$\max\{d(a, G), d(b, G)\} \geq \frac{1}{2}n(G),$$

so ist  $G$  Hamiltonsch.



*Beweis* (Tian [1] 1988). Es sei  $G$  ein Graph, der die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Zunächst werden wir zeigen, daß wir o.B.d.A. davon ausgehen dürfen, daß je zwei Ecken  $x$  und  $y$  von  $G$ , deren Grad mindestens  $n/2$  ist, durch eine Kante verbunden sind. Ist dies nämlich nicht der Fall, so können wir die Kante  $xy$  zu  $G$  hinzufügen. Der resultierende Graph erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes, und er ist nach dem Lemma von Ore genau dann Hamiltonsch, wenn  $G$  Hamiltonsch ist.

Als nächstes betrachten wir den Teilgraphen  $H$ , der von den Ecken induziert wird, die in  $G$  einen Grad kleiner als  $n/2$  besitzen. Da, falls  $H$  leer ist,  $G$  vollständig und somit auch Hamiltonsch ist, können wir  $H$  als nicht leer voraussetzen. Aufgrund der Gradbedingung des Satzes sind die Komponenten von  $H$  vollständig. Denn wäre eine Komponente von  $H$  nicht vollständig, so gäbe es in dieser Komponente zwei Ecken  $u$  und  $v$  vom Abstand 2 mit  $\max\{d(u, G), d(v, G)\} < n/2$ , was unserer Voraussetzung widerspricht. Wir werden nun zeigen, daß zu jeder Komponente  $J$  von  $H$  ein Weg  $P(J)$  in  $G$  existiert, dessen innere Ecken gerade die Ecken aus  $J$  sind. Ist nämlich  $J$  eine triviale Komponente, also  $|E(J)| = 1 = |\{x\}|$ , so existieren, da  $G$  2-fach eckenzusammenhängend ist, zwei Kanten  $xy_1$  und  $xy_2$  in  $G$ . In diesem Fall setzen wir  $P(J) = (y_1, x, y_2)$ . Ist aber  $J$  eine Komponente mit  $|E(J)| \geq 2$ , so folgt ebenfalls mittels des 2-fachen Eckenzusammenhangs von  $G$  die Existenz zweier nicht inzidenter Kanten  $x_1y_1, x_2y_2$  in  $G$  mit  $x_1, x_2 \in E(J)$  und  $y_1, y_2 \notin E(J)$ . Da  $J$  vollständig ist, können wir den gewünschten Weg durch  $P(J) = (y_1, x_1, w_1, \dots, w_r, x_2, y_2)$  definieren, wobei  $w_1, w_2, \dots, w_r$  die restlichen Ecken von  $J$  bezeichnen.

Es seien  $J_1, J_2, \dots, J_s$  die Komponenten von  $H$  und  $P(J_1), P(J_2), \dots, P(J_s)$  die zugehörigen Wege. Die Enden dieser Wege sind aufgrund der Gradbedingung des Satzes paarweise verschieden. Da  $G - E(H)$  vollständig ist, kann man die Wege  $P(J_1), P(J_2), \dots, P(J_s)$  zu einem Weg  $P_1$  zusammenfassen, der genau die Ecken dieser  $s$  Wege enthält. Die Enden  $u$  und  $v$  des Weges  $P_1$  gehören dann nicht zu  $H$ . Da  $G - E(H)$  vollständig ist, gibt es außerdem einen Hamiltonschen Weg  $P_2$  von  $u$  nach  $v$  in  $G - (E(P_1) - \{u, v\})$ . Demzufolge liefern die beiden Weg  $P_1$  und  $P_2$  zusammen einen Hamiltonkreis von  $G$ . ||

Erweiterungen dieses Resultats von Fan wurden 1987 durch Benhocine und Wojda [2] gegeben.

Die Gradbedingungen der Sätze von Dirac und Ore implizieren, daß die betrachteten Graphen 2-fach eckenzusammenhängend sind. Schränkt man die Betrachtung aber auf Graphen ein, die 1-tough oder sogar path-tough sind, so kann man die Gradbedingungen abschwächen. Wir wollen hier zwei solche Resultate ohne Beweis vorstellen.

**Satz 4.10 (Jung [2] 1978).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n(G) \geq 11$ . Ist  $G$  1-tough, und gilt für alle nicht adjazenten Ecken  $x, y$  die Ungleichung  $d(x, G) + d(y, G) \geq n(G) - 4$ , so ist  $G$  Hamiltonsch.

**Satz 4.11 (Dankelmann, Niessen, Schiermeyer [1] 1994).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph, der path-tough ist. Gilt  $\delta(G) \geq \frac{3}{6+\sqrt{3}}n(G)$  oder  $d(x, G) + d(y, G) \geq \frac{4}{5}(n(G) - 1)$  für alle nicht adjazenten Ecken  $x, y$ , so ist  $G$  Hamiltonsch.

Im Jahre 1960 hat Ghouila-Houri [1] den Satz von Dirac auf Digraphen erweitert. Wir beweisen hier den folgenden Spezialfall dieses Resultats (man vgl. Bondy und Murty [1], S. 178).

**Satz 4.12 (Ghouila-Houri [1] 1960).** Ist  $D$  ein schlichter Digraph mit

$$\min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\} \geq \frac{1}{2}n(D),$$

so ist  $D$  Hamiltonsch.

*Beweis.* Wir setzen  $n = n(D)$  und nehmen an, daß  $D$  keinen orientierten Hamiltonkreis besitzt. Ist  $C = (x_1, \dots, x_t, x_1)$  ein längster orientierter Kreis der Länge  $L(C) = t$  in  $D$ , so folgt aus Satz 1.24 und unseren Voraussetzungen  $t > n/2$ . Nun sei  $W = (y_1, y_2, \dots, y_{r+1})$  ein längster orientierter Weg in  $D - E(C)$  von  $a = y_1$  nach  $b = y_{r+1}$  der Länge  $L(W) = r$ . Dann gilt natürlich  $t + r + 1 \leq n$  und  $r < n/2$ . Setzen wir

$$A = \{i | (x_{i-1}, a) \in B(D)\} \quad \text{und} \quad B = \{i | (b, x_i) \in B(D)\}$$

(mit  $x_0 = x_t$ ), so sind die Mengen  $A$  und  $B$  disjunkt. Denn läge ein  $i$  in  $A$  und  $B$ , so wäre der orientierte Kreis

$$(x_{i-1}, a, y_2, \dots, y_r, b, x_i, x_{i+1}, \dots, x_t, x_1, \dots, x_{i-1})$$

länger als  $C$ , was unserer Annahme widerspricht.

Mit der Tatsache, daß  $W$  ein längster orientierter Weg in  $D - E(C)$  ist, erhält man  $N^-(a, D) \subseteq E(W) \cup E(C)$ . Wegen der Schlichtheit von  $D$  ergibt sich daraus  $d^-(a, D) \leq r + |A|$ . Zusammen mit  $d^-(a, D) \geq n/2$  folgt dann die Ungleichung

$$|A| \geq \frac{1}{2}n - r. \quad (4.1)$$

Mit analogen Argumenten zeigt man

$$|B| \geq \frac{1}{2}n - r. \quad (4.2)$$

Addiert man (4.1) und (4.2), so erhält man zusammen mit  $n \geq t + r + 1$  und  $A \cap B = \emptyset$

$$|A \cup B| = |A| + |B| \geq t - r + 1 \quad (4.3)$$

und damit auch  $r \geq 1$ . Da  $r < n/2$  gilt, zeigen uns (4.1) und (4.2), daß weder  $A$  noch  $B$  leer ist. Daher können wir zwei natürliche Zahlen  $i$  und  $j \geq 2$  mit  $i \in A$  und  $i + j \in B$  so wählen, daß

$$i + s \notin A \cup B \quad \text{für} \quad 1 \leq s < j \quad (4.4)$$

gilt, wobei die Additionen modulo  $t$  zu verstehen sind. Aus  $|A \cup B| \leq t - (j - 1)$ , (4.3) und (4.4) folgt  $j \leq r$ . Daher hat der orientierte Kreis

$$(x_{i+j}, x_{i+j+1}, \dots, x_{i-1}, a, y_2, \dots, y_r, b, x_{i+j})$$

die Länge  $t - j + r + 1 > L(C)$ , was nach der Wahl von  $C$  aber nicht möglich ist. ||

Weitere Ergebnisse über Hamiltonsche Diraphen findet man z.B. bei Chartrand und Lesniak [1], S. 201 – 206 oder in dem Übersichtsartikel von Bermond [1] aus dem Jahre 1978.

### 4.3 Panzyklische und Ecken-panzyklische Graphen

Ausgehend von dem Lemma von Ore entwickelten Bondy und Chvátal [1] 1976 das sogenannte Hüllenkonzept. Bevor wir die Hülle eines Graphen definieren können, benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

**Hilfssatz 4.1.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $r \in \mathbb{N}_0$ . Bildet man ausgehend vom Graphen  $G = G_1$  eine längstmögliche Folge von Graphen  $(G_i)_{i=1,2,\dots,p}$ , indem man beim Übergang von  $G_i$  zu  $G_{i+1}$  jeweils eine Kante  $k = xy$  hinzufügt, die zwei in  $G_i$  nicht adjazente Ecken  $x$  und  $y$  mit  $d(x, G_i) + d(y, G_i) \geq r$  verbindet, so ist  $G_p$  unabhängig von der konstruierten Folge.

*Beweis.* Wir gehen indirekt vor und nehmen dazu an, daß es zwei Folgen  $(G_i)_{i=1,2,\dots,p}$  und  $(H_i)_{i=1,2,\dots,q}$  mit  $G = G_1 = H_1$  und  $G_p \neq H_q$  gibt, die beide wie oben beschrieben erhalten wurden. Dann existiert o.B.d.A. eine Kante  $xy \in K(G_p) - K(H_q)$ . Diese Kante sei beim Übergang von  $G_j$  zu  $G_{j+1}$  hinzugefügt worden. Wählen wir die Kante  $xy$ , so daß  $j$  kleinstmöglich ist, so gilt  $d(x, H_q) + d(y, H_q) \geq d(x, G_j) + d(y, G_j) \geq r$ . Dies bedeutet aber einen Widerspruch, da nun die Kante  $xy$  noch zu  $H_q$  hinzugefügt werden könnte.  $\parallel$

**Definition 4.6.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $r \in \mathbb{N}_0$ . Unter der  $r$ -Hülle von  $G$  versteht man den Graphen  $G_p$  aus Hilfssatz 4.1. Wir bezeichnen ihn mit  $Cl_r(G)$ .

Durch wiederholte Anwendung des Lemmas von Ore erhalten wir

**Folgerung 4.1.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $n = n(G) \geq 3$ . Der Graph  $G$  ist genau dann Hamiltonsch, wenn  $Cl_n(G)$  Hamiltonsch ist. Insbesondere ist also  $G$  Hamiltonsch, falls  $Cl_n(G)$  vollständig ist.

**Definition 4.7.** Es sei  $G$  ein Graph der Ordnung  $n$ . Der Graph  $G$  heißt *panzyklisch*, wenn er Kreise aller Längen  $\ell$  mit  $3 \leq \ell \leq n$  besitzt. Eine Ecke  $v$  aus  $G$  heißt *panzyklisch*, wenn  $v$  auf Kreisen aller Längen  $\ell$  mit  $3 \leq \ell \leq n$  liegt. Ein Graph  $G$  heißt *Ecken-panzyklisch*, wenn jede Ecke von  $G$  panzyklisch ist.

**Satz 4.13 (Randerath, Schiermeyer, Tewes, Volkmann [1] 2002).** Sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 3$  und  $V = \{v \in E(G) | d(v, G) \geq n/2\}$ . Ist  $Cl_{n+1}(G)$  vollständig, so ist jede Ecke  $v \in V$  panzyklisch.

*Beweis.* Ist  $G$  der vollständige Graph  $K_n$ , so gibt es nichts zu beweisen. Daher sei im folgenden  $G$  nicht vollständig und damit  $n \geq 4$ . Da nach Voraussetzung  $Cl_{n+1}(G)$  vollständig ist, gilt  $\Delta(G) \geq (n+1)/2$ , womit die Eckenmenge  $V$  nicht leer ist. Sei nun  $v \in V$ . Für den Graphen  $G^* = G - v$  gilt  $n(G^*) = n-1 \geq 3$  und seine  $(n-1)$ -Hülle ist vollständig. Letzteres ergibt sich, da die in  $G^*$  eventuell nicht vorhandenen Kanten in derselben Reihenfolge hinzugefügt werden können wie bei der Bildung der  $(n+1)$ -Hülle von  $G$ . Folgerung 4.1 liefert die Existenz eines Hamiltonkreises  $C = x_0x_1 \cdots x_{n-2}x_0$  von  $G^*$ .

Es sei nun  $l \in \{3, 4, \dots, n\}$ . Für jedes  $j = 0, 1, \dots, n-2$  können wir einen Weg der Länge  $l-2$  durch  $P_j = x_jx_{j+1} \cdots x_{j+l-2}$  definieren, wobei alle Indizes modulo  $(n-1)$  zu verstehen sind. Ist nun  $v$  für ein  $j$  sowohl mit  $x_j$  als auch mit  $x_{j+l-2}$  adjazent, so ist  $vx_j \cdots x_{j+l-2}v$  ein Kreis der Länge  $l$  in  $G$ . Deshalb nehmen wir nun an, daß für ein  $l$  mit  $3 \leq l \leq n$  kein Kreis der Länge  $l$  in  $G$  existiert. Dann ist  $v$  für jedes  $j$  zumindest mit der Anfangsecke  $x_j$  von  $P_j$  oder mit der Endecke  $x_{j+l-2}$  nicht adjazent. Demzufolge gibt es also mindestens  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  Anfangsecken oder mindestens  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  Endecken dieser Wege, die nicht mit  $v$  adjazent sind. Daraus folgt  $d(v, G) \leq n-1 - \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , ein Widerspruch zu  $d(v, G) \geq n/2$ .  $\parallel$

**Folgerung 4.2 (Faudree, Favaron, Flandrin, Li [1] 1993).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 3$ . Ist  $Cl_{n+1}(G)$  vollständig, so ist  $G$  panzyklisch.

**Folgerung 4.3 (Randerath, Schiermeyer, Tewes, Volkmann [1] 2002).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 3$  und  $V = \{v \in E(G) | d(v, G) \geq n/2\}$ . Gilt für alle nicht

adjazenten Ecken  $x, y \in E(G)$  die Ungleichung  $d(x, G) + d(y, G) \geq n + 1$ , so ist jede Ecke  $v \in V$  panzyklisch.

**Folgerung 4.4 (Hendry [1] 1990).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 3$ . Ist  $\delta(G) \geq \frac{n+1}{2}$ , so ist  $G$  Ecken-panzyklisch.

**Definition 4.8.** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $n \geq 2$ . Der Graph  $G$  heißt *panconnected* oder *panzusammenhängend*, wenn für je zwei verschiedene Ecken  $u$  und  $v$  von  $G$  und jedes  $l \in \{d_G(u, v), d_G(u, v) + 1, \dots, n - 1\}$ , ein Weg der Länge  $l$  von  $u$  nach  $v$  in  $G$  existiert.

**Bemerkung 4.3.** Ist ein Graph  $G$  panconnected, so ist er auch Hamiltonsch. Denn ist  $uv$  eine Kante von  $G$ , so existiert ein Weg  $W_{uv}$  von  $u$  nach  $v$  der Länge  $n(G) - 1$  in  $G$ , womit  $W_{uv} + uv$  ein Hamiltonkreis von  $G$  ist.

Den nächsten Satzes beweisen wir analog zum Satz 4.13.

**Satz 4.14 (Williamson [1] 1977).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 4$ . Ist  $\delta(G) \geq \frac{n+2}{2}$ , so ist  $G$  panconnected.

*Beweis.* Ist  $n = 4$ , so ist  $G = K_4$ , und die Aussage ist richtig. Im Fall  $n \geq 5$  seien  $u$  und  $v$  zwei verschiedene Ecken aus  $G$ . Für den Graphen  $G' = G - \{u, v\}$  gilt dann nach Voraussetzung

$$\delta(G') \geq \delta(G) - 2 \geq \frac{n+2}{2} - 2 = \frac{n-2}{2} = \frac{|E(G')|}{2},$$

womit  $G'$  nach dem Satz von Dirac (Satz 4.5) Hamiltonsch ist.

Es sei  $C = x_0x_1 \cdots x_{n-3}x_0$  ein Hamiltonkreis von  $G'$ . Wir nehmen an, daß es in  $G$  keinen Weg der Länge  $l$  von  $u$  nach  $v$  für ein  $l \in \{d_G(u, v), d_G(u, v) + 1, \dots, n - 1\}$  gibt. Ist  $ux_i \in K(G)$  für ein  $0 \leq i \leq n - 3$ , so folgt daß  $vx_{i+l-2} \notin K(G)$ , wobei der Index  $i + l - 2$  modulo  $(n - 2)$  zu verstehen ist, denn sonst wäre  $ux_ix_{i+1} \cdots x_{i+l-2}v$  ein Weg der Länge  $l$  von  $u$  nach  $v$ . Daher existiert zu jeder Ecke des Kreises  $C$ , die adjazent zu  $u$  ist, eine Ecke des Kreises, die nicht zu  $v$  adjazent ist. Wegen  $d(u, G) \geq \frac{n+2}{2}$ , muß  $u$  zu mindestens  $\frac{n}{2}$  Ecken des Kreises  $C$  adjazent sein. Daraus ergibt sich nun der Widerspruch

$$d(v, G) \leq 1 + (n - 2) - \frac{n}{2} = \frac{n - 2}{2}.$$

Da  $u$  und  $v$  beliebig gewählt waren, ist der Satz bewiesen. ||

Das folgende Beispiel wird zeigen, daß die Bedingung  $\delta \geq \frac{n+2}{2}$  aus dem Satz 4.14 im allgemeinen nicht durch  $\delta \geq \frac{n+1}{2}$  ersetzt werden kann.

**Beispiel 4.4.** Es sei  $p \geq 3$  eine natürliche Zahl und  $n = 2p + 1$ . Der vollständige bipartite Graph  $K_{p,p+1}$  besitze die beiden Partitions Mengen  $E_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  sowie  $E_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{p+1}\}$ . Der Graph  $G$  bestehe nun aus dem  $K_{p,p+1}$  und den zusätzlichen Kanten  $y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{p-2}y_{p-1}$  sowie der Kante  $y_py_{p+1}$ . Nun gilt  $\delta(G) \geq \frac{n+1}{2}$  aber  $G$  ist nicht panconnected, denn es gibt zwischen  $y_p$  und  $y_{p+1}$  keinen Weg der Länge 3.

Im Jahre 1916 hat König [1] eine wichtige Charakterisierung der bipartiten Graphen gefunden.

**Satz 4.15 (König [1] 1916).** Ein Graph  $G$  ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge besitzt.

*Beweis.* Es sei  $G$  bipartit mit der Bipartition  $E_1, E_2$ . Angenommen, es existiert ein Kreis  $(a_1, k_1, a_2, \dots, a_{2p+1}k_{2p+1}, a_1)$  von ungerader Länge  $2p + 1$ . Gilt o.B.d.A.  $a_1 \in E_1$ , so folgt notwendig

$$a_2 \in E_2, a_3 \in E_1, \dots, a_{2p+1} \in E_1, a_1 \in E_2,$$

was ein offensichtlicher Widerspruch ist.

Nun besitze  $G$  keine Kreise ungerader Länge. Wir setzen o.B.d.A.  $G$  als zusammenhängend voraus, denn ein Graph ist genau dann bipartit, wenn seine Komponenten bipartit sind. Ist  $a \in E(G)$  eine fest gewählte Ecke, so setzen wir

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E(G) \mid d_G(a, x) \text{ ist gerade}\}, \\ B &= \{x \in E(G) \mid d_G(a, x) \text{ ist ungerade}\}. \end{aligned}$$

Im folgenden wird sich herausstellen, daß  $A, B$  eine Bipartition von  $G$  ist. Dabei ergeben sich die Eigenschaften  $A \cup B = E(G)$  und  $A \cap B = \emptyset$  sofort aus der Definition der Eckenmengen  $A$  und  $B$ . Zu zeigen bleibt, daß es keine Kante  $k \in K(G)$  gibt mit  $k = uv$ , wobei  $u, v \in A$  oder  $u, v \in B$  gilt. Wir nehmen einmal an, daß eine Kante  $k = uv$  existiert mit  $u, v \in A$ .

Im Fall  $u = v$  wäre  $k$  eine Schlinge, also ein Kreis der Länge 1, was nach Voraussetzung nicht möglich ist. Ist  $u \neq v$ , so seien  $P_{au}$  bzw.  $W_{av}$  zwei kürzeste Wege von  $a$  nach  $u$  bzw. von  $a$  nach  $v$  in  $G$ . Von  $a$  aus betrachtet sei  $y$  die letzte gemeinsame Ecke dieser beiden Wege. Die Teile des Weges  $P_{au}$ , die von  $a$  nach  $y$  bzw. von  $y$  nach  $u$  führen, bezeichnen wir mit  $P_{ay}$  bzw.  $P_{yu}$ . Entsprechend sei  $W_{av} = W_{ay} \cup W_{yv}$ . Da  $P_{au}$  und  $W_{av}$  kürzeste Wege sind, gilt  $L(P_{ay}) = L(W_{ay})$  und daher für die Gesamtlänge der Wege  $P_{au}$  und  $W_{av}$

$$L(P_{au}) + L(W_{av}) = 2L(P_{ay}) + L(P_{yu}) + L(W_{yv}).$$

Da nach Definition der Eckenmenge  $A$  die linke Seite dieser Gleichung eine gerade Zahl ist, muß  $L(P_{yu}) + L(W_{yv})$  notwendig gerade sein. Damit würden die beiden Wege  $P_{yu}$  und  $W_{yv}$  zusammen mit der Kante  $k$  einen Kreis ungerader Länge bilden, was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet. Der Fall  $u, v \in B$  wird völlig analog bewiesen. ||

**Folgerung 4.5.** Jeder Wald ist ein bipartiter Graph.

**Folgerung 4.6.** Ist  $G$  ein bipartiter, Hamiltonscher Graph mit der Bipartition  $A, B$ , so gilt  $|A| = |B|$ , womit  $|E(G)|$  notwendig gerade ist.

*Beweis.* Ist  $C = a_0a_1 \cdots a_p a_0$  ein Hamiltonkreis des Graphen  $G$  und o.B.d.A.  $a_0 \in A$ , so gilt  $a_1 \in B, a_2 \in A, \dots, a_p \in B$ . Daraus folgt unmittelbar  $|A| = |B|$ . ||

**Beispiel 4.5.** Mit Hilfe von Folgerung 4.6 können wir zeigen, daß der Satz 4.5 von Dirac bestmöglich ist. Denn im Fall  $n(G) = 2q + 1$  ist der vollständige bipartite Graph  $K_{q, q+1}$  nicht Hamiltonsch, und im Fall  $n(G) = 2q$  ist der vollständige bipartite Graph  $K_{q-1, q+1}$  nicht Hamiltonsch.

Für jede gerade natürliche Zahl  $n$  zeigt der vollständige bipartite Graph  $K_{n/2, n/2}$ , daß auch Satz 4.13 nicht ohne weiteres verbessert werden kann. Der  $K_{n/2, n/2}$  spielt auch in den folgenden interessanten Ergebnissen von Bondy [1] eine besondere Rolle. Zum Beweis dieser Resultate benutzen wir den folgenden Hilfssatz.

**Hilfssatz 4.2.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $4m(G) = (n(G))^2$ , so enthält  $G$  entweder einen Kreis ungerader Länge, oder  $G$  ist isomorph zum vollständigen bipartiten Graphen  $K_{n/2, n/2}$ , wobei  $n = n(G)$  ist.



*Beweis.* Besitzt  $G$  keinen Kreis ungerader Länge, so ist  $G$  nach Satz 4.15 bipartit. Ist  $E_1, E_2$  eine Bipartition von  $G$ , so gelte o.B.d.A.  $|E_1| = t \leq n/2$  und  $|E_2| = n - t$ . Da  $G$  schlicht ist, gilt  $m(G) \leq t(n - t)$ . Setzt man  $g(t) = t(n - t)$ , so erkennt man ohne Mühe, daß  $g(t)$  im Intervall  $[1, n/2]$  eine streng monoton wachsende Funktion ist, die im Punkt  $n/2$  ihr absolutes Maximum  $(n/2)^2$  besitzt. Daraus ergibt sich zunächst  $t = n/2$  und dann  $G \cong K_{n/2, n/2}$ .  $\parallel$

Der Beweis des nächsten Satzes folgt einer Idee von Carsten Thomassen, und er ist im wesentlichen dem Lehrbuch von Chartrand und Lesniak [1], S. 192 – 194 entnommen.

**Satz 4.16 (Bondy [1] 1971).** Es sei  $G$  ein schlichter, Hamiltonscher Graph der Ordnung  $n \geq 3$  und der Größe  $m$ . Ist  $4m \geq n^2$ , so ist  $G$  entweder panzyklisch, oder  $n$  ist gerade und  $G \cong K_{n/2, n/2}$ .

*Beweis.* 1. Schritt: Im ersten Schritt zeigen wir, daß  $n$  gerade ist und  $G \cong K_{n/2, n/2}$  gilt, falls  $n \geq 4$  und  $G$  keinen Kreis der Länge  $n - 1$  besitzt.

Es sei  $C = x_1x_2 \cdots x_nx_1$  ein Hamiltonkreis von  $G$  und  $x_j$  und  $x_{j+1}$  zwei aufeinanderfolgende Ecken von  $C$ , wobei alle Indizes modulo  $n$  zu verstehen sind. Analog zum Beweis vom Lemma von Ore zeigen wir nun

$$d(x_j, G) + d(x_{j+1}, G) \leq n. \quad (4.5)$$

O.B.d.A. sei  $j = n$  und  $j + 1 = 1$ , und wir nehmen an, daß  $d(x_1, G) + d(x_n, G) \geq n + 1$  gilt. Mit dieser Voraussetzung folgt, wie wir anschliessend nachweisen werden, die Existenz einer Zahl  $p \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$  mit  $x_1x_{p+2} \in K(G)$  und  $x_nx_p \in K(G)$ . Dann ist aber

$$x_1x_2 \cdots x_px_nx_{n-1} \cdots x_{p+2}x_1$$

ein Kreis der Länge  $n - 1$  in  $G$ , was unserer Voraussetzung im 1. Schritt widerspricht.

Um die Existenz dieser Zahl  $p$  nachzuweisen, setzen wir

$$\begin{aligned} A &= \{i \mid 1 \leq i \leq n - 2 \text{ mit } x_1x_{i+2} \in K(G)\}, \\ B &= \{i \mid 1 \leq i \leq n - 2 \text{ mit } x_nx_i \in K(G)\}. \end{aligned}$$

Es gilt  $|A| = d(x_1, G) - 1$  und  $|B| = d(x_n, G) - 1$ , also nach unserer Annahme  $|A| + |B| \geq n - 1$ . Wegen  $A, B \subseteq \{1, 2, \dots, n - 2\}$  ergibt sich daraus  $A \cap B \neq \emptyset$ , womit wir (4.5) vollständig bestätigt haben.

Sei nun  $n$  eine ungerade Zahl. Wegen (4.5) gibt es eine Ecke  $x_q$  mit  $d(x_q, G) \leq (n - 1)/2$ . Ist o.B.d.A.  $q = n$ , so folgt aus (4.5)

$$2m = d(x_n, G) + \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, G) \leq \frac{n-1}{2} + \frac{n(n-1)}{2} < \frac{n^2}{2},$$

was unserer Voraussetzung  $4m \geq n^2$  widerspricht. Daher ist  $n$  gerade, und es folgt wiederum aus (4.5)  $2m \leq \sum_{i=1}^n d(x_i, G) \leq n^2/2$  und insgesamt dann  $4m = n^2$ . Daher steht in (4.5) für jedes  $j$  das Gleichheitszeichen. Für  $i \neq j - 1, j$  ergibt sich nun

$$x_jx_i \in K(G) \iff x_{j+1}x_{i+2} \notin K(G). \quad (4.6)$$

Denn definiert man analog zu oben die beiden Mengen  $A$  und  $B$ , so folgt  $n = d(x_{j+1}, G) + d(x_j, G) = |A| + 1 + |B| + 1$ , also  $|A| + |B| = n - 2$ . Da  $G$  keinen Kreis der Länge  $n - 1$  besitzt, muß notwendig  $A \cap B = \emptyset$  und daher  $A \cup B \cup \{j - 1, j\} = \{1, 2, \dots, n\}$  gelten, womit für jedes  $j$  und jedes  $i \neq j - 1, j$  entweder  $i \in A$  oder  $i \in B$  gilt.

Sei nun  $G \not\cong K_{n/2, n/2}$ . Wegen  $4m = n^2$  folgt aus Hilfssatz 4.2, daß  $G$  einen Kreis ungerader Länge enthält. Dann besitzt  $G$  auch eine Kante  $x_j x_{j+2q}$  mit  $1 \leq q \leq (n-2)/2$ . Denn gäbe es nur Kanten zwischen geraden und ungeraden Indizes, so wäre  $E_1 = \{x_1, x_3, \dots, x_{n-1}\}$  und  $E_2 = \{x_2, x_4, \dots, x_n\}$  eine Bipartition von  $G$ , was nach dem Satz von König nicht möglich ist. Damit besitzt  $G$  den Kreis  $C_1 = x_j x_{j+1} \cdots x_{j+2q} x_j$  ungerader Länge  $2q+1$  mit nur einer Kante, nämlich  $x_j x_{j+2q}$ , die nicht zu  $C$  gehört. Nun sei  $C_1$  schon ein kürzester Kreis mit diesen Eigenschaften. Da  $G$  keinen Kreis der Länge  $n-1$  besitzt, gilt zusätzlich  $4 \leq 2q \leq n-4$ . Wegen  $x_j x_{j+2q} \in K(G)$  ergibt sich aus (4.6)  $x_{j-1} x_{j+2q-2} \notin K(G)$  und damit  $x_{j-2} x_{j+2q-4} \in K(G)$ . Dann ist aber auch  $C_2 = x_{j-2} x_{j-1} \cdots x_{j+2q-4} x_{j-2}$  ein Kreis ungerader Länge, der genau eine Kante besitzt die nicht zu  $C$  gehört mit  $L(C_2) = 2q-1 < 2q+1 = L(C_1)$ . Dieser Widerspruch liefert uns dann  $G \cong K_{n/2, n/2}$ .

2. Schritt: Im zweiten Schritt zeigen wir mittels Induktion nach  $n = n(G)$ , daß ein Hamiltonscher Graph  $G$  mit  $4m(G) \geq n^2$  entweder panzyklisch ist oder  $n$  gerade und  $G \cong K_{n/2, n/2}$  gilt. Für  $n = 3$  ist  $G \cong K_3$  und damit panzyklisch. Nach Induktionsvoraussetzung gilt nun für alle schlichten, Hamiltonschen Graphen  $H$  der Ordnung  $n-1 \geq 3$  mit mindestens  $(n-1)^2/4$  Kanten, daß sie entweder panzyklisch sind oder  $n-1$  gerade und  $H \cong K_{(n-1)/2, (n-1)/2}$  gilt. Nun zeigen wir unter der Voraussetzung, daß entweder (a)  $n$  gerade und  $G \not\cong K_{n/2, n/2}$  oder (b)  $n$  ungerade ist, daß  $G$  panzyklisch sein muß. Aus diesen Voraussetzungen ergibt sich zusammen mit dem ersten Teil des Beweises, daß  $G$  einen Kreis  $C^* = w_1 w_2 \cdots w_{n-1} w_1$  der Länge  $n-1$  enthält. Es sei  $w$  die Ecke von  $G$ , die nicht zu  $C^*$  gehört.

Ist  $d(w, G) \geq n/2$ , so gehört die Ecke  $w$  zu einem Kreis der Länge  $\ell$  für alle  $3 \leq \ell \leq n$ . Denn liegt  $w$  auf keinem Kreis der Länge  $p$  für ein  $p$  mit  $3 \leq p \leq n-1$ , so ergibt sich aus  $ww_i \in K(G)$  für  $1 \leq i \leq n-1$  sofort  $ww_j \notin K(G)$ , wenn  $j \equiv i+p-2 \pmod{(n-1)}$  gilt. Diese Überlegungen liefern den Widerspruch  $d(w, G) \leq (n-1)/2$  (man vgl. dazu auch den Beweis von Satz 4.13).

Ist  $d(w, G) < n/2$ , so ist  $G-w$  ein Hamiltonscher Graph der Ordnung  $n-1$  mit mindestens  $n^2/4 - (n-1)/2 > (n-1)^2/4$  Kanten, womit  $G-w \not\cong K_{(n-1)/2, (n-1)/2}$  gilt. Daher ist  $G-w$  nach Induktionsvoraussetzung panzyklisch, also auch  $G$  panzyklisch. ||

Unser nächstes Resultat zeigt, daß die Voraussetzungen im Satz von Ore mehr Informationen über die Kreisstruktur des Graphen liefern.

**Satz 4.17 (Bondy [1] 1971).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n = n(G) \geq 3$ , und gilt für je zwei nicht adjazente Ecken  $x, y$  die Ungleichung  $d(x, G) + d(y, G) \geq n$ , so ist  $G$  entweder panzyklisch, oder  $n$  ist gerade und  $G$  isomorph zum  $K_{n/2, n/2}$ .

*Beweis.* Aus Satz 4.6 folgt, daß  $G$  Hamiltonsch ist. Daher genügt es wegen Satz 4.16 die Abschätzung  $4m(G) \geq n^2$  nachzuweisen.

Ist der Minimalgrad  $\delta(G) = \delta \geq n/2$ , dann gilt natürlich  $4m(G) \geq n^2$ . Daher sei nun  $\delta < n/2$ .

Mit  $p$  bezeichnen wir die Anzahl der Ecken minimalen Grades von  $G$ . Dann induzieren diese  $p$  Ecken einen vollständigen Graphen  $H$ , denn gäbe es zwei nicht adjazente Ecken  $x$  und  $y$  vom Grad  $\delta$ , so erhielten wir den Widerspruch  $d(x, G) + d(y, G) = 2\delta < n$ . Damit folgt  $p \leq \delta + 1$ , und da  $G$  zusammenhängend ist, sogar  $p \leq \delta$ .

Ist  $u$  eine Ecke vom Grad  $\delta$ , so besitzt  $u$  wegen  $p \leq \delta$  einen Nachbarn von Grad größer oder gleich  $\delta + 1$ . Ist  $w \neq u$  eine der  $n - \delta - 1$  Ecken, die nicht adjazent zu  $u$  ist, so ergibt sich aus  $d(u, G) + d(w, G) \geq n$  für  $w$  die Abschätzung  $d(w, G) \geq n - \delta$ . Diese Überlegungen

liefern nun

$$\begin{aligned} 2m(G) &= \sum_{x \in E(G)} d(x, G) \geq \delta + 1 + \delta^2 + (n - \delta - 1)(n - \delta) \\ &= 2\delta^2 + (2 - 2n)\delta + (n^2 - n + 1) \geq \frac{n^2 + 1}{2}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus der Tatsache, daß der Ausdruck  $2\delta^2 + (2 - 2n)\delta + (n^2 - n + 1)$  für  $1 \leq \delta \leq (n - 1)/2$  sein Minimum bei  $\delta = (n - 1)/2$  besitzt.  $\parallel$

Weitere Resultate zur Hamiltontheorie findet man z.B. bei Broersma [1], Broersma, van den Heuvel und Veldman [1], Chartrand und Lesniak [2], Faudree, Gould, Jacobson und Lesniak [1], van den Heuvel [1] und Jackson [2].

## 4.4 Aufgaben

**Aufgabe 4.1.** Man gebe für das skizzierte Dodekaeder einen Hamiltonschen Kreis an.

**Aufgabe 4.2.** Man zeige, daß die Graphen aus Beispiel 4.3 nicht Hamiltonsch sind.

**Aufgabe 4.3.** Man zeige, daß die Graphen aus Beispiel 4.3 (b) 1-tough sind.

**Aufgabe 4.4.** Es sei  $G$  ein Graph der Ordnung  $n \geq 8$  mit  $\mu(G) = 6$ . Für die Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_8 \in E(G)$  gelte  $d(x_1, G) = 6$ ,  $d(x_2, G) = 4$  und  $d(x_i, G) = 3$  ( $i = 3, 4, \dots, 8$ ). Erfüllen die restlichen Ecken, also die Ecken  $x \in E(G) - \{x_1, x_2, \dots, x_8\}$ , die Bedingung  $d(x, G) \leq 2$ , so zeige man, daß  $G$  nicht Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 4.5.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n(G) = n \geq 6$  und der Größe  $m(G) \geq n + \frac{1}{4}n^2$  mit  $\delta(G) \geq \Delta(G) - 2$ . Man zeige, daß  $G$  Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 4.6.** Es sei  $q \geq 2$  eine ganze Zahl und  $G$  ein schlichter Graph mit  $\Delta(\overline{G}) \leq q - 1$ . Man zeige: Ist  $n(G) \geq 2q$ , so ist  $G$  Hamiltonsch, und es gilt  $4m(G) \geq (n(G))^2$ .

**Aufgabe 4.7.** Man bestimme alle nicht isomorphen, schlichten Graphen  $G$  mit  $m(G) = 19$ , die aus drei Komponenten  $G_1, G_2$  und  $G_3$  bestehen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- i)  $|\Gamma(G_1)| = 1$ .
- ii)  $\nu(G_2) = 2$ .
- iii)  $G_3$  ist Eulersch und Hamiltonsch mit  $\Delta(G_3) \geq 3$ .

**Aufgabe 4.8.** Es sei  $G$  ein schlichter 3-partiter Graph mit den Partitions Mengen  $E_1, E_2, E_3$ . Ist  $|E_1| = |E_2| = |E_3| = s \geq 2$ , und gilt für alle Paare  $x_i, y_i \in E_i$  ( $i = 1, 2, 3$  und  $x_i \neq y_i$ ) die Bedingung  $d(x_i, G) + d(y_i, G) \geq n(G) = 3s$ , so zeige man, daß  $G$  Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 4.9.** Es sei  $G$  ein schlichter dreiecksfreier Graph gerader Ordnung  $n \geq 4$ . Erfüllen zwei nicht adjazenten Ecken  $a, b \in E(G)$  mit  $a \neq b$  die Bedingung  $d(a, G) + d(b, G) \geq n - 1$ , so zeige man, daß  $G$  genau dann Hamiltonsch ist, wenn  $G + ab$  Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 4.10.** Man beweise die Sätze 4.3 und 4.4.

**Aufgabe 4.11.** Man zerlege den  $K_{2p+1}$  in  $p$  kantendisjunkte Hamiltonkreise.

**Aufgabe 4.12.** Ist  $G$  ein schlichter  $p$ -partiter Graph, so zeige man  $\delta(G) \leq \frac{p-1}{p}n(G)$ .



**Aufgabe 4.13.** Gibt es schlichte Hamiltonsche Graphen  $G$ , die die Bedingung  $\nu(G) = 2, 3, 4, 5, 6, 7$  erfüllen?

**Aufgabe 4.14.** Ein Graph  $G$  bestehe aus zwei Komponenten  $G_1$  und  $G_2$ . Dabei sei  $G_1$  vollständig und  $G_2$   $r$ -regulär und vollständig bipartit. Im Fall  $|K(G)| = 19$  gebe man alle nicht isomorphen Möglichkeiten für  $G$  an.

**Aufgabe 4.15.** Man bestimme alle nicht isomorphen, schlichten Graphen  $G$  ohne isolierte Ecken mit  $n(G) = 11$ , die aus drei Komponenten  $G_1, G_2$  und  $G_3$  bestehen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- i)  $G_1$  ist bipartit und besitzt genau einen Kreis.
- ii)  $G_2$  ist 3-regulär.
- iii)  $G_3$  ist ein Baum.

**Aufgabe 4.16.** Man bestimme alle nicht isomorphen Graphen  $G$  mit  $n(G) = 14$  und  $\mu(G) = 5$ , die aus drei Komponenten  $G_1, G_2$  und  $G_3$  bestehen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- i)  $G_1$  ist ein schlichter, Eulerscher Graph mit einer guten Ecke  $a$ .
- ii)  $G_2 \cong G_1 - a$  und  $\Delta(G_2) \geq 4$ .
- iii)  $G_3$  ist bipartit mit  $\delta(G_3) \geq 2$ .

**Aufgabe 4.17.** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung  $n$ . Ist der kürzeste Weg zwischen je zwei Ecken von  $G$  eindeutig bestimmt, so zeige man:

- a) Ist  $G$  bipartit, so ist  $G$  ein Baum.
- b) Ist  $\delta(G) \geq \frac{1}{2}n$ , so ist  $G$  vollständig.

**Aufgabe 4.18.** Es sei  $G$  ein schlichter und bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ . Ist  $|A| = |B| = n$ , und erfüllen die nicht adjazenten Ecken  $a \in A$  und  $b \in B$  die Bedingung  $d(a, G) + d(b, G) \geq n + 1$ , so zeige man, daß  $G$  genau dann Hamiltonsch ist, wenn  $G + ab$  Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 4.19.** Es sei  $G$  ein schlichter zusammenhängender Graph der Ordnung  $n \geq 3$ . Gilt für alle nicht adjazenten Ecken  $a, b \in E(G)$  mit  $a \neq b$  die Bedingung  $\max\{d(a, G), d(b, G)\} \geq (n - 1)/2$ , so zeige man, daß  $G$  semi-Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 4.20.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 5$ . Ist  $2m(G) \geq (n - 1)^2 - n/4$ , so zeige man, daß  $G$  Hamiltonsch ist.

# Kapitel 5

## Turniere und multipartite Turniere

### 5.1 Turniere

**Definition 5.1.** Eine beliebige Orientierung des vollständigen Graphen  $K_n$  mit  $n \geq 2$  heißt  $n$ -Turnier oder Turnier. Ein  $n$ -Turnier bezeichnen wir im allgemeinen mit  $T_n$  oder  $T$ .

**Satz 5.1 (Rédei [1] 1934).** Jedes Turnier  $T_n$  besitzt einen orientierten Hamiltonschen Weg.

*Beweis.* Wir geben einen konstruktiven Beweis, der uns gleichzeitig einen guten Algorithmus zur Bestimmung eines orientierten Hamiltonschen Weges liefert. Ist  $W = a_1a_2 \cdots a_p$  ein orientierter Weg in  $T_n = (E, B)$ , so heißt  $W$  gesättigt, wenn es für alle  $b \in E - E(W)$  weder einen Bogen  $(b, a_1)$  noch einen Bogen  $(a_p, b)$  in  $T_n$  gibt. Es ist leicht, sich einen gesättigten orientierten Weg  $W = a_1a_2 \cdots a_p$  in  $T_n$  zu beschaffen. Ist  $W$  kein orientierter Hamiltonscher Weg, so werden wir aus  $W$  einen gesättigten orientierten Weg  $W_1$  konstruieren, dessen Länge um eins größer ist, als die Länge von  $W$ .

Ist  $W$  kein orientierter Hamiltonscher Weg, so existiert eine Ecke  $b \in E - E(W)$ . Da wir  $W$  als gesättigt vorausgesetzt haben, und  $T_n$  ein Turnier ist, gilt  $(a_1, b) \in B$  und  $(b, a_p) \in B$ . Setzt man

$$j = \max_{1 \leq i < p} \{i \mid (a_i, b) \in B\},$$

so ist  $W_1 = a_1a_2 \cdots a_jba_{j+1} \cdots a_p$  ein gesättigter orientierter Weg der Länge  $L(W_1) = L(W) + 1$ , womit der Satz bewiesen ist. ||

Für  $n \geq 3$  gibt es eine Vielzahl nicht isomorpher  $n$ -Turniere, deren genaue Anzahl nur in Spezialfällen bekannt ist. Im Fall  $n = 3$  existieren genau zwei nicht isomorphe 3-Turniere, die besonders ausgezeichnet werden.

**Definition 5.2.** Es gibt genau die beiden skizzierten nicht isomorphen 3-Turniere.



Das I. Turnier heißt Dreieck oder zyklisches 3-Turnier, und das II. Turnier nennt man transitives 3-Turnier.

Ein Turnier  $T_n$  mit  $n \geq 3$  heißt transitiv, wenn jedes Unterturnier, das aus drei Ecken besteht, transitiv ist.

Im nächsten Satz stellen wir eine Reihe von Charakterisierungen der transitiven Turniere vor.

**Satz 5.2.** Ist  $T_n = (E, B)$  ein Turnier mit  $n \geq 3$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $T_n$  besitzt keinen orientierten Kreis.
- ii)  $T_n$  ist transitiv.
- iii) Es gilt  $d^+(x, T_n) \neq d^+(y, T_n)$  für zwei verschiedene Ecken  $x$  und  $y$  aus  $T_n$ .
- iv) Es gilt  $d^-(x, T_n) \neq d^-(y, T_n)$  für zwei verschiedene Ecken  $x$  und  $y$  aus  $T_n$ .
- v) Es gibt eine eindeutige Numerierung  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  der Ecken von  $T_n$  mit  $d^+(x_i, T_n) = i$  für  $0 \leq i \leq n-1$ .
- vi)  $T_n$  besitzt genau einen orientierten Hamiltonschen Weg.

*Beweis.* Aus i) folgt ii). Da  $T_n$  keinen orientierten Kreis besitzt, ist jedes 3-Unterturnier transitiv.

Aus ii) folgt iii). Es gelte o.B.d.A.  $(x, y) \in B$ , und es sei  $d^+(y, T_n) = p$ . Ist  $p = 0$ , so ist man fertig. Ist  $p > 0$  und  $N^+(y) = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ , so gilt wegen der Transitivität  $(x, a_i) \in B$  für alle  $i = 1, 2, \dots, p$  und damit

$$d^+(x, T_n) \geq p + 1 > p = d^+(y, T_n).$$

Wegen  $d^+(x, T_n) + d^-(x, T_n) = n - 1$  für alle  $x \in E$ , ist iii) äquivalent zu iv).

Aus iii) folgt v). Wegen  $0 \leq d^+(x, T_n) \leq n - 1$  für alle Ecken  $x$  und iii) muß man den  $n$  Ecken von  $T_n$  genau  $n$  paarweise verschiedene ganze Zahlen zwischen 0 und  $n - 1$  zuordnen. Dies ist aber nur auf die in v) angegebene Art möglich.

Aus v) folgt vi). Wegen  $d^+(x_{n-1}, T_n) = n - 1$  ergibt sich notwendig  $(x_{n-1}, x_i) \in B$  für alle  $i = 0, 1, \dots, n - 2$ . Wegen  $d^+(x_{n-2}, T_n) = n - 2$  ergibt sich dann notwendig  $(x_{n-2}, x_i) \in B$  für alle  $i = 0, 1, \dots, n - 3$  usw. Insgesamt erhalten wir dadurch  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  Bogen des Turniers, womit wir aber alle Bogen von  $T_n$  bestimmt haben. Dies bedeutet, daß  $(x_i, x_j)$  kein Bogen des Turniers ist, wenn  $i < j$  gilt. Somit ist  $W = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_0$  der einzige orientierte Hamiltonsche Weg von  $T_n$ .

Aus vi) folgt i). Ist  $W = a_n a_{n-1} \cdots a_1$  der eindeutige orientierte Hamiltonsche Weg, so zeigen wir, daß es keinen Bogen  $(a_i, a_j)$  mit  $i < j$  gibt.

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann wählen wir eine Ecke  $a_j$  mit dem größten Index, zu der ein Bogen von einer Ecke mit kleinerem Index führt. Zu diesem fest gewählten  $j$  wählen wir danach  $i < j$  minimal mit der Eigenschaft  $(a_i, a_j) \in B$ . Durch die Wahl von  $j$  und  $i$  folgt  $(a_{j+1}, a_{j-1}) \in B$ , falls  $j \neq n$  und  $(a_j, a_{i-1}) \in B$ , falls  $i \neq 1$ . Daraus ergibt sich ein von  $W$  verschiedener orientierter Hamiltonscher Weg, der sich aus den folgenden orientierten Wegen zusammensetzt:

$$a_n \cdots a_{j+1}, (a_{j+1}, a_{j-1}), a_{j-1} \cdots a_i, (a_i, a_j), (a_j, a_{i-1}), a_{i-1} \cdots a_1$$

Im Fall  $j = n$  fallen die ersten beiden und im Fall  $i = 1$  die letzten beiden orientierten Wege weg.

Gäbe es in  $T_n$  einen orientierten Kreis, so müßte aber notwendig ein Bogen  $(a_i, a_j)$  mit  $i < j$  in  $B$  existieren. ||

**Definition 5.3.** Es sei  $D$  ein Digraph, und es seien  $x, y$  zwei verschiedene Ecken aus  $D$ . Existiert in  $D$  der Bogen  $(x, y)$  aber nicht der Bogen  $(y, x)$ , so sagt man  $x$  dominiert  $y$ , in Zeichen  $x \rightarrow y$ . Sind  $D_1$  und  $D_2$  zwei disjunkte Teildigraphen (oder Eckenmengen) von  $D$ ,

und dominiert jede Ecke aus  $D_1$  jede Ecke aus  $D_2$ , so sagt man  $D_1$  *dominiert*  $D_2$ , in Zeichen  $D_1 \rightarrow D_2$ . Einen orientierten Kreis der Länge  $q$  nennen wir auch kurz  $q$ -Kreis.

**Satz 5.3 (Moon [2] 1966).** Ist  $T_n = (E, B)$  ein stark zusammenhängendes Turnier, so liegt jede Ecke von  $T_n$  auf einem  $r$ -Kreis für alle  $r$  mit  $3 \leq r \leq n$ .

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach  $r$ . Ist  $a \in E$ , so zeigen wir zunächst, daß  $a$  auf einem Dreikreis liegt.

Da  $T_n$  stark zusammenhängend ist, gilt  $N^+(a), N^-(a) \neq \emptyset$ . Darüber hinaus gibt es wegen des starken Zusammenhangs ein  $x \in N^+(a)$  und ein  $y \in N^-(a)$  mit  $(x, y) \in B$ . Damit ist aber  $C = axya$  ein Dreikreis durch die Ecke  $a$ .

Nun liege die Ecke  $a$  auf einem  $r$ -Kreis  $C = a_0a_1 \cdots a_r$  mit  $3 \leq r < n$  und  $a_0 = a_r = a$ . Wir werden zeigen, daß  $a$  auch auf einem  $(r + 1)$ -Kreis liegt. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

1. *Fall:* Es existiert eine Ecke  $b \in E - E(C)$  mit  $N^+(b) \cap E(C) \neq \emptyset$  und  $N^-(b) \cap E(C) \neq \emptyset$ . Gilt o.B.d.A.  $(a_0, b) \in B$ , so sei  $j$  der kleinste Index mit  $(b, a_j) \in B$ . Dann ist  $a_0a_1 \cdots a_{j-1}ba_j \cdots a_r$  ein orientierter Kreis der Länge  $r + 1$  durch die Ecke  $a$ .

2. *Fall:* Gibt es keine Ecke  $x \in E - E(C)$ , die die Bedingungen aus dem 1. Fall erfüllt, so zerfällt  $E - E(C)$  in zwei disjunkte Teilmengen  $S_1$  und  $S_2$  mit  $S_2 \rightarrow C \rightarrow S_1$ . Der starke Zusammenhang von  $D$  liefert  $S_1, S_2 \neq \emptyset$ , und es existiert ein Bogen  $(u, v)$  in  $T_n$  mit  $u \in S_1$  und  $v \in S_2$ . Dann ist aber  $a_0uva_2a_3 \cdots a_r$  ein orientierter Kreis der Länge  $r + 1$  durch die Ecke  $a$ . ||

**Definition 5.4.** Es sei  $D$  ein Digraph der Ordnung  $n$ .

Der Digraph  $D$  heißt *panzyklisch*, wenn er orientierte Kreise aller Längen  $\ell$  mit  $3 \leq \ell \leq n$  besitzt. Der Digraph  $D$  wird *Ecken-panzyklisch* genannt, wenn jede Ecke von  $D$  auf orientierten Kreisen aller Längen  $\ell$  mit  $3 \leq \ell \leq n$  liegt.

Ein Bogen von  $D$  heißt *panzyklisch*, wenn er auf Kreisen aller Längen  $\ell$  mit  $3 \leq \ell \leq n$  liegt. Der Digraph  $D$  wird *Bogen-panzyklisch* genannt, wenn jeder Bogen von  $D$  panzyklisch ist.

Gemäß dieser Definition besagt das Moon'sche Ergebnis, daß ein stark zusammenhängendes Turnier Ecken-panzyklisch ist. Als unmittelbare Folgerungen aus diesem fundamentalen Satz der Turniertheorie erhalten wir die nächsten beiden Resultate.

**Folgerung 5.1 (Camion [1] 1959).** Ein Turnier  $T_n$  ist genau dann stark zusammenhängend, wenn es Hamiltonsch ist.

**Folgerung 5.2 (Harary, Moser [1] 1966).** Jedes stark zusammenhängende Turnier ist panzyklisch.

**Satz 5.4 (Moon [2] 1966).** Es sei  $T_n$  ein stark zusammenhängendes Turnier und  $r$  eine ganze Zahl mit  $3 \leq r \leq n$ . Dann besitzt  $T_n$  mindestens  $n - r + 1$  orientierte Kreise der Länge  $r$ .

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage für ein festes  $r$  mittels vollständiger Induktion nach  $n$ .

Für  $r = n$  folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Satz 5.3 von Moon oder Folgerung 5.1, da  $T_n$  Hamiltonsch ist.

Sei nun  $3 \leq r < n$ . Nach Satz 5.3 besitzt  $T_n$  einen  $(n - 1)$ -Kreis  $C$ . Ist  $u$  diejenige Ecke von  $T_n$ , die nicht zu  $C$  gehört, so ist  $T_n - u$  wieder ein stark zusammenhängendes Turnier der Ordnung  $n - 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $T_n - u$  mindestens  $n - 1 - r + 1 =$

$n - r$  orientierte Kreise der Länge  $r$ . Da nun nach Satz 5.3 auch  $u$  auf einem  $r$ -Kreis liegt, der natürlich von allen orientierten Kreisen in  $T_n - u$  verschieden ist, besitzt  $T_n$  insgesamt mindestens  $n - r + 1$  orientierte Kreise der Länge  $r$ .  $\parallel$

**Definition 5.5.** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender Digraph. Eine Ecke  $x$  von  $D$  heißt *nicht-kritisch*, falls  $D - x$  auch stark zusammenhängend ist.

**Satz 5.5.** Jedes stark zusammenhängende Turnier  $T_n$  der Ordnung  $n \geq 4$  besitzt mindestens zwei nicht-kritische Ecken.

*Beweis.* Wegen Satz 5.3 gibt es in  $T_n$  einen orientierten Kreis  $C$  der Länge  $n - 1 \geq 3$ . Ist  $x_1$  diejenige Ecke von  $T_n$ , die nicht zu  $C$  gehört, so ist  $x_1$  eine nicht-kritische Ecke von  $T_n$ . Nach Satz 5.3 existiert auch durch  $x_1$  ein  $(n - 1)$ -Kreis  $C'$ . Ist  $x_2$  diejenige Ecke, die nicht zu  $C'$  gehört, so ist  $x_2$  eine zweite nicht-kritische Ecke von  $T_n$ .  $\parallel$

**Beispiel 5.1.** Es sei  $n \geq 4$  eine ganze Zahl. Die folgende Familie  $Q_n$  von stark zusammenhängenden Turnieren stammt von Moon [2]. Es sei  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  die Eckenmenge von  $Q_n$ , so daß  $x_n \rightarrow x_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_1$  und  $x_i \rightarrow x_j$  für  $1 \leq i < j \leq n$  und  $j \neq i + 1$ . Man überlegt sich leicht, daß  $Q_n$  genau  $n - r + 1$  orientierte Kreise der Länge  $r$  für  $3 \leq r \leq n$  besitzt. Außerdem sieht man, daß  $Q_n - x_i$  für  $2 \leq i \leq n - 1$  nicht mehr stark zusammenhängend ist, womit  $Q_n$  genau zwei nicht-kritische Ecken besitzt. Daher zeigt diese Familie von Turnieren, daß sowohl Satz 5.4 als auch Satz 5.5 bestmöglich ist.

**Satz 5.6 (Las Vergnas [2] 1975).** Ein stark zusammenhängendes Turnier  $T$  der Ordnung  $n \geq 4$ , das nicht isomorph zu  $Q_n$  aus Beispiel 5.1 ist, hat mindestens drei nicht-kritische Ecken.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $n$ , wobei für  $n = 4$  genau ein stark zusammenhängendes Turnier existiert, das isomorph zu  $Q_4$  ist. Nun sei  $n \geq 5$  und  $u_1$  eine nicht-kritische Ecke von  $T$ , die es nach Satz 5.5 tatsächlich gibt.

Ist  $T - u_1$  nicht isomorph zu  $Q_{n-1}$ , so hat  $T - u_1$  nach Induktionsvoraussetzung drei nicht-kritische Ecken  $u_2, u_3$  und  $u_4$ . Ist  $T - u_i$  stark zusammenhängend für alle  $i = 2, 3, 4$ , so ist die Behauptung bewiesen. Daher sei nun o.B.d.A.  $T - u_4$  nicht stark zusammenhängend. Wir werden zeigen, daß dann  $T - u_2$  und  $T - u_3$  stark zusammenhängend sind. Da  $T - \{u_1, u_4\}$  stark zusammenhängend ist, besitzt  $T - \{u_1, u_4\}$  einen orientierten Hamiltonkreis  $C_{1,4}$ . Da  $T - u_4$  nicht stark zusammenhängend ist, folgt  $u_1 \rightarrow C_{1,4}$  oder  $C_{1,4} \rightarrow u_1$ . Nehmen wir o.B.d.A.  $u_1 \rightarrow C_{1,4}$  an, so folgt  $u_4 \rightarrow u_1$  aus dem starken Zusammenhang von  $T$ . Sind  $C_{1,2}$  und  $C_{1,3}$  orientierte Hamiltonkreise von  $T - \{u_1, u_2\}$  und  $T - \{u_1, u_3\}$ , so erkennt man wegen  $u_4 \rightarrow u_1 \rightarrow u_3$  und  $u_4 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2$ , daß dann aber  $T - u_2$  und  $T - u_3$  stark zusammenhängend sind, womit  $T$  in diesem Fall drei nicht-kritische Ecken besitzt.

Ist  $T - u_1$  isomorph zu  $Q_{n-1}$ , so sei  $Q_{n-1}$  analog zum Beispiel 5.1 definiert. Es folgt, daß  $T - \{u_1, x_1\}$  und  $T - \{u_1, x_{n-1}\}$  stark zusammenhängend sind. Nun zeigen wir, daß  $T - x_1$  oder  $T - x_2$  stark zusammenhängend ist, falls  $T$  nicht isomorph zu  $Q_n$  ist. Ist  $T - x_1$  nicht stark zusammenhängend, so gilt  $\{x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2\} \rightarrow u_1 \rightarrow x_1$  oder  $x_1 \rightarrow u_1 \rightarrow \{x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2\}$ . Im ersten Fall ist  $T - x_2$  stark zusammenhängend, und im zweiten Fall ist  $T$  isomorph zu  $Q_n$ . Analog zeigt man, daß  $T - x_{n-1}$  oder  $T - x_{n-2}$  stark zusammenhängend ist, falls  $T$  nicht isomorph zu  $Q_n$  ist. Wegen  $n \geq 5$  haben wir auch in diesem Fall drei nicht-kritische Ecken gefunden haben, falls  $T$  nicht isomorph zu  $Q_n$  ist.  $\parallel$

Als Anwendung von Satz 5.6 konnte Las Vergnas [2] zeigen, daß die Familie  $Q_n$  aus Beispiel 5.1 die einzigen stark zusammenhängenden Turniere der Ordnung  $n$  sind, die genau  $n - r + 1$  orientierte Kreise der Länge  $r$  für  $4 \leq r \leq n - 1$  besitzen.

**Satz 5.7 (Las Vergnas [2] 1975).** Ein stark zusammenhängendes Turnier  $T$  der Ordnung  $n \geq 5$ , das nicht isomorph zu  $Q_n$  ist, hat mindestens  $n - r + 2$  orientierte Kreise der Länge  $r$  für alle  $r$  mit  $4 \leq r \leq n - 1$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $n$ , wobei für  $n = 5$  die Aussage unmittelbar aus Satz 5.6 folgt, da die drei nicht-kritischen Ecken drei verschiedene 4-Kreise liefern. Sei nun  $n \geq 6$ . Da  $T$  wiederum nach Satz 5.6  $n - (n - 1) + 2 = 3$  verschiedene  $(n - 1)$ -Kreise besitzt, beschäftigen wir uns nur noch mit den Fällen  $4 \leq r \leq n - 2$ .

Wir nehmen an, daß  $T$  weniger als  $n - r + 2$  und damit nach Satz 5.4 genau  $n - r + 1$  orientierte Kreise der Länge  $r$  enthält. Da  $T$  nicht isomorph zu  $Q_n$  ist, besitzt  $T$  nach Satz 5.6 drei nicht-kritische Ecken  $u, v$  und  $w$ . Ist  $T - x$  nicht isomorph zu  $Q_{n-1}$  für ein  $x \in \{u, v, w\}$ , so besitzt  $T - x$  nach Induktionsvoraussetzung  $n - 1 - r + 2 = n - r + 1$  verschiedene  $r$ -Kreise. Da es nach Satz 5.3 einen weiteren  $r$ -Kreis durch  $x$  gibt, hätte  $T$  dann im Widerspruch zur Annahme  $n - r + 2$  orientierte Kreise der Länge  $r$ . Nun seien  $T - u, T - v$  und  $T - w$  isomorph zu  $Q_{n-1}$ . Gibt es durch  $u, v$  oder  $w$  zwei  $r$ -Kreise, so gelangen wir auch zu einem Widerspruch zu unserer Annahme, da  $T - u, T - v$  und  $T - w$  schon  $n - r$  orientierte Kreise der Länge  $r$  enthalten. Daher nehmen wir im folgenden an, daß  $u, v$  und  $w$  auf einem einzigen  $r$ -Kreis liegen.

Nun sei  $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$  die Eckenmenge von  $T - u$ , so daß  $y_{n-1} \rightarrow y_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow y_1$  und  $y_i \rightarrow y_j$  für  $1 \leq i < j \leq n - 1$  und  $j \neq i + 1$ , und es sei  $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$  die Eckenmenge von  $T - v$ , so daß  $z_{n-1} \rightarrow z_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow z_1$  und  $z_i \rightarrow z_j$  für  $1 \leq i < j \leq n - 1$  und  $j \neq i + 1$ . Da sowohl alle Ecken aus  $\{y_2, y_3, \dots, y_{n-2}\}$  als auch alle Ecken aus  $\{z_2, z_3, \dots, z_{n-2}\}$  zu mindestens zwei  $r$ -Kreisen gehören, ergibt sich aus unserer letzten Annahme  $\{y_1, y_{n-1}\} = \{v, w\}$  und  $\{z_1, z_{n-1}\} = \{u, w\}$ . Es gelte o.B.d.A.  $y_{n-1} = w$  und  $y_1 = v$ . Aus  $d^+(w, T - u) = 1$  folgt  $d^+(w, T - v) \leq 2$  und daher wegen  $d^+(z_1, T - v) = n - 3 \geq 3$  dann  $z_{n-1} = w$  und damit  $z_1 = u$ . Weiter ergibt sich aus  $d^-(y_2, T - u) = 1$  die Abschätzung  $d^-(y_2, T - v) \leq 2$  und daher  $y_2 \in \{z_2, z_3\}$ .

Ist  $y_2 = z_3$ , so folgt  $z_3 \rightarrow v \rightarrow \{z_2, z_4, z_5, \dots, z_{n-1}\}$ . Im Widerspruch zu unserer Annahme gibt es nun die beiden  $r$ -Kreise  $v z_2 z_r z_{r-1} \dots z_3 v$  und  $v z_{r+1} z_r \dots z_3 v$  durch  $v$ .

Ist  $y_2 = z_2$ , so folgt  $z_2 \rightarrow v \rightarrow \{z_3, z_4, \dots, z_{n-1}\}$ . Nun unterscheiden wir die beiden Fälle  $z_1 \rightarrow v$  und  $v \rightarrow z_1$ . Im Fall  $z_1 \rightarrow v$  existieren die beiden  $r$ -Kreise  $v z_r z_{r-1} \dots z_2 v$  und  $v z_{r-1} z_{r-2} \dots z_1 v$  durch  $v$ , und im Fall  $v \rightarrow z_1$  existieren die beiden  $r$ -Kreise  $v z_1 z_{r-1} z_{r-2} \dots z_2 v$  und  $v z_r z_{r-1} \dots z_2 v$  durch  $v$ . In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, womit der Satz vollständig bewiesen ist.  $\parallel$

Die folgenden Beispiele zeigen, daß Satz 5.7 weder für  $r = 3$  noch für  $r = n$  richtig ist.

**Beispiel 5.2.** Dreht man für  $n \geq 5$  in  $Q_n$  den Bogen  $x_1 x_3$  um, so entsteht wieder ein stark zusammenhängendes Turnier mit einem einzigen orientierten Hamiltonkreis, das natürlich nicht isomorph zu  $Q_n$  ist.

Für  $n \geq 5$  sei  $R_n$  das Turnier mit der Eckenmenge  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , so daß  $R_n - x_n$  isomorph zu  $Q_{n-1}$  ist mit dem eindeutigen orientierten Hamiltonkreis  $x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_{n-1}$  und  $x_n \rightarrow x_{n-2}$  sowie  $\{x_{n-1}, x_{n-3}, x_{n-4}, \dots, x_1\} \rightarrow x_n$ . Nach Beispiel 5.1 besitzt  $R_n - x_n$  genau  $n - 3$  orientierte Kreise der Länge 3, und in  $R_n$  existiert genau ein weiterer 3-Kreis  $x_n x_{n-2} x_{n-3} x_n$  durch die Ecke  $x_n$ . Damit enthält  $R_n$  genau  $n - 2$  orientierte Kreise der Länge



3, aber  $R_n$  ist nicht isomorph zu  $Q_n$ , denn  $Q_n$  ist vom Durchmesser  $n - 1$  und  $R_n$  vom Durchmesser  $n - 2$ .

Im Jahre 1970 hat Douglas [1] alle Turniere mit genau einem orientierten Hamiltonkreis charakterisiert, und 1990 haben Burzio und Demaria [1] alle stark zusammenhängenden Turniere der Ordnung  $n$  mit genau  $n - 2$  orientierten Kreisen der Länge drei bestimmt.

**Satz 5.8.** Es sei  $T$  ein nicht stark zusammenhängendes Turnier. Dann können die starken Zusammenhangskomponenten von  $T$  so in eindeutiger Form  $D_1, D_2, \dots, D_q$  angeordnet werden, daß  $D_i \rightarrow D_j$  für alle  $j > i$  gilt.

*Beweis.* Sind  $A$  und  $B$  zwei starke Zusammenhangskomponenten von  $T$ , so gilt entweder  $A \rightarrow B$  oder  $B \rightarrow A$ . Daher ist nach Satz 1.27 der kondensierte Digraph  $T^*$  wieder ein Turnier ohne orientierte Kreise. Damit ist  $T^*$  nach Satz 5.2 ein transitives Turnier, das genau einen orientierten Hamiltonschen Weg besitzt. Dieser orientierte Hamiltonsche Weg liefert dann die gewünschte eindeutige Anordnung der starken Zusammenhangskomponenten von  $T$ . ||

**Satz 5.9 (Volkmann [14] 2002).** Ist  $T$  ein stark zusammenhängendes Turnier der Ordnung  $n$ , so liegt jeder Bogen von  $T$  auf einem orientierten Weg der Ordnung  $\lceil \frac{n+3}{2} \rceil$ .

*Beweis.* Ist  $uv$  ein beliebiger Bogen von  $T$ , so sei  $T' = T - \{u, v\}$ . Da  $T$  stark zusammenhängend ist, liegt  $uv$  nach Satz 1.25 auf einem orientierten Kreis, womit eine Ecke  $x \in E(T')$  existiert mit  $v \rightarrow x$ .

Ist das Turnier  $T'$  stark zusammenhängend, so ist  $T'$  nach dem Satz von Camion Hamiltonsch, und der Bogen  $uv$  gehört sogar zu einem orientierten Hamiltonschen Weg der Ordnung  $n \geq \lceil \frac{n+3}{2} \rceil$ .

Ist  $T'$  nicht stark zusammenhängend, so sei  $D_1, D_2, \dots, D_q$  die eindeutige Anordnung der starken Zusammenhangskomponenten von  $T'$  aus Satz 5.8. Weiter sei  $k \in \{1, 2, \dots, q\}$  der kleinste Index mit der Eigenschaft, daß  $D_k$  eine Ecke  $y$  mit  $v \rightarrow y$  enthält. Im folgenden sei  $A = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{k-1}$  und  $B = D_k \cup D_{k+1} \cup \dots \cup D_q$ . Da  $uv$  auf einem orientierten Kreis liegt gibt es eine Ecke  $w \in B$  mit  $w \rightarrow u$  ( $w = y$  ist möglich). Die Sätze 5.3 und 5.8 liefern nun einen orientierten Hamiltonschen Weg  $P$  in  $A \cup \{w\}$  mit der Endecke  $w$  und einen orientierten Hamiltonschen Weg  $Q$  in  $B$  mit der Anfangsecke  $y$ . Damit sind  $Puv$  und  $uvQ$  zwei orientierte Wege in  $T$  durch den Bogen  $uv$  mit  $|E(Puv)| + |E(uvQ)| = n + 3$ , woraus sich das gewünschte Ergebnis sofort ergibt. ||

**Beispiel 5.3.** Die folgende Familie  $U_n$  von stark zusammenhängenden Turnieren wird zeigen, daß Satz 5.9 bestmöglich ist. Es sei  $n = 2s + 3$  mit einer ganzen Zahl  $s \geq 1$ , und  $U_n$  bestehe aus der Eckenmenge  $\{u, v, w, x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_s\}$ , so daß die Eckenmenge  $\{w, x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_s\}$  ein transitives Turnier mit dem eindeutigen orientierten Hamiltonschen Weg  $x_1x_2 \dots x_s w y_1 y_2 \dots y_s$  induziert. Weiter gelte  $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$  und  $u \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_s\} \rightarrow v$ . Nun sind  $x_1x_2 \dots x_s w uv$  und  $uvw y_1 y_2 \dots y_s$  zwei längste orientierte Wege der Ordnung  $s + 3 = \frac{n+3}{2}$  durch den Bogen  $uv$ .

Für den Fall  $\delta(T) = \min\{\delta^+(T), \delta^-(T)\} \geq 2$  konnten Busch, Jacobson und Reid [1] im Jahre 2006 den Satz 5.9 verbessern.

**Definition 5.6.** Ist  $D$  ein Digraph mit der Eckenmenge  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , so heißt die Folge  $d^+(x_1, D), d^+(x_2, D), \dots, d^+(x_n, D)$  Außengradsequenz von  $D$ . Eine Folge  $s_1, s_2, \dots, s_n$  nicht

negativer ganzer Zahlen nennt man *Außengradsequenz*, wenn ein Digraph  $D$  existiert, der diese Folge als Außengradsequenz besitzt.

**Satz 5.10 (Landau [1] 1953).** Es sei  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq n-1$  eine Folge ganzer Zahlen. Es gibt genau dann ein Turnier  $T_n$  mit der Außengradsequenz  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , wenn

$$\sum_{i=1}^p s_i \geq \binom{p}{2} \quad (5.1)$$

für alle  $p = 1, 2, \dots, n$  ist und für  $p = n$  in (5.1) die Gleichheit gilt.

*Beweis* (Thomassen [4] 1981). Es sei  $T_n$  ein Turnier mit der Eckenmenge  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , so daß  $d^+(x_i, T_n) = s_i$  für  $1 \leq i \leq n$  gilt. Bezeichnen wir mit  $U_p$  das durch die Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_p$  induzierte Unterturnier von  $T_n$ , so ergibt sich aus dem Handschlaglemma

$$\sum_{i=1}^p s_i = \sum_{i=1}^p d^+(x_i, T_n) \geq \sum_{i=1}^p d^+(x_i, U_p) = m(U_p) = \binom{p}{2},$$

und für  $p = n$  gilt sogar das Gleichheitszeichen.

Für die Umkehrung nehmen wir an, daß eine Folge  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  existiert, die (5.1) erfüllt aber keine Außengradsequenz eines Turniers ist. Dann sei  $n$  die kleinste Zahl, für die eine solche Folge existiert. Unter allen diesen Gegenbeispielen wählen wir ein  $\mathbf{s}$  mit minimalem  $s_1$ .

1. *Fall:* Es gibt ein  $p \leq n-1$  mit  $\sum_{i=1}^p s_i = \binom{p}{2}$ . Im folgenden werden wir zeigen, daß dann auch die Folgen  $\mathbf{s}' = (s_1, s_2, \dots, s_p)$  und  $\mathbf{s}'' = (s_{p+1} - p, s_{p+2} - p, \dots, s_n - p)$  die Bedingung (5.1) erfüllen. Für die erste Folge ist das unmittelbar klar und für die zweite Folge ergibt sich aus den Voraussetzungen

$$s_{p+1} - p = \sum_{i=1}^{p+1} s_i - \sum_{i=1}^p s_i - p \geq \binom{p+1}{2} - \binom{p}{2} - p = 0$$

und für  $1 \leq r \leq n-p$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r (s_{p+i} - p) &= \sum_{i=1}^r s_{p+i} - rp = \sum_{j=p+1}^{p+r} s_j - rp \\ &= \sum_{i=1}^{p+r} s_i - \sum_{i=1}^p s_i - rp \geq \binom{p+r}{2} - \binom{p}{2} - rp = \binom{r}{2} \end{aligned}$$

mit Gleichheit für  $r = n-p$ . Wegen der Minimalität von  $n$  existiert also ein  $p$ -Turnier  $U$  mit der Außengradsequenz  $\mathbf{s}'$  und ein  $(n-p)$ -Turnier  $V$  mit der Außengradsequenz  $\mathbf{s}''$ . Betrachtet man nun das  $n$ -Turnier, das aus der disjunkten Vereinigung von  $U$  und  $V$  besteht, so daß  $V \rightarrow U$  gilt, so hat man im Widerspruch zur Annahme ein Turnier mit der Außengradsequenz  $\mathbf{s}$ .

2. *Fall:* Für alle  $1 \leq p \leq n-1$  gilt  $\sum_{i=1}^p s_i > \binom{p}{2}$ . Dann erfüllt aber auch die Folge  $\mathbf{s}''' = (s_1 - 1, s_2, s_3, \dots, s_{n-1}, s_n + 1)$  die Bedingung (5.1). Wegen der Wahl von  $s_1$  gibt es ein  $n$ -Turnier  $W$  mit der Außengradsequenz  $\mathbf{s}'''$ . Sind  $x_1$  und  $x_n$  die Ecken aus  $W$  mit  $d^+(x_1, W) = s_1 - 1$  und  $d^+(x_n, W) = s_n + 1$ , so gilt  $d^+(x_n, W) \geq d^+(x_1, W) + 2$ . Daher existiert eine Ecke  $y$  in  $W$  mit  $x_n \rightarrow y$  und  $y \rightarrow x_1$ . Ersetzt man in  $W$  die beiden Bogen  $(x_n, y)$  und  $(y, x_1)$  durch  $(y, x_n)$  und  $(x_1, y)$ , so erhält man ein Turnier mit der Außengradsequenz  $\mathbf{s}$ . Dieser Widerspruch beendet den Beweis des Satzes von Landau.  $\parallel$



Durch eine kleine Änderung der Voraussetzungen in Satz 5.10, erreicht man, daß die Außengradsequenz zu einem stark zusammenhängenden Turnier gehört.

**Satz 5.11 (Harary, Moser [1] 1966).** Es sei  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq n - 1$  eine Folge ganzer Zahlen. Es gibt genau dann ein stark zusammenhängendes Turnier  $T_n$  mit der Außengradsequenz  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , wenn

$$\sum_{i=1}^p s_i > \binom{p}{2} \quad (5.2)$$

für alle  $p = 1, 2, \dots, n - 1$  gilt und

$$\sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}. \quad (5.3)$$

*Beweis.* Es sei  $T_n$  ein stark zusammenhängendes Turnier mit  $E(T_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , so daß  $d^+(x_i, T_n) = s_i$  für  $1 \leq i \leq n$  gilt. Das Handschlaglemma liefert (5.3). Ist  $p < n$ , so sei  $U_p$  das durch die Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_p$  induzierte Unterturnier von  $T_n$ . Wegen des starken Zusammenhangs von  $T_n$  gibt es mindestens einen Bogen von  $E(U_p)$  nach  $E(T_n) - E(U_p)$ . Daraus folgt dann

$$\sum_{i=1}^p s_i = \sum_{i=1}^p d^+(x_i, T_n) > \sum_{i=1}^p d^+(x_i, U_p) = \binom{p}{2}.$$

Für die Umkehrung nehmen wir an, daß die ganzen Zahlen  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq n - 1$  die Bedingungen (5.2) und (5.3) erfüllen. Wegen Satz 5.10 gibt es ein Turnier  $T$  mit der Eckenmenge  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , so daß  $d^+(x_i, T) = s_i$  für  $1 \leq i \leq n$  gilt. Ist  $T$  nicht stark zusammenhängend, so gibt es nach Satz 5.8 eine starke Zusammenhangskomponente  $D_q$ , aus der kein Bogen herausführt. Ist  $D_q$  von der Ordnung  $r$ , so gilt wegen Satz 5.8 notwendig  $E(D_q) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ , und wir erhalten den folgenden Widerspruch zu (5.2):

$$\sum_{i=1}^r s_i = \sum_{i=1}^r d^+(x_i, T_n) = \sum_{i=1}^r d^+(x_i, D_q) = \binom{r}{2}. \quad \parallel$$

Analog zur Definition 1.19 wollen wir nun auch die Begriffe Abstand, Durchmesser und Radius für Digraphen definieren.

**Definition 5.7.** Ist  $D$  ein Digraph,  $a, b \in E(G)$  mit  $a \neq b$  und  $W_{ab}$  ein orientierter Weg kürzester Länge von  $a$  nach  $b$  in  $D$ , so definieren wir den *Abstand*  $d(a, b) = d_D(a, b)$  von  $a$  nach  $b$  durch die Länge  $L(W_{ab})$  dieses orientierten Weges. Im Fall  $a = b$  gilt  $d(a, b) = d(a, a) = 0$ . Existiert kein orientierter Weg von  $a$  nach  $b$ , so setzen wir  $d(a, b) = \infty$ . Die *Exzentrizität* einer Ecke  $a$  ist  $e(a) = \max_{x \in E(D)} d(a, x)$ . Weiter bezeichnen wir mit

$$\text{dm}(D) = \max_{x \in E(D)} e(x) \text{ bzw. } r(D) = \min_{x \in E(D)} e(x)$$

den *Durchmesser* bzw. den *Radius* von  $D$ . Das *Zentrum*  $Z(D)$  besteht aus allen Ecken  $x$  mit  $e(x) = r(D)$ .

**Satz 5.12 (Landau [1] 1953).** Es sei  $T$  ein Turnier. Ist  $w \in E(T)$  mit  $d^+(w) = \Delta^+(T)$ , so gilt  $d(w, y) \leq 2$  für alle Ecken  $y \in E(T)$ .

*Beweis.* Ist  $n(T) = 1$ , so gibt es nichts zu beweisen. Nun sei  $n(T) \geq 2$  und  $N^+(w, T) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ . Es gilt dann  $p \geq 1$ . Ist  $n = p + 1$ , so sind wir fertig. Andernfalls sei  $y$  eine beliebige Ecke aus  $E(T) - \{w, x_1, x_2, \dots, x_p\}$ . Gilt  $y \rightarrow \{w, x_1, x_2, \dots, x_p\}$ , so erhalten wir den Widerspruch  $d^+(y) \geq d^+(w) + 1 = \Delta^+(T) + 1$ . Daher existiert eine Ecke  $x_i$  mit  $x_i \rightarrow y$ , und es folgt  $d(w, y) = 2$ . ||

**Folgerung 5.3.** Ist  $T$  ein Turnier, so gilt  $r(T) \leq 2$ .

Für jeden Digraphen  $D$  gilt natürlich  $r(D) \leq \text{dm}(D)$ . Aber Satz 5.12 oder Folgerung 5.3 zeigen daß es Digraphen, z.B. transitive Turniere, mit endlichem Radius und unendlichem Durchmesser gibt. Das nächste Beispiel demonstriert, daß auch für stark zusammenhängende Turniere nicht mehr das Analogon zum Satz 1.18 gilt ( $\text{dm}(G) \leq 2r(G)$ ).

**Beispiel 5.4.** Es sei  $T'_n$  ein transitives Turnier mit  $n \geq 6$  und dem eindeutigen orientierten Hamiltonschen Weg  $x_1x_2 \cdots x_n$ . Ändern wir die Orientierung aller Bogen auf diesem orientierten Hamiltonschen Weg, so entsteht ein stark zusammenhängendes Turnier  $T_n$  mit dem orientierten Hamiltonschen Kreis  $x_nx_{n-1} \cdots x_1x_n$ . Es gilt  $\text{dm}(T_n) = d(x_n, x_1) = n - 1 \geq 5$ , aber nach Folgerung 5.3 ist  $r(T_n) \leq 2$ , sogar  $r(T_n) = 2$ .

**Satz 5.13 (Moon [1] 1962).** Ist  $T$  ein Turnier mit  $\delta^-(T) \geq 1$ , so ist  $r(T) = 2$ , und es gilt  $|Z(T)| \geq 3$ .

*Beweis.* Wegen  $\delta^-(T) \geq 1$  folgt  $n(T) \geq 3$ . Nun sei  $w \in E(T)$  mit  $d^+(w) = \Delta^+(T)$ ,  $v \in N^-(w)$  von maximalem Außengrad unter allen Ecken aus  $N^-(w)$  und  $u \in N^-(v)$  von maximalem Außengrad unter allen Ecken aus  $N^-(v)$ . Die Voraussetzung  $\delta^-(T) \geq 1$  liefert die Existenz der Ecken  $v$  und  $u$  und wegen Satz 5.12 gilt  $e(w) = 2$ . Im folgenden werden wir  $e(v) = e(u) = 2$  nachweisen.

Es sei  $x \in \{u, v\}$  und wir nehmen an, daß  $e(x) \geq 3$  gilt. Dann existiert eine Ecke  $y$  in  $T$  mit  $d(x, y) \geq 3$ . Daraus ergibt sich  $y \rightarrow x$  und  $y \rightarrow a$  für alle  $a \in N^+(x)$ . Das impliziert  $d^+(y) > d^+(x)$ .

Ist nun  $x = v$ , so folgt aus  $v \rightarrow w$  und  $d(v, y) \geq 3$  sofort  $y \rightarrow w$ . Die obige Beobachtung  $d^+(y) > d^+(v)$  liefert einen Widerspruch zur Wahl von  $v$ .

Ist  $x = u$ , so folgt aus  $u \rightarrow v$  und  $d(u, y) \geq 3$  sofort  $y \rightarrow v$ . Die Beobachtung  $d^+(y) > d^+(u)$  liefert einen Widerspruch zur Wahl von  $u$ . ||

**Bemerkung 5.1.** Den Ausgang eines Wettkampfes von  $n$  Teams, von denen jedes genau einmal gegen jedes andere gespielt hat und ein Unentschieden ausgeschlossen ist (z.B. bei einem Volleyballturnier), kann man durch ein Turnier  $T_n$  darstellen. Bei Sportturnieren, bei denen auch unentschiedene Spielausgänge möglich sind, kann man wie folgt vorgehen. Gewinnt Team  $x$  gegen Team  $y$ , so werden  $x$  und  $y$  durch zwei parallele Bogen von  $x$  nach  $y$  verbunden, und spielen  $x$  und  $y$  unentschieden, so notieren wir einen Bogen von  $x$  nach  $y$  und einen von  $y$  nach  $x$ . Diese Betrachtung führt auf natürliche Weise zu den sogenannten *Multiturnieren*  $T_n^p$ , bei denen je zwei Ecken durch genau  $p$  Bogen verbunden sind. Durch  $T_{18}^4$  wird z.B. die Fußballbundesliga repräsentiert. Resultate über Multiturniere findet man z.B. in den Arbeiten von Harborth und Kemnitz [1] sowie Kemnitz und Dolff [1].

**Definition 5.8.** Ein Digraph  $D$  heißt *r-regulär* oder auch nur *regulär*, wenn  $d^+(x, D) = d^-(x, D) = r$  für alle  $x \in E(D)$  gilt.

Im Zusammenhang mit regulären Turnieren wollen wir noch ein schönes Resultat von Alspach ohne Beweis notieren.

**Satz 5.14 (Alspach [1] 1967).** Ein reguläres Turnier ist Bogen-panzyklisch.

Für interessante Verallgemeinerungen von Satz 5.14 vgl. man die Artikel von Zhang [1] 1981, Tian, Wu und Zhang [1] 1982, Yao, Guo und Zhang [1] 2000 und Yeo [6] 2005. Weitere Resultate über Turniere findet der Leser im 17. Kapitel, in den Büchern von Moon [3] 1968 und Bang-Jensen und Gutin [2] 2009 sowie in den Übersichtsartikeln von Beineke und Wilson [2] 1975, Reid und Beineke [1] 1978, Bermond und Thomassen [1] 1981, Reid [3] 1996 sowie Bang-Jensen und Gutin [1] 1996.

## 5.2 Multipartite Turniere

**Definition 5.9.** Eine beliebige Orientierung eines vollständigen  $p$ -partiten Graphen nennt man *multipartites* oder  *$p$ -partites Turnier*. Ist  $E_1, E_2, \dots, E_p$  eine Partition des vollständigen  $p$ -partiten Graphen, so sprechen wir auch von einer *Partition* des multipartiten Turnieres. Ist  $p = 2$ , so wird im allgemeinen der Begriff *bipartites Turnier* benutzt.

Wir beginnen mit einer einfachen Folgerung aus dem Satz 5.1 von Rédei.

**Satz 5.15.** Jedes  $p$ -partite Turnier  $D$  besitzt einen orientierten Weg der Länge  $p - 1$ .

*Beweis.* Aus jeder Partitionsmenge  $E_i$  von  $D$  wähle man eine Ecke  $x_i$ . Dann ist der induzierte Teildigraph  $T = D[\{x_1, x_2, \dots, x_p\}]$  ein Turnier der Ordnung  $p$ . Nach Satz 5.1 besitzt  $T$  einen orientierten Hamiltonschen Weg der Länge  $p - 1$ , der natürlich auch ein orientierter Weg von  $D$  ist. ||

Im folgenden wollen wir uns vor allen Dingen mit der Kreisstruktur stark zusammenhängender multipartiter Turniere beschäftigen, die allerdings bei weitem nicht so vollständig bekannt ist, wie die der Turniere. Dabei stehen die  $p$ -partiten Turniere mit  $p \geq 3$  im Vordergrund. Zum Einüben der hier verwendeten Techniken, beginnen wir mit einem Ergebnis, das sich recht einfach beweisen läßt.

**Satz 5.16 (Goddard, Kubicki, Oellermann, Tian [1] 1991).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier, so liegt jede Ecke von  $D$  auf einem 3-Kreis oder 4-Kreis.

*Beweis.* Es sei  $E_1, E_2, \dots, E_p$  eine Partition von  $D$  und  $a$  eine beliebige Ecke von  $D$ . Es gelte o.B.d.A.  $a \in E_1$ . Nun wählen wir einen kürzesten orientierten Kreis  $C = a_1 a_2 \dots a_t a_1$  in  $D$  mit  $a_1 = a$ . Ist  $t = 3$ , so ist der Satz bewiesen. Daher sei nun  $t \geq 4$ . Da  $C$  ein kürzester orientierter Kreis durch  $a_1$  ist, sind  $a_1$  und  $a_3$  in  $D$  nicht adjazent, womit notwendig  $a_3 \in E_1$  gilt. Das bedeutet aber, daß  $a_4$  nicht zu  $E_1$  gehört, woraus sich sofort  $t = 4$  ergibt. ||

Zunächst beweisen wir zwei mehr strukturelle Aussagen, die wir im folgenden häufig anwenden werden.

**Hilfssatz 5.1 (Guo, Pinkernell, Volkmann [1] 1997).** Es sei  $C$  ein  $t$ -Kreis eines stark zusammenhängenden  $p$ -partiten Turnieres  $D$ . Existiert eine Ecke  $y \in E(D) - E(C)$  mit  $N^+(y) \cap E(C) = \emptyset$  (oder  $N^-(y) \cap E(C) = \emptyset$ ), so existiert ein  $(t + 1)$ - oder  $(t + 2)$ -Kreis  $C'$  mit  $E(C) \subseteq E(C')$ .

*Beweis.* Der  $t$ -Kreis  $C$  sei gegeben durch  $C = v_1 v_2 \dots v_t v_1$ . Da  $D$  stark zusammenhängend ist, existiert ein kürzester orientierter Weg  $P = y_1 y_2 \dots y_q$  von  $y = y_1$  nach  $C$ , und wegen der Voraussetzung  $N^+(y) \cap E(C) = \emptyset$  gilt  $q \geq 3$ . Es gelte o.B.d.A.  $y_q = v_3$ .

Gehören  $v_2$  und  $y_{q-2}$  zu verschiedenen Partitions Mengen, so ergibt sich aus der Wahl von  $P$  notwendig  $v_2 \rightarrow y_{q-2}$ . Dann liegen aber alle Ecken von  $C$  auf dem  $(t+2)$ -Kreis  $v_1v_2y_{q-2}y_{q-1}v_3 \cdots v_tv_1$ . Gehören  $v_2$  und  $y_{q-2}$  zur gleichen Partitions Menge, so liegen  $v_2$  und  $y_{q-1}$  sowie  $v_1$  und  $y_{q-2}$  in verschiedenen Partitions Mengen. Im Fall  $v_2 \rightarrow y_{q-1}$  gehören alle Ecken von  $C$  zu dem  $(t+1)$ -Kreis  $v_1v_2y_{q-1}v_3 \cdots v_tv_1$ , und im Fall  $y_{q-1} \rightarrow v_2$  liegen alle Ecken von  $C$  auf dem  $(t+2)$ -Kreis  $v_1y_{q-2}y_{q-1}v_2v_3 \cdots v_tv_1$ .

(Verwendet man im Fall  $N^-(y) \cap E(C) = \emptyset$  einen kürzesten orientierten Weg von  $C$  nach  $y$ , so verläuft der Beweis analog.) ||

**Hilfssatz 5.2 (Guo, Pinkernell, Volkmann [1] 1997).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ . Ist  $C$  ein  $t$ -Kreis von  $D$ , der Ecken aus höchstens  $p-1$  Partitions Mengen enthält, so existiert ein  $(t+1)$ - oder  $(t+2)$ -Kreis  $C'$  mit  $E(C) \subseteq E(C')$ .

*Beweis.* Es sei  $E_1, E_2, \dots, E_p$  eine Partition von  $D$  und  $C = v_1v_2 \cdots v_tv_1$ . Ist o.B.d.A.  $E(C) \cap E_p = \emptyset$ , so wählen wir eine Ecke  $y \in E_p$ . Wegen  $E(C) \cap E_p = \emptyset$  ist die Ecke  $y$  zu allen Ecken von  $C$  adjazent.

Im Fall  $E(C) \rightarrow y$  oder  $y \rightarrow E(C)$  folgt unser gewünschtes Resultat unmittelbar aus Hilfssatz 5.1. Im Fall  $N^+(y) \cap E(C) \neq \emptyset$  und  $N^-(y) \cap E(C) \neq \emptyset$  erkennt man analog zum 1. Fall im Beweis des Satzes 5.3 von Moon, daß eine Zahl  $j \in \{1, 2, \dots, t\}$  mit  $v_j \rightarrow y$  und  $y \rightarrow v_{j+1}$  existiert. Ist o.B.d.A.  $j = 1$ , so hat der  $(t+1)$ -Kreis  $v_1yv_2v_3 \cdots v_tv_1$  die gewünschten Eigenschaften. ||

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich auch sofort der Satz von Camion (Folgerung 5.1).

**Satz 5.17 (Guo, Pinkernell, Volkmann [1] 1997).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier, so liegt jede Ecke auf einem längsten orientierten Kreis.

*Beweis.* Es sei  $C = v_1v_2 \cdots v_tv_1$  ein längster orientierter Kreis von  $D$ . Ist  $C$  ein orientierter Hamiltonkreis, so gibt es nichts mehr zu beweisen. Daher sei nun  $b$  eine beliebige Ecke aus  $E(D) - E(C)$ . Da  $C$  ein längster orientierter Kreis ist, ergibt sich aus Hilfssatz 5.1 sofort  $N^+(b) \cap E(C) \neq \emptyset$  und  $N^-(b) \cap E(C) \neq \emptyset$ . Nun darf es keine Zahl  $j \in \{1, 2, \dots, t\}$  mit  $v_{j-1} \rightarrow b$  und  $b \rightarrow v_j$  geben, womit aber notwendig eine Zahl  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$  existiert mit  $v_{i-1} \rightarrow b$  und  $b \rightarrow v_{i+1}$ . Ist o.B.d.A.  $i = 2$ , so liegt die Ecke  $b$  auf dem  $t$ -Kreis  $v_1bv_3v_4 \cdots v_tv_1$ , womit Satz 5.17 vollständig bewiesen ist. ||

Nun stellen wir noch ein Analogon zum Satz 5.17 für längste orientierte Wege vor.

**Satz 5.18 (Volkmann [11] 1999).** Ist  $D$  ein multipartites Turnier, so liegt jede Ecke auf einem längsten orientierten Weg.

*Beweis.* Es sei  $W = v_1v_2 \cdots v_r$  ein längster orientierter Weg in  $D$ . Ist  $W$  ein orientierter Hamiltonscher Weg oder  $1 \leq r \leq 2$ , so gibt es nichts zu beweisen. In den verbleibenden Fällen sei  $w$  eine beliebige Ecke aus  $E(D) - E(W)$ . Da  $W$  ein längster orientierter Weg ist, gilt  $v_1 \rightarrow w$  oder  $v_1$  und  $w$  sind nicht adjazent. Sind  $v_1$  und  $w$  nicht adjazent, so sind  $v_2$  und  $w$  adjazent. Im Fall  $w \rightarrow v_2$ , gehört  $w$  zu dem längsten orientierten Weg  $wv_2v_3 \cdots v_r$ .

Ist  $r = 3$  und sind  $w$  und  $v_2$  adjazent, so liegt  $w$  auch auf einem orientierten Weg der Länge 2. Sind  $w$  und  $v_2$  nicht adjazent, so gilt notwendig  $v_1 \rightarrow w \rightarrow v_3$ , womit  $v_1wv_2$  ein längster orientierter Weg durch  $w$  ist.

Im Fall  $r \geq 4$  verbleiben die folgenden drei Fälle:  $v_1 \rightarrow w$  und  $v_2 \rightarrow w$ ;  $v_1 \rightarrow w$  und  $v_2$  und  $w$  sind nicht adjazent;  $v_1$  und  $w$  sind nicht adjazent und  $v_2 \rightarrow w$ .

In allen diesen Fällen setzen wir

$$s = \max_{1 \leq i \leq r-2} \{i \mid v_i \rightarrow w\}.$$

Wegen  $r \geq 4$  ist die Existenz von  $s$  gesichert. Sind  $v_{s+1}$  und  $w$  adjazent, so folgt aus der Definition von  $s$  sofort  $w \rightarrow v_{s+1}$ . Damit existiert der orientierte Weg  $v_1 v_2 \cdots v_s w v_{s+1} v_{s+2} \cdots v_r$  der Länge  $r$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher sind  $v_{s+1}$  und  $w$  nicht adjazent und somit gilt  $w \rightarrow v_{s+2}$ . Daraus ergibt sich schließlich, daß  $w$  zu dem längsten orientierten Weg  $v_1 v_2 \cdots v_s w v_{s+2} v_{s+3} \cdots v_r$  gehört.  $\parallel$

Das nächste Resultat, das sich leicht aus dem Beweis von Satz 5.17 ergibt, wurde ungefähr im Jahre 1981 von J. Ayel gefunden. Man vgl. dazu die Arbeit von Jackson [1], der dort dieses Ergebnis speziell für bipartite Turniere bewiesen hat.

**Satz 5.19 (Ayel 1981).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier. Ist  $C$  ein längster orientierter Kreis von  $D$ , und ist  $D - E(C) \neq \emptyset$ , so existiert in  $D - E(C)$  kein orientierter Kreis.

*Beweis.* Es sei  $C = v_1 v_2 \cdots v_t v_1$ . Angenommen, es gibt in  $D - E(C)$  einen orientierten Kreis  $b_1 b_2 \cdots b_k b_1$ . Wie im Beweis von Satz 5.17 existiert nun eine Zahl  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$  mit  $v_{i-1} \rightarrow b_1$  und  $b_1 \rightarrow v_{i+1}$ , wobei  $b_1$  und  $v_i$  zur gleichen Partitionsmenge gehören. Nun erkennt man ohne Mühe, daß die beiden möglichen Fälle  $b_2 \rightarrow v_i$  oder  $v_i \rightarrow b_2$  einen Widerspruch zu der Voraussetzung, daß  $C$  ein längster orientierter Kreis von  $D$  ist, erzeugen.  $\parallel$

**Satz 5.20 (Guo, Pinkernell, Volkmann [1] 1997).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ , so liegt jede Ecke von  $D$  auf einem  $t$ - oder  $(t+1)$ -Kreis für jedes  $t \in \{3, 4, \dots, p\}$ .

*Beweis.* Ist  $v$  eine beliebige Ecke aus  $D$ , so werden wir mit Hilfe eines Induktionsbeweises zeigen, daß für alle  $t \in \{3, 4, \dots, p\}$  die Ecke  $v$  auf einem  $t$ - oder  $(t+1)$ -Kreis liegt.

Da  $D$  stark zusammenhängend ist, ergibt sich für  $t = 3$  das gewünschte Resultat aus Satz 5.16.

Gehört  $v$  zu einem  $t$ - oder  $(t+1)$ -Kreis für  $3 \leq t < p$ , so müssen wir nachweisen, daß  $v$  auch auf einem  $(t+1)$ - oder  $(t+2)$ -Kreis liegt. Im Fall, daß  $v$  zu einem  $(t+1)$ -Kreis gehört, sind wir fertig. Daher sei  $v$  die Ecke eines  $t$ -Kreises. Wegen der Voraussetzung  $t < p$ , erkennt man zusammen mit Hilfssatz 5.2, daß  $v$  dann auch auf einem  $(t+1)$ - oder  $(t+2)$ -Kreis liegt.  $\parallel$

**Beispiel 5.5.** Das  $p$ -partite Turnier  $D$  bestehe aus den Partitions Mengen  $E_1, E_2, \dots, E_p$  mit  $p \geq 3$  und  $|E_1| = 1$ . Gilt weiter  $E_p \rightarrow E_1 \rightarrow E_i$  für  $2 \leq i \leq p-1$  und  $E_i \rightarrow E_j$  für  $2 \leq i < j \leq p$ , so ist  $D$  stark zusammenhängend, und  $D$  enthält keinen  $t$ -Kreis für  $t > p$ .

Dieses Beispiel von Bondy [2] zeigt uns, daß es stark zusammenhängende  $p$ -partite Turniere gibt (die keine Turniere sind), die einen längsten orientierten Kreis der Länge  $p$  besitzen, womit Satz 5.20 in diesem Sinne bestmöglich ist. Verlangt man aber, daß alle Partitions Mengen mindestens zwei Elemente enthalten, so existiert immer ein längerer Kreis. Dies zeigte bereits Bondy [2] 1976.

**Satz 5.21 (Bondy [2] 1976).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier. Enthält jede Partitions Menge von  $D$  mindestens zwei Ecken, so besitzt  $D$  einen orientierten Kreis der Länge  $r > p$ .



Gutin [2] gab 1984 diesem Resultat von Bondy die folgende mehr qualitative Form.

**Satz 5.22 (Gutin [2] 1984).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 5$ . Enthält jede Partitionsmenge von  $D$  mindestens zwei Ecken, so besitzt  $D$  einen  $(p+1)$ - oder  $(p+2)$ -Kreis.

Unser nächster Satz zeigt, daß die Aussage von Gutin sogar für jede Ecke eines solchen multipartiten Turnieres gilt.

**Satz 5.23 (Guo, Pinkernell, Volkmann [1] 1997).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 4$  und der Partition  $E_1, E_2, \dots, E_p$ . Ist  $|E_i| \geq 2$  für alle  $i = 1, 2, \dots, p$ , so gehört jede Ecke von  $D$  zu einem  $(p+1)$ - oder  $(p+2)$ -Kreis.

*Beweis.* Wegen Satz 5.20 liegt jede Ecke  $v$  von  $D$  auf einem  $p$ - oder  $(p+1)$ -Kreis. Da wir im Fall, daß  $v$  auf einem  $(p+1)$ -Kreis liegt, fertig sind, gehöre  $v$  nun zu einem  $p$ -Kreis  $C = v_1v_2 \cdots v_pv_1$  mit  $v = v_1$ . Nach Hilfssatz 5.2 genügt es den Fall zu diskutieren, daß der orientierte Kreis  $C$  genau eine Ecke aus jeder Partitionsmenge enthält. Es gelte o.B.d.A.  $v_i \in E_i$  für  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Existiert eine Ecke  $y \in E(D) - E(C)$  mit  $N^+(y) \cap E(C) = \emptyset$  oder  $N^-(y) \cap E(C) = \emptyset$ , so gehört  $v$  nach Hilfssatz 5.1 auch zu einem  $(p+1)$ - oder  $(p+2)$ -Kreis.

Daher gelte im folgenden  $N^+(x) \cap E(C) \neq \emptyset$  und  $N^-(x) \cap E(C) \neq \emptyset$  für alle  $x \in E(D) - E(C)$ . Gibt es eine Ecke  $w \in E(D) - E(C)$  mit  $v_{j-1} \rightarrow w$  und  $w \rightarrow v_j$  für ein  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ , so ist  $v$  ein Element des  $(p+1)$ -Kreises  $v_{j-1}wv_j \cdots v_{j-1}$ . Existiert keine solche Ecke  $w$ , dann überlegt man sich leicht, daß für jede Ecke  $b_i \in E_i - v_i$  notwendig  $v_{i-1} \rightarrow b_i \rightarrow v_{i+1}$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  gilt (hier und im folgenden wird natürlich modulo  $p$  gerechnet). Nun betrachten wir das  $p$ -partite Turnier  $D' = D[\{v_1, v_2, \dots, v_p, b_1, b_2, \dots, b_p\}]$ .

Gibt es ein  $j$  mit  $b_{j+1} \rightarrow b_j$ , so ist  $v$  eine Ecke des  $(p+2)$ -Kreises  $v_jb_{j+1}b_jv_{j+1} \cdots v_j$ . Daher verbleibt der Fall  $\{v_i, b_i\} \rightarrow \{v_{i+1}, b_{i+1}\}$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Gibt es eine Ecke  $a$  aus der Menge  $\{v_j, b_j\}$  mit  $a \in N^+(v_1, D') \cap N^-(b_1, D')$ , so ist  $j \geq 3$  und  $v_1ab_1v_2 \cdots v_{j-1}bv_{j+1} \cdots v_pv_1$  ist ein  $(p+2)$ -Kreis durch die Ecke  $v$ , wobei  $b \in \{v_j, b_j\}$  mit  $b \neq a$  gilt. Im Fall  $N^-(v_1, D') \cap N^+(b_1, D') \neq \emptyset$  finden wir analog einen  $(p+2)$ -Kreis durch  $v$ .

Zum Schluß des Beweises betrachten wir den verbleibenden Fall  $N^+(v_1, D') = N^+(b_1, D')$  und  $N^-(v_1, D') = N^-(b_1, D')$ . Da die beiden Turniere  $D_1 = D[\{v_1, v_2, \dots, v_p\}]$  und  $D_2 = D[\{b_1, b_2, \dots, b_p\}]$  stark zusammenhängend sind, liegt nach Satz 5.3 von Moon die Ecke  $v_1$  auf einem 3-Kreis  $v_1v_kv_\ell v_1$  in  $D_1$  und die Ecke  $b_1$  auf einem  $(p-1)$ -Kreis  $b_1b'_2b'_3 \cdots b'_{p-1}b_1$  in  $D_2$ . Nun ist aber  $v_1v_kv_\ell b_1b'_2b'_3 \cdots b'_{p-1}v_1$  ein  $(p+2)$ -Kreis durch die Ecke  $v$ . ||

**Beispiel 5.6.** Das 3-partite Turnier  $D$  mit der Partition  $E_1, E_2, E_3$  und  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1$  zeigt, daß die Bedingung  $p \geq 4$  im Satz 5.23 notwendig ist, denn  $D$  besitzt keinen 4-Kreis und keinen 5-Kreis. Unter der Voraussetzung  $|E_1|, |E_2|, |E_3| \geq 2$  existiert natürlich ein 6-Kreis. Überhaupt kann man für alle stark zusammenhängenden 3-partiten Turniere, die in jeder Partitionsmenge mindestens zwei Elemente enthalten, leicht zeigen, daß sie einen orientierten Kreis der Länge  $r > 3$  enthalten (man vgl. Aufgabe 5.14).

**Beispiel 5.7.** Sei  $E_1, E_2 \cup \{x\}, E_3, \dots, E_p$  die Partition eines  $p$ -partiten Turnieres  $D$  mit  $p \geq 3$ . Gilt weiter  $E_1 \rightarrow x, x \rightarrow E_i$  für  $3 \leq i \leq p$  und  $E_j \rightarrow E_i$  für  $1 \leq i < j \leq p$ , so ist  $D$  stark zusammenhängend ohne einen  $t$ -Kreis für  $t \geq p+2$ . Dieses Beispiel von Bondy [2] zeigt uns, daß Satz 5.23 in dem Sinne bestmöglich ist, daß wir die Partitions Mengen beliebig groß wählen können, aber die Länge eines längsten orientierten Kreises nicht die Zahl  $p+1$  übersteigt.

Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier, so haben wir uns vor allen Dingen mit der Existenz von  $t$ - oder  $(t+1)$ -Kreisen für  $t \in \{3, 4, \dots, p+1\}$  befaßt. Die Frage, welche Kreislängen wirklich existieren, blieb bisher ungeklärt. In diesem Zusammenhang bewies Bondy [2] im Jahre 1976 folgenden wichtigen Satz, der die Folgerung 5.2 von Harary und Moser als Spezialfall enthält.

**Satz 5.24 (Bondy [2] 1976).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ , so enthält  $D$  einen  $t$ -Kreis für jedes  $t \in \{3, 4, \dots, p\}$ .

Auch das nächste Resultat von Gutin [4] aus dem Jahre 1993, das sich mit einer speziellen Klasse von multipartiten Turnieren befaßt, zielt in diese Richtung und erweitert den Moon'schen Satz 5.3.

**Satz 5.25 (Gutin [4] 1993).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ . Besteht eine Partitionsmenge von  $D$  aus genau einer Ecke, so liegt diese Ecke auf einem  $t$ -Kreis für jedes  $t \in \{3, 4, \dots, p\}$ .

Das folgende wichtige und attraktive Resultat verallgemeinert die gerade genannten Ergebnisse von Bondy und Gutin und enthält damit auch Satz 5.3 von Moon.

**Satz 5.26 (Guo, Volkmann [2] 1994).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ , so besitzt jede Partitionsmenge von  $D$  mindestens eine Ecke, die auf einem  $t$ -Kreis für jedes  $t \in \{3, 4, \dots, p\}$  liegt.

*Beweis.* Es sei  $E_1, E_2, \dots, E_p$  eine Partition von  $D$ . O.B.d.A. zeigen wir, daß die Partitionsmenge  $E_1$  eine Ecke enthält, die auf einem  $t$ -Kreis für jedes  $t \in \{3, 4, \dots, p\}$  liegt. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Kreislänge  $t$ .

Zunächst zeigen wir, daß eine Ecke aus  $E_1$  auf einem Dreieck liegt. Sei  $v = v_1$  eine Ecke aus  $E_1$ ,  $C = v_1 v_2 \cdots v_r v_1$  ein kürzester orientierter Kreis von  $D$  durch  $v$ , und es gelte o.B.d.A.  $v_2 \in E_2$ . Ist  $r = 3$ , so sind wir fertig. Daher sei nun  $r \geq 4$ . Da  $C$  ein kürzester orientierter Kreis durch  $v_1$  ist, gilt analog zum Beweis von Satz 5.16  $v_3 \in E_1$  und  $r = 4$ .

Ist  $v_4 \notin E_2$ , so gilt  $(v_4, v_2) \in B(D)$ , und nun liegt die Ecke  $v_3 \in E_1$  auf einem Dreieck.

Im Fall  $v_4 \in E_2$  setzen wir  $S = E_3 \cup E_4 \cup \cdots \cup E_p$ . Existiert eine Ecke  $x \in S$  mit  $N^+(x) \cap E(C) \neq \emptyset$  und  $N^-(x) \cap E(C) \neq \emptyset$ , so sieht man leicht, daß mindestens eine Ecke aus  $\{v_1, v_3\}$  auf einem Dreieck liegt. Im anderen Fall kann  $S$  in zwei Teilmengen  $S_1$  und  $S_2$  zerlegt werden, so daß  $S_2 \rightarrow C \rightarrow S_1$  gilt. Ist o.B.d.A.  $S_1 \neq \emptyset$ , so existiert ein kürzester orientierter Weg  $Z = x_1 x_2 \cdots x_q$  von  $S_1$  nach  $C$  mit  $q \geq 3$ .

Ist  $E(Z) \cap S_2 = \emptyset$ , so gilt  $\{x_2, x_3\} \cap E_1 \neq \emptyset$ . Dann ist aber  $x_1 x_2 x_3 x_1$  ein Dreieck von  $D$ , und wir sind fertig. Im Fall  $E(Z) \cap S_2 \neq \emptyset$  gehört die Ecke  $x_{q-1}$  notwendig zu  $S_2$ . Ist  $x_{q-2} \notin E_1$ , so ist  $v_1 x_{q-2} x_{q-1} v_1$  ein Dreieck in  $D$ . Ist  $x_{q-2} \in E_1$ , so ist  $x_{q-2} x_{q-1} v_2 x_{q-2}$  ein Dreieck in  $D$ . Damit haben wir gezeigt, daß  $E_1$  eine Ecke enthält, die auf einem Dreieck liegt.

Nun sei  $u$  eine Ecke von  $E_1$ , die auf einem  $\ell$ -Kreis für jedes  $\ell$  mit  $3 \leq \ell \leq r < p$  liegt, und es sei  $C = u_1 u_2 \cdots u_r u_1$  ein  $r$ -Kreis mit  $u_1 = u$ . Wir werden zeigen, daß  $u$  zu einem  $(r+1)$ -Kreis gehört, oder  $E_1$  eine andere Ecke enthält, die auf einem  $\ell$ -Kreis für jedes  $\ell \in \{3, 4, \dots, r+1\}$  liegt.

Ist  $S = \{x | x \in E_i \text{ und } E_i \cap E(C) = \emptyset\}$ , so folgt aus  $r < p$  sofort  $S \neq \emptyset$ . Enthält  $S$  eine Ecke  $x$  mit  $N^+(x) \cap E(C) \neq \emptyset$  und  $N^-(x) \cap E(C) \neq \emptyset$ , so existiert ein  $(r+1)$ -Kreis durch die Ecke  $u$ .

Im anderen Fall kann  $S$  wieder in zwei Teilmengen  $S_1$  und  $S_2$  zerlegt werden mit  $S_2 \rightarrow$



$C \rightarrow S_1$ . Gilt o.B.d.A.  $S_1 \neq \emptyset$ , so existiert ein kürzester orientierter Weg  $W = y_1 y_2 \cdots y_q$  von  $S_1$  nach  $C$  mit  $q \geq 3$ .

Wir setzen zunächst  $E(W) \cap S_2 = \emptyset$  voraus. Dann gilt  $y_i \rightarrow y_1$  für alle  $i \geq 3$ . Wenn  $W$  mindestens eine Ecke von  $E_1$  enthält, so werden wir zeigen, daß  $y_s \in E(W) \cap E_1$  mit  $s = \min\{j | y_j \in E(W) \cap E_1\}$  auf einem  $\ell$ -Kreis für jedes  $\ell \in \{3, 4, \dots, r + (q - 1)\}$  liegt. Ist  $s = 2$  oder  $s = 3$ , so folgt aus  $y_i \rightarrow y_1$  für  $i \geq 3$  sofort, daß  $y_s$  auf einem  $\ell$ -Kreis für alle  $\ell \in \{3, 4, \dots, q\}$  liegt, der nur aus Ecken von  $W$  besteht. Aus  $C \rightarrow y_1$  ergibt sich weiter, daß  $y_s$  auch auf einem  $\ell$ -Kreis für jedes  $\ell \in \{q + 1, q + 2, \dots, r + (q - 1)\}$  liegt. Ist  $s \geq 4$ , so ergibt sich  $y_s \rightarrow y_i$  für  $i \leq s - 2$ . Aus den schon bekannten Tatsachen  $y_i \rightarrow y_1$  für  $i \geq 3$  und  $C \rightarrow y_1$  erhält man genauso, daß  $y_s$  auf einem  $\ell$ -Kreis für jedes  $\ell \in \{3, 4, \dots, r + (q - 1)\}$  liegt.

Ist nun  $E(W) \cap E_1 = \emptyset$ , so gilt  $u_1 \rightarrow y_i$  für alle  $i \leq q - 2$ , und wir können sogar  $u_1 \rightarrow y_{q-1}$  voraussetzen, denn anderenfalls wären wir im zuletzt diskutierten Fall. Ist  $y_q = u_k$  mit  $k \geq 2$ , so sehen wir für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq q - 1$ , daß  $u_1 y_{q-i} y_{q-i+1} \cdots y_q u_{k+1} \cdots u_1$  ein orientierter Kreis der Länge  $i + r - k + 2$  ist. Daher liegt  $u_1$  auf einem  $\ell$ -Kreis für  $r - k + 3 \leq \ell \leq r - k + q + 1$ . Darüber hinaus ist

$$u_1 u_2 \cdots u_j y_1 y_2 \cdots y_{q-1} u_k \cdots u_1$$

für jedes  $j$  mit  $1 \leq j \leq k - 1$  ein orientierter Kreis der Länge  $j + q + r - k$ , womit  $u_1$  auch auf einem  $\ell$ -Kreis mit  $q + r - k + 1 \leq \ell \leq q + r - 1$  liegt. Wegen  $r - k + 3 \leq r + 1 \leq r + q - 1$  liegt die Ecke  $u_1$  schließlich auf einem  $(r + 1)$ -Kreis, womit auch dieser Fall vollständig diskutiert ist.

Im letzten Fall gelte  $E(W) \cap S_2 \neq \emptyset$ . Aus  $S_2 \rightarrow C$  ergibt sich sofort  $E(W) \cap S_2 = \{y_{q-1}\}$ . Gehören  $u_1$  und  $y_{q-2}$  zu verschiedenen Partitions Mengen, so gilt  $u_1 \rightarrow y_{q-2}$ , und  $u_1 y_{q-2} y_{q-1} u_3 \cdots u_r u_1$  ist ein  $(r + 1)$ -Kreis durch  $u_1$ . Ist  $y_{q-2} \in E_1$ , so existiert der Bogen  $(u_2, y_{q-2})$  in  $D$ , womit  $u_1 u_2 y_{q-2} y_{q-1} u_4 \cdots u_r u_1$  (oder  $u_1 u_2 y_{q-2} y_{q-1} u_1$ , wenn  $r = 3$ ) ein gewünschter  $(r + 1)$ -Kreis ist. ||

Das nächste Resultat über orientierte Kreise durch Bogen stellt eine weitere Verallgemeinerung des Satzes 5.24 von Bondy dar.

**Satz 5.27 (Volkmann [27] 2007).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ , so besitzt  $D$  mindestens einen Bogen, der auf einem  $j$ -Kreis  $C_j$  für jedes  $j \in \{3, 4, \dots, p\}$  liegt, so daß zusätzlich noch  $E(C_3) \subset E(C_4) \subset \cdots \subset E(C_p)$  gilt.

*Beweis.* Im Beweis von Satz 5.26 haben wir gezeigt, daß  $D$  einen 3-Kreis besitzt.

Nun sei  $k$  ein Bogen, der auf  $r - 2$  orientierten Kreise  $C_3, C_4, \dots, C_r$  für ein  $r$  mit  $3 \leq r < p$  liegt, so daß  $E(C_3) \subset E(C_4) \subset \cdots \subset E(C_r)$  gilt mit  $|E(C_j)| = j$  für  $3 \leq j \leq r$ . Im folgenden werden wir zeigen, daß  $k$  oder ein anderer Bogen von  $D$  auf  $r - 1$  orientierten Kreise  $C'_3, C'_4, \dots, C'_{r+1}$  liegt, so daß  $E(C'_3) \subset E(C'_4) \subset \cdots \subset E(C'_{r+1})$  mit  $|E(C'_j)| = j$  für  $3 \leq j \leq r + 1$  gilt.

Es sei  $E_1, E_2, \dots, E_p$  eine Partition von  $D$  und  $C_r = u_1 u_2 \cdots u_r u_1$  mit  $k = u_1 u_2$ . Ist  $S = \{x | x \in E_i \text{ und } E_i \cap E(C) = \emptyset\}$ , so folgt aus der Voraussetzung  $r < p$  sofort  $S \neq \emptyset$ .

Enthält  $S$  eine Ecke  $w$  mit  $N^+(w) \cap E(C_r) \neq \emptyset$  und  $N^-(w) \cap E(C_r) \neq \emptyset$ , so existiert ein Index  $s$ , so daß  $u_s \rightarrow w \rightarrow u_{s+1}$  gilt. Dann erhalten wir durch  $u_1 u_2 \cdots u_s w u_{s+1} \cdots u_r u_1$  einen gewünschten  $(r + 1)$ -Kreis, mit Ausnahme des Falles, daß  $s = 1$  der einzige Index mit der Eigenschaft  $u_1 \rightarrow w \rightarrow u_2$  ist. In diesem Ausnahmefall existiert ein weiterer Index  $t \in \{2, 3, \dots, r\}$ , so daß  $w \rightarrow \{u_2, u_3, \dots, u_t\}$  und  $\{u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_r, u_1\} \rightarrow w$  gilt. Nun liegt aber der Bogen  $u_t u_{t+1}$  auf orientierten Kreisen der Längen  $3, 4, \dots, r, r + 1$  mit den gewünschten

Eigenschaften, denn  $u_t u_{t+1} \cdots u_{t+j} w u_t$  mit  $u_{r+1} = u_1$  sind orientierte Kreise der Längen  $3, 4, \dots, r+3-t$  durch  $u_t u_{t+1}$  für  $1 \leq j \leq r+1-t$  und  $u_{t-j} u_{t+1-j} \cdots u_t u_{t+1} \cdots u_r u_1 w u_{t-j}$  sind orientierte Kreise der Längen  $r+4-t, r+5-t, \dots, r+1$  durch  $u_t u_{t+1}$  für  $1 \leq j \leq t-2$ , falls  $t \geq 3$ .

Im anderen Fall kann  $S$  wieder in zwei Teilmengen  $S_1$  und  $S_2$  zerlegt werden mit  $S_2 \rightarrow C_r \rightarrow S_1$ . Gilt o.B.d.A.  $S_1 \neq \emptyset$ , so existiert ein kürzester orientierter Weg  $W = y_1 y_2 \cdots y_q$  von  $S_1$  nach  $C_r$  mit  $q \geq 3$ .

Wir setzen zunächst  $E(W) \cap S_2 = \emptyset$  voraus. Da  $W$  ein kürzester Weg ist, folgt  $y_i \rightarrow y_1$  für alle  $i \geq 3$ . Daher liegt der Bogen  $y_1 y_2$  auf  $j$ -Kreisen für  $3 \leq j \leq q$ . Da  $C_r \rightarrow S_1$  gilt, erkennen wir weiter, daß  $y_1 y_2$  auch zu  $j$ -Kreisen für  $q+1 \leq j \leq r+q-1$  gehört. Insgesamt haben wir gezeigt, daß der Bogen  $y_1 y_2$  auf  $j$ -Kreisen für  $j = 3, 4, \dots, r+q-1$  mit  $r+q-1 \geq r+2$  liegt, und diese  $r+q-3$  orientierten Kreise haben die gewünschten Eigenschaften.

Nun gelte  $E(W) \cap S_2 \neq \emptyset$ . Aus  $S_2 \rightarrow C_r$  folgt  $y_{q-1} \in S_2$ . O.B.d.A. nehmen wir an, daß  $u_r$  und  $y_{q-2}$  in verschiedenen Partitions Mengen liegen. Da  $W$  ein kürzester Weg von  $S_1$  nach  $C_r$  ist, ergibt sich  $u_r \rightarrow y_{q-2}$ . Damit sind aber  $u_r y_{q-2} y_{q-1} u_j u_{j+1} \cdots u_{r-1} u_r$  für  $2 \leq j \leq r$  orientierte Kreise der Längen  $3, 4, \dots, r, r+1$  durch den Bogen  $u_r u_{q-2}$  mit den gewünschten Eigenschaften, und der Beweis von Satz 5.27 ist erbracht.  $\parallel$

**Folgerung 5.4 (Volkmann [27] 2007).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ , so besitzt  $D$  mindestens einen Bogen, der auf einem  $j$ -Kreis für jedes  $j \in \{3, 4, \dots, p\}$  liegt.

**Folgerung 5.5 (Yeo [3] 1999).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier ( $p \geq 3$ ), so besitzt  $D$  einen panzyklischen Teildigraphen der Ordnung  $j$  für jedes  $j \in \{3, 4, \dots, p\}$ .

Schon das stark zusammenhängende Turnier  $T_4$  der Ordnung 4, zeigt, daß in einem stark zusammenhängenden Turnier nicht jeder Bogen panzyklisch ist. Aber Satz 5.27 liefert unmittelbar folgende Aussage.

**Folgerung 5.6 (Moon [4] 1994).** Jedes nicht triviale stark zusammenhängende Turnier besitzt einen panzyklischen Bogen.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß Moon [4] für jedes stark zusammenhängende Turnier sogar die Existenz von 3 panzyklischen Bogen nachgewiesen hat. Ist ein Turnier  $q$ -fach stark zusammenhängend mit  $q \geq 2$  (man vgl. Definition 14.4), so haben Havet [1] und Yeo [6] gezeigt, daß es noch mehr panzyklische Bogen gibt. Im nächsten Satz stellen wir das beste Ergebnis dieser Art ohne Beweis vor.

**Satz 5.28 (Yeo [6] 2005).** Jedes  $q$ -fach stark zusammenhängende Turnier der Ordnung  $n$  besitzt mindestens  $qn/2$  panzyklische Bogen, falls  $q \geq 2$  ist.

Ich vermute, daß Folgerung 5.4 sogar für drei Bogen richtig ist.

**Vermutung 5.1 (Volkmann [27] 2007).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ , so besitzt  $D$  mindestens drei Bogen, die auf einem  $j$ -Kreis für jedes  $j \in \{3, 4, \dots, p\}$  liegen.

Vermutung 5.1 wurde im Jahre 2011 durch Hongwei Li, Shengjia Li, Yubao Guo und Qiaoping Guo [1] gelöst.

Eine weitere schöne Verallgemeinerung des Moon'schen Satzes 5.3 bewiesen Goddard und Oellermann [1] 1991.

**Satz 5.29 (Goddard, Oellermann [1] 1991).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes

$p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$ . Ist  $s$  eine natürliche Zahl mit  $3 \leq s \leq p$ , so liegt jede Ecke von  $D$  auf einem orientierten Kreis, der durch genau  $s$  Partitions Mengen geht.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz mittels vollständiger Induktion nach  $s$ . Sei  $v$  eine beliebige Ecke aus  $D$  und  $C = v_1v_2 \cdots v_rv_1$  mit  $v = v_1$  ein kürzester orientierter Kreis durch  $v$ .

Liegen  $v_1$  und  $v_3$  in verschiedenen Partitions Mengen, so gilt entweder  $v_1 \rightarrow v_3$  oder  $v_3 \rightarrow v_1$ . Im ersten Fall ist  $v_1v_3 \cdots v_rv_1$  ein kürzerer orientierter Kreis durch  $v$ , was der Wahl von  $C$  widerspricht. Daher muß  $v_3 \rightarrow v_1$  gelten, und  $v_1v_2v_3v_1$  ist ein orientierter Kreis durch  $v$ , der durch genau 3 Partitions Mengen geht.

Liegen  $v_1$  und  $v_3$  in der gleichen Partitions Menge, so gilt entweder  $v_1 \rightarrow v_4$  oder  $v_4 \rightarrow v_1$ . Im ersten Fall ist  $v_1v_4 \cdots v_rv_1$  ein kürzerer orientierter Kreis durch  $v$ , was der Wahl von  $C$  widerspricht. Daher muß  $v_4 \rightarrow v_1$  gelten, und  $v_1v_2v_3v_4v_1$  ist ein orientierter Kreis durch  $v$ , der durch 2 oder 3 Partitions Mengen geht. Damit ist der Induktionsanfang erbracht.

Es sei nun  $C$  ein orientierter Kreis der  $v$  und Ecken aus genau  $s$  verschiedenen Partitions Mengen enthält mit  $2 \leq s \leq p - 1$ . Weiter sei  $S$  die Vereinigung der Partitions Mengen von  $D$ , von denen keine Ecke auf  $C$  liegt.

Gibt es in  $S$  eine Ecke  $u$  mit einem positiven und negativen Nachbarn in  $C$ , so existieren in  $C$  zwei aufeinanderfolgende Ecken  $x$  und  $y$  mit  $x \rightarrow y$  und  $x \rightarrow u \rightarrow y$ . Ersetzt man in  $C$  den Bogen  $xy$  durch die beiden Bogen  $xu$  und  $uy$ , so erhält man einem orientierten Kreis durch  $v$ , der genau  $s + 1$  Partitions Mengen enthält

Im verbleibenden Fall kann  $S$  wieder in zwei Teilmengen  $S_1$  und  $S_2$  mit  $S_2 \rightarrow C \rightarrow S_1$  zerlegt werden. Gilt o.B.d.A.  $S_1 \neq \emptyset$ , so existiert ein kürzester orientierter Weg  $W = a_1a_2 \cdots a_q$  von  $S_1$  nach  $C$ .

Ist  $E(W) \cap S_2 = \emptyset$ , so sei  $x$  der Vorgänger von  $a_q$  auf  $C$ . Aufgrund der Wahl von  $W$  gilt  $E(W) \cap S = \{a_1\}$ . Ersetzt man in  $C$  den Bogen  $xa_q$  durch den orientierten Weg  $xa_1a_2 \cdots a_q$ , so erhält man einen orientierten Kreis durch  $v$ , der genau  $s + 1$  Partitions Mengen enthält.

Nun gelte  $E(W) \cap S_2 \neq \emptyset$ . Aufgrund der Wahl von  $W$  gilt  $a_{q-1} \in S_2$ , und außer  $a_1$  und  $a_{q-1}$  enthält  $W$  keine weiteren Ecken aus  $S$ .

Ist  $q \geq 4$ , so existiert wegen der Wahl von  $W$  eine Ecke  $x$  in  $C$  mit  $x \rightarrow a_{q-2}$ . Es sei  $y$  der Nachfolger von  $x$  auf  $C$ . Ersetzt man in  $C$  den Bogen  $xy$  durch den orientierten Weg  $xa_{q-2}a_{q-1}y$ , so erhält man einem orientierten Kreis durch  $v$ , der genau  $s + 1$  Partitions Mengen enthält.

Es verbleibt der Fall  $W = a_1a_2a_3$ . Wählt man einen orientierten Teilweg  $P = vv_2 \cdots v_t$  von  $C$ , der Ecken aus genau  $s - 1$  Partitions Mengen besitzt, so ist  $vv_2 \cdots v_t a_1 a_2 v$  ein orientierter Kreis durch  $v$ , der genau  $s + 1$  Partitions Mengen enthält. ||

Als Anwendung der vorangegangenen Resultate, wollen wir eine Erweiterung von Satz 5.4 beweisen.

**Satz 5.30 (Volkmann [13] 2002).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 3$  und  $m$  eine ganze Zahl mit  $3 \leq m \leq p$ . Dann besitzt  $D$  mindestens  $p - m + 1$  orientierte Kreise der Länge  $m$ .

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage für ein festes  $m$  mittels vollständiger Induktion nach  $p$ .

Für  $m = p$  folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 5.24 oder Satz 5.26. Sei nun  $3 \leq m < p$ . Nach Satz 5.29 besitzt  $D$  einen orientierten Kreis  $C$ , der durch genau  $p - 1$  Partitions Mengen geht. Ist  $H = D[E(C)]$  der von  $E(C)$  induzierte Teildigraph, so ist  $H$  ein stark zusammenhängendes  $(p - 1)$ -partites Turnier. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $H$  mindestens  $p - 1 - m + 1 = p - m$  orientierte Kreise der Länge  $m$ . Es sei  $E_1$  diejenige

Partitionsmenge von  $D$  mit  $E_1 \cap E(C) = \emptyset$ . Nun existiert aber nach Satz 5.26 ein  $m$ -Kreis  $C'$  in  $D$  mit  $E(C') \cap E_1 \neq \emptyset$ , der natürlich von allen  $m$ -Kreisen in  $H$  verschieden ist. Damit besitzt  $D$  insgesamt mindestens  $p - m + 1$  orientierte Kreise der Länge  $m$ .  $\parallel$

**Satz 5.31 (Gutin [3] 1988).** Es sei  $W$  ein orientierter Weg und  $C$  ein orientierter Kreis in einem multipartiten Turnier  $D$ . Ist  $E(W) \cap E(C) = \emptyset$ , so existiert in  $D$  ein orientierter Weg  $P$  mit  $E(P) = E(W) \cup E(C)$ .

*Beweis.* Wir nehmen o.B.d.A. an, daß  $E(D) = E(W) \cup E(C)$  gilt. Es seien  $W = x_1x_2 \cdots x_q$  und  $C = y_1y_2 \cdots y_r y_1$ . Ist  $N^-(x_1, D) \cap E(C) \neq \emptyset$  oder  $N^+(x_q, D) \cap E(C) \neq \emptyset$ , so folgt die Existenz von  $P$  unmittelbar. Gibt es Indizes  $1 \leq i \leq q - 1$  und  $1 \leq j \leq r$ , so daß  $y_j \rightarrow x_{i+1}$  und  $x_i \rightarrow y_{j+1}$ , so ist

$$P = x_1x_2 \cdots x_i y_{j+1} y_{j+2} \cdots y_j x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_q$$

ein orientierter Weg mit  $E(P) = E(W) \cup E(C)$  (wobei die Indizes der Ecken von  $C$  immer modulo  $r$  zu verstehen sind). Im folgenden nehmen wir an, daß  $N^-(x_1, D) \cap E(C) = N^+(x_q, D) \cap E(C) = \emptyset$  gilt, und daß es solche Indizes wie oben nicht gibt.

Als nächstes zeigen wir, daß es Indizes  $1 \leq i \leq q - 1$  und  $1 \leq j \leq r$  mit  $y_j \rightarrow x_{i+1}$  und  $y_{j+1} \rightarrow x_i$  gibt.

Wegen  $N^+(x_q) \cap E(C) = \emptyset$  gibt es ein  $1 \leq s \leq r$  mit  $y_s \rightarrow x_q$ , und die Voraussetzung  $N^-(x_1) \cap E(C) = \emptyset$  liefert  $q \geq 2$ . Da  $x_{q-1} \rightarrow y_{s+1}$  ausgeschlossen wurde, gilt  $y_{s+1} \rightarrow x_{q-1}$  oder  $y_{s+1}$  und  $x_{q-1}$  sind nicht adjazent. Im ersten Fall hätten wir mit  $j = s$  und  $i = q - 1$  zwei gewünschte Indizes. Im verbleibenden Fall, daß die Ecken  $x_{q-1}$  und  $y_{s+1}$  nicht adjazent sind, müssen aber  $x_q$  und  $y_{s+1}$  sowie  $x_{q-1}$  und  $y_{s+2}$  adjazent sein. Wegen  $y_{s+1} \rightarrow x_q$  ergibt sich  $y_{s+2} \rightarrow x_{q-1}$ . Mit  $j = s + 1$  und  $i = q - 1$  haben wir auch in diesem Fall zwei gewünschte Indizes gefunden.

Es sei nun  $i$  minimal gewählt, so daß  $y_j \rightarrow x_{i+1}$  und  $y_{j+1} \rightarrow x_i$  für  $1 \leq i \leq q - 1$  und  $1 \leq j \leq r$  gilt. Es folgt  $i > 1$  und  $x_{i-1}$  und  $y_{j+2}$  sind nicht adjazent. Daher müssen aber  $x_i$  und  $y_{j+2}$  sowie  $x_{i-1}$  und  $y_{j+3}$  adjazent sein. Im Fall  $y_{j+2} \rightarrow x_i$  folgt aus der Minimalität von  $i$  notwendig  $x_{i-1} \rightarrow y_{j+3}$ , was nach Voraussetzung auch nicht möglich ist. Es verbleibt der Fall  $x_i \rightarrow y_{j+2}$ .

Ist  $i = 2$ , so folgt  $x_1 = x_{i-1} \rightarrow y_{j+1}$ . Ist  $i \geq 3$ , so sind  $x_{i-2}$  und  $y_{j+2}$  sowie  $x_{i-1}$  und  $y_{j+1}$  adjazent. Im Fall  $y_{j+1} \rightarrow x_{i-1}$  folgt aus der Minimalität von  $i$  notwendig  $x_{i-2} \rightarrow y_{j+2}$ , was nach Voraussetzung nicht möglich ist. Es verbleibt der Fall  $x_{i-1} \rightarrow y_{j+1}$ . Damit ist für  $i = 2$  und auch für  $i \geq 3$

$$P = x_1x_2 \cdots x_{i-1} y_{j+1} x_i y_{j+2} y_{j+3} \cdots y_j x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_q$$

schließlich ein orientierter Weg mit  $E(P) = E(W) \cup E(C)$ .  $\parallel$

Als eine einfache Anwendung von Satz 5.31, wollen wir ein Analogon zum Satz 5.19 von Ayel vorstellen.

**Folgerung 5.7 (Volkmann [11] 1999).** Ist  $W$  ein längster orientierter Weg in einem multipartiten Turnier  $D$ , so existiert in  $D - E(W)$  kein orientierter Kreis.

*Beweis.* Angenommen, es gibt in  $D - E(W)$  einen orientierten Kreis  $C$ . Dann gibt es aber nach Satz 5.31 in  $D$  einen Weg  $P$  mit  $E(P) = E(W) \cup E(C)$ . Dies ist aber ein offensichtlicher Widerspruch zu der Voraussetzung, daß  $W$  ein längster orientierter Weg in  $D$  ist.  $\parallel$

Bondy stellte in [2] die Frage, ob jedes stark zusammenhängende  $p$ -partite Turnier mit  $p \geq 5$ , das mindestens zwei Ecken in jeder Partitionsmenge enthält, einen  $(p + 1)$ -Kreis besitzt. Das folgende Beispiel, das unabhängig von Gutin [1] 1982 und Balakrishnan und Paulraja [1] 1984 gefunden wurde, zeigt uns, daß dies keineswegs der Fall sein muß.

**Beispiel 5.8.** Das stark zusammenhängende multipartite Turnier  $D$  bestehe aus den Partitions Mengen  $E_i = \{a_i, b_i\}$  für  $i = 1, 2, \dots, p$  mit  $p \geq 3$ . Weiter besitze  $D$  die beiden  $p$ -Kreise  $a_1 a_2 \cdots a_p a_1, b_1 b_2 \cdots b_p b_1$ , und es gelte  $a_i \rightarrow a_j$  und  $b_i \rightarrow b_j$  für  $p \geq i \geq j + 2 \geq 3$ . Schließlich enthalte  $D$  den Bogen  $(b_p, a_1)$  sowie die Bogen  $(a_i, b_j)$  für  $1 \leq i \neq j \leq p$  mit Ausnahme des Bogens  $(a_1, b_p)$ .

Beachtet man die Tatsache, daß ein  $(p + 1)$ -Kreis von  $D$  notwendig den Bogen  $(b_p, a_1)$  enthält, so erkennt man leicht, daß ein solcher orientierter Kreis nicht existieren kann.

Im Jahre 1996 haben mein Schüler Prof. Dr. Yubao Guo und ich [6] alle stark zusammenhängenden  $p$ -partiten Turniere ohne  $(p + 1)$ -Kreis charakterisiert und damit eine vollständige Lösung des oben genannten Problems von Bondy gegeben.

Zusammen mit meiner Schülerin Frau Dr. Meike Tewes habe ich 1999 folgende Verallgemeinerung von Satz 5.5 gefunden.

**Satz 5.32 (Tewes, Volkmann [1] 1999).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 4$ , so besitzt  $D$  mindestens zwei nicht-kritische Ecken.

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir noch einige interessante Ergebnisse über reguläre multipartite Turniere ohne Beweis notieren und vier ungelöste Vermutungen vorstellen. Zum besseren Verständnis ist folgende Beobachtung nützlich.

**Hilfssatz 5.3.** Ist  $D$  ein reguläres  $p$ -partites Turnier mit der Partition  $E_1, E_2, \dots, E_p$ , so gilt  $|E_1| = |E_2| = \cdots = |E_p|$ .

*Beweis.* Es seien  $x_j \in E_j$  und  $x_k \in E_k$  für  $1 \leq j < k \leq p$ . Da  $D$  regulär ist folgt

$$\frac{1}{2}(n(D) - |E_j|) = d^+(x_j) = d^-(x_j) = d^+(x_k) = d^-(x_k) = \frac{1}{2}(n(D) - |E_k|).$$

Dararaus ergibt sich sofort  $|E_k| = |E_j|$  und die gewünschte Aussage ist bewiesen. ||

**Satz 5.33 (Yeo [1] 1997).** Jedes  $r$ -reguläre ( $r \geq 1$ ) multipartite Turnier ist Hamiltonsch.

Satz 5.33 wurde im Jahre 1989 von C.-Q. Zhang [2] vermutet, denn Zhang konnte nur zeigen, daß in einem regulären multipartiten Turnier  $D$  ein orientierter Kreis  $C$  der Länge  $L(C) \geq n(D) - 1$  existiert.

**Satz 5.34 (Yeo [3] 1999).** Jedes reguläre  $p$ -partite Turnier mit  $p \geq 5$  ist Ecken-panzyklisch.

**Satz 5.35 (Yeo [5], [7] 2007).** Jedes reguläre 4-partite Turnier  $D$  mit  $|E(D)| > 13917$  ist Ecken-panzyklisch.

**Vermutung 5.2 (Yeo [4] 1999).** Jedes reguläre 4-partite Turnier ist Ecken-panzyklisch.

**Satz 5.36 (Volkmann, Yeo [1] 2004).** Ist  $D$  ein reguläres multipartites Turnier, so gehört jeder Bogen zu einem orientierten Hamiltonschen Weg.

**Vermutung 5.3 (Volkmann, Yeo [1] 2004).** Ist  $D$  ein reguläres  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 4$ , so liegt jeder Bogen auf einem orientierten Hamiltonschen Kreis.

Im Zusammenhang mit Vermutung 5.3 hat Yeo [5], [7] kürzlich folgendes Ergebnis erzielt.



**Satz 5.37 (Yeo [5], [7] 2007).** Es sei  $D$  ein reguläres  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 4$  und  $|E(D)| > 13917$ . Dann liegt jeder Bogen auf einem orientierten Hamiltonschen Kreis.

**Satz 5.38 (Volkman, Winzen [1] 2006).** Es sei  $D$  ein reguläres  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 5$ . Dann besitzt  $D$  ein stark zusammenhängendes Unterturnier der Ordnung  $t$  für jedes  $t \in \{3, 4, \dots, p\}$ .

Die Bedingung  $p \geq 5$  in Satz 5.38 ist notwendig, denn Volkman [12] hat reguläre 4-partite Turniere konstruiert, die kein stark zusammenhängendes Unterturnier der Ordnung 4 besitzen.

**Vermutung 5.4 (Volkman, Winzen [2] 2006).** Es sei  $D$  ein reguläres  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 5$ . Dann gehört jede Ecke von  $D$  zu einem stark zusammenhängenden Unterturnier der Ordnung  $t$  für jedes  $t \in \{3, 4, \dots, p\}$ .

Im Zusammenhang mit Vermutung 5.4 haben wir kürzlich folgendes Ergebnis bewiesen.

**Satz 5.39 (Volkman, Winzen [2] 2006).** Es sei  $D$  ein reguläres  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 7$ . Dann gehört jede Ecke von  $D$  zu einem stark zusammenhängenden Unterturnier der Ordnung  $t$  für jedes  $t \in \{3, 4, \dots, p-4\}$ .

Im Jahre 1991 hat Wang [1] vermutet, daß jeder Bogen eines regulären 3-partiten Turnieres  $D$  auf einem  $t$ -Kreis für alle  $t \in \{3, 6, 9, \dots, n(D)\}$  liegt. Die folgenden Beispiele zeigen, daß diese Vermutung falsch ist.

**Beispiel 5.9 (Volkman [17] 2004).** Es sei  $D$  das 3-partite Turnier und  $E_1, E_2, E_3$  die Partition der Eckenmenge von  $D$ , so daß  $|E_1| = |E_2| = |E_3| = r \geq 2$  und  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1$  gilt. Natürlich ist  $D$  dann  $r$ -regulär, und  $D$  hat nur orientierte Kreise der Längen  $3, 6, 9, \dots, 3r = n(D)$ .

Nun sei  $u_1u_2u_3u_1$  ein 3-Kreis von  $D$  mit  $u_i \in E_i$  für  $i = 1, 2, 3$ . Ersetzen wir in  $D$  den 3-Kreis  $u_1u_2u_3u_1$  durch den 3-Kreis  $u_1u_3u_2u_1$ , so erhalten wir wieder ein reguläres 3-partites Turnier  $D_1$ . Es ist leicht zu sehen, daß die Bogen  $u_1u_3$ ,  $u_3u_2$  und  $u_2u_1$  aber auf keinem orientierten Kreis der Länge  $6, 9, \dots, 3r = n(D_1)$  von  $D_1$  liegen.

Weiterhin sei  $u_1u_2u_3w_1w_2w_3u_1$  ein 6-Kreis von  $D$  mit  $u_i, w_i \in E_i$  für  $i = 1, 2, 3$ . Ersetzen wir in  $D$  den 6-Kreis  $u_1u_2u_3w_1w_2w_3u_1$  durch den 6-Kreis  $u_1w_3w_2w_1u_3u_2u_1$ , so erhalten wir ein weiteres reguläres 3-partites Turnier  $D_2$ . Offensichtlich liegen die Bogen  $u_1w_3$ ,  $w_3w_2$ ,  $w_2w_1$ ,  $w_1u_3$ ,  $u_3u_2$  und  $u_2u_1$  auf keinem 3-Kreis von  $D_2$ .

**Vermutung 5.5 (Volkman [22] 2006).** Jedes reguläre 3-partite Turnier  $D$  besitzt einen  $t$ -Kreis für jedes  $t \in \{3, 6, 9, \dots, n(D)\}$ .

Die Sätze 5.24 und 5.33 bestätigen die Vermutung 5.5 für  $t = 3$  und  $t = n(D)$ . Volkman [18] und [22] hat gezeigt, daß Vermutung 5.5 auch für  $t = n(D) - 3$  und  $t = 6$  richtig ist. Kürzlich haben Stella und Volkman [1] nachgewiesen, daß jedes reguläre 3-partite Turnier  $D$  auch einen 9-Kreis besitzt, falls  $n(D) \geq 9$  ist.

Weitere Resultate und ausführliche Literaturhinweise zum Thema multipartite Turniere befinden sich in den Übersichtsartikeln von Gutin [5] 1995, Volkman [13] 2002 und [29] 2007, in der Ph. D. Thesis von Yeo [2] 1998, in der Habilitationsschrift von Guo [2] 1998 und in den Dissertationen meiner Schüler Dr. Meike Tewes [1] 1999 sowie Dr. Stefan Winzen [1] 2004.

## 5.3 Aufgaben

**Aufgabe 5.1.** Es sei  $T_n$  ein Turnier der Ordnung  $n \geq 4$ , das genau zwei starke Zusammenhangskomponenten  $D_1$  und  $D_2$  besitzt. Mit  $L_n$  bezeichnen wir die Länge des längsten Kreises von  $T_n$ .

- Man zeige  $L_n \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .
- Für alle  $n \geq 6$  gebe man Beispiele mit  $L_n = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  an.
- Man zeige, daß b) für  $n = 4$  bzw.  $n = 5$  nicht möglich ist.

**Aufgabe 5.2.** Es sei  $T_n$  ein Turnier der Ordnung  $n \geq 3$ . Man beweise oder widerlege:

- Liegt jede Ecke von  $T_n$  auf einem orientierten Kreis, so ist das Turnier stark zusammenhängend.
- Liegt jeder Bogen von  $T_n$  auf einem orientierten Kreis, so besitzt das Turnier einen orientierten Hamiltonkreis.

**Aufgabe 5.3.** Ist  $T_n$  ein Turnier, so zeige man:

- Es gibt höchstens drei Ecken  $x$  mit  $d^+(x, T_n) = 1$ .
- Ist  $n \geq 4$  und  $T_n$  stark zusammenhängend, so existieren höchstens zwei Ecken  $x$  mit  $d^+(x, T_n) = 1$ .

**Aufgabe 5.4.** Ist  $T_n$  ein Turnier der Ordnung  $n \geq 3$ , so zeige man:

- $\delta^+(T_n) \leq \frac{n-1}{2} \leq \Delta^+(T_n)$ .
- Gilt  $d^+(x, T_n) = d^+(y, T_n)$  für zwei Ecken  $x$  und  $y$  aus  $T_n$ , so liegen  $x$  und  $y$  in der gleichen starken Zusammenhangskomponente von  $T_n$ .

**Aufgabe 5.5.** Es sei  $T_n$  ein Turnier der Ordnung  $n \geq 3$ . Man beweise oder widerlege:

- Liegt jede Ecke von  $T_n$  auf einem orientierten Kreis der Länge  $> \frac{n}{2}$ , so besitzt das Turnier einen orientierten Hamiltonschen Kreis.
- Ist  $T_n$  nicht transitiv, und ist  $k$  ein Bogen von  $T_n$ , so besitzt der Digraph  $T_n - k$  einen orientierten Hamiltonschen Weg.

**Aufgabe 5.6.** Es sei  $T_n$  ( $n \geq 3$ ) ein Turnier mit  $d^+(x, T_n) = d^-(x, T_n)$  für alle Ecken  $x \in E(T_n)$ . Man zeige:

- Die Ordnung  $n = n(T_n)$  hat notwendig die Gestalt  $n = 2r + 1$  ( $r \in \mathbf{N}$ ), und es gilt  $d^+(x, T_n) = d^-(x, T_n) = r$  für alle  $x \in E(T_n)$ .
- Das Turnier  $T_n$  ist Hamiltonsch.
- Für jedes  $n = 2r + 1 \geq 3$  existiert ein Turnier mit  $d^+(x, T_n) = d^-(x, T_n) = r$  für alle  $x \in E(T_n)$ .

**Aufgabe 5.7.** Es sei  $T$  ein reguläres Turnier. Man zeige, daß zu jedem orientierten Kreis  $C$  gerader Länge in  $T$  ein orientierter Kreis  $C'$  in  $T$  existiert, so daß  $E(C) \subset E(C')$  und  $|E(C')| = |E(C)| + 1$  gilt.

**Aufgabe 5.8.** Es sei  $T_n$  ( $n \geq 5$ ) ein stark zusammenhängendes Turnier und  $p \in \mathbf{N}$  mit  $3 < p < n$ . Man zeige, daß es mindestens  $p - 2$  Ecken in  $T_n$  gibt, die auf zwei orientierten Kreisen der Länge  $p - 1$  liegen.

**Aufgabe 5.9.** Es sei  $T_n$  ein Turnier mit  $n \geq 7$ , und jeder Bogen von  $T_n$  liege auf einem orientierten Kreis. Ist  $p \in \mathbf{N}$  mit  $3 \leq p < \frac{n}{2}$ , so zeige man, daß  $T_n$  mindestens 3 verschiedene



orientierte Kreise der Länge  $p$  besitzt.

**Aufgabe 5.10.** Es sei  $T_n$  ein Turnier der Ordnung  $n \geq 3$ , das die Bedingung  $\min\{\delta^-, \delta^+\} \geq \frac{1}{4}(n-1)$  erfüllt. Man zeige, daß  $T_n$  stark zusammenhängend ist.

**Aufgabe 5.11.** Es sei  $T_n$  ein reguläres Turnier mit  $n \geq 5$ . Man zeige, daß jeder Bogen des Turniers auf einem 3-Kreis und einem 4-Kreis liegt.

**Aufgabe 5.12.** Es sei  $Q_n$  das Turnier aus Beispiel 5.1. Für  $n \geq 5$  gebe man alle verschiedenen Paare von Eckenmengen  $\{x_i, x_j\}$  mit  $i \neq j$  an, so daß  $Q_n - \{x_i, x_j\}$  stark zusammenhängend ist.

**Aufgabe 5.13.** Es sei  $T$  ein stark zusammenhängendes Turnier der Ordnung  $n \geq 5$ . Man zeige, daß  $T$  mindestens drei verschiedene Paare  $\{a_1, b_1\}$ ,  $\{a_2, b_2\}$  und  $\{a_3, b_3\}$  von Eckenmengen besitzt, so daß  $T - \{a_i, b_i\}$  stark zusammenhängend ist für  $i = 1, 2, 3$ .

**Aufgabe 5.14.** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites Turnier der Ordnung  $n(D) > p \geq 3$ . Man zeige, daß jede Ecke von  $D$  zu einem orientierten Weg der Länge  $p$  gehört.

**Aufgabe 5.15.** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes 3-partites Turnier. Enthält jede Partitionsmenge mindestens zwei Ecken, so zeige man, daß  $D$  einen orientierten Kreis der Länge  $r > 3$  besitzt.

**Aufgabe 5.16.** Es sei  $D$  ein reguläres  $p$ -partites Turnier mit  $p \geq 2$ . Man zeige, daß  $D$  stark zusammenhängend ist.

**Aufgabe 5.17.** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes multipartites Turnier der Ordnung  $n \geq 4$ , das nicht Hamiltonsch ist. Man zeige, daß es zwei verschiedene Ecken  $x_1$  und  $x_2$  in  $D$  gibt, so daß  $D - x_1$  und  $D - x_2$  stark zusammenhängend sind.

**Aufgabe 5.18.** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängendes  $p$ -partites ( $p \geq 3$ ) Turnier mit einem längsten orientierten Kreis der Länge  $p$ . Man zeige, daß jede Ecke auf einem  $t$ -Kreis für alle  $t$  mit  $3 \leq t \leq p$  liegt.

**Aufgabe 5.19.** Es sei  $D$  ein reguläres 3-partites Turnier. Man zeige, daß jeder Bogen von  $D$  auf einem 3-Kreis oder 4-Kreis liegt.

# Kapitel 6

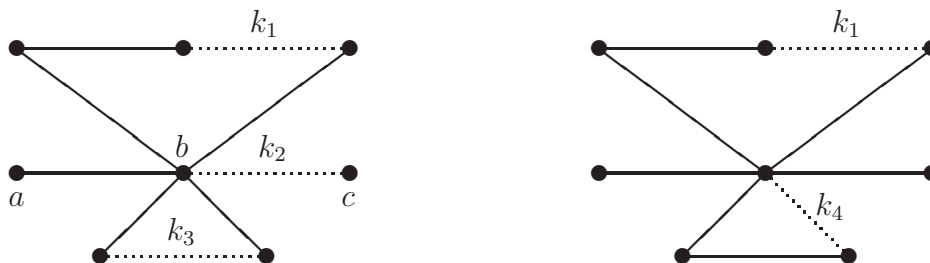
## Matchingtheorie

### 6.1 Gesättigte und maximale Matchings

**Definition 6.1.** Ist  $G$  ein Graph, so nennt man eine Kantenmenge  $M$  aus  $G$  ein *Matching* von  $G$ , wenn  $M$  keine Schlingen enthält und keine zwei Kanten aus  $M$  inzident sind. Ein Matching  $M_0$  von  $G$  heißt *gesättigt*, wenn es in  $G$  kein Matching  $M$  gibt mit  $M_0 \subseteq M$  und  $M_0 \neq M$ . Ein Matching  $M^*$  von  $G$  nennt man *maximal*, wenn es in  $G$  kein Matching  $M$  gibt mit  $|M^*| < |M|$ . Ist  $G[M] = (E(M), M)$  der von  $M$  erzeugte Teilgraph, so heißt das Matching  $M$  *perfekt* bzw. *fast-perfekt*, falls  $E(M) = E(G)$  bzw.  $|E(M)| = |E(G)| - 1$  gilt.

Um uns mit den neuen Begriffen etwas vertraut zu machen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

**Beispiel 6.1.** Wir betrachten den skizzierten Graphen der Ordnung 8 und der Größe 9.



Da die Kanten  $ab$  und  $bc = k_2$  inzident sind, können sie nicht gleichzeitig zu einem Matching gehören. Daher existiert kein perfektes Matching, womit z.B. das Matching  $M^* = \{k_1, k_2, k_3\}$  in der linken Skizze maximal ist. Man überlegt sich leicht, daß das Matching  $M_0 = \{k_1, k_4\}$  in der rechten Skizze gesättigt aber nicht maximal ist.

**Bemerkung 6.1.** Für jeden Graphen  $G$  gilt:

- i) Jedes maximale Matching ist gesättigt.
- ii) Jedes perfekte bzw. fast-perfekte Matching ist maximal und gesättigt.
- iii) Für jedes Matching  $M$  ist  $|E(M)| = 2|M|$ .
- iv) Für ein perfektes Matching  $M$  von  $G$  gilt  $2|M| = |E(G)|$ . Für ein fast-perfektes Matching  $M$  von  $G$  gilt  $2|M| = |E(G)| - 1$ .

Wir beginnen mit einer recht bekannten und hübschen hinreichenden Bedingung für die Existenz eines perfekten Matchings in einem schlichten Graphen gerader Ordnung. Den

kurzen Beweis habe ich zusammen mit meinen Schülern Prof. Dr. Y. Guo und Prof. Dr. B. Randerath bei einem unserer traditionellen Treffen zum Nachmittagskaffee gefunden.

**Definition 6.2.** Besitzt ein Graph  $G$  keinen  $K_{1,3}$  als (von Ecken) induzierten Teilgraphen, so heißt  $G$  *klauenfrei* (claw-free).

**Satz 6.1 (Sumner [1] 1974, Las Vergnas [1] 1975).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und klauenfreier Graph gerader Ordnung, so besitzt  $G$  ein perfektes Matching.

*Beweis.* Es sei  $a_1 a_2 a_3 \dots a_p$  ein längster Weg in  $G$ . Da  $G$  klauenfrei ist, erkennt man leicht, daß  $G' = G - \{a_1, a_2\}$  wieder klauenfrei und zusammenhängend ist. Das gewünschte Resultat erhält man nun durch vollständige Induktion nach der Ordnung von  $G$ . ||

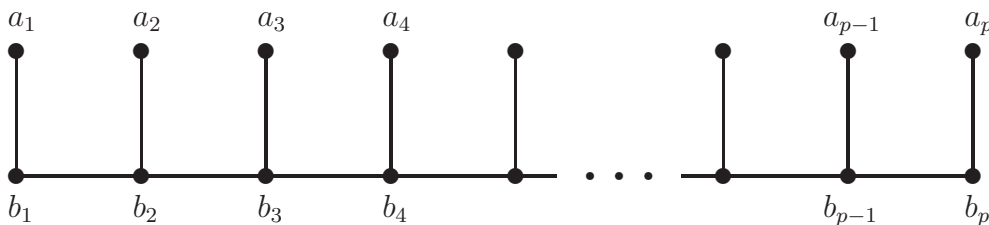
**Folgerung 6.1.** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und klauenfreier Graph ungerader Ordnung, so besitzt  $G$  ein fast-perfektes Matching.

*Beweis.* Nach Satz 1.10 existiert in  $G$  eine Ecke  $v$ , so daß  $H = G - v$  wieder zusammenhängend ist. Da  $H$  ein klauenfreier Graph von gerader Ordnung ist, besitzt er nach Satz 6.1 ein perfektes Matching, das ein fast-perfektes Matching von  $G$  ist. ||

**Satz 6.2 (Flach, Volkmann [1] 1987).** Es sei  $G$  ein Graph und  $M_0$  ein gesättigtes Matching von  $G$ . Ist  $M$  ein beliebiges Matching von  $G$ , so gilt  $|M| \leq 2|M_0|$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $G$  ein Multigraph, denn Schlingen spielen hier keine Rolle. Da  $M_0$  ein gesättigtes Matching ist, ist jede Kante von  $G$  mit einer Ecke aus  $E(M_0)$  inzident. Die Voraussetzung, daß  $M$  ein Matching ist, zeigt nun  $|M| \leq |E(M_0)| = 2|M_0|$  und damit die gewünschte Abschätzung. ||

**Beispiel 6.2.** Gegeben sei der skizzierte Baum  $G$  der Ordnung  $2p$ .



Das Matching  $M^* = \{a_i b_i | i = 1, 2, \dots, p\}$  ist perfekt. Wenn  $p$  gerade ist, dann ist das Matching  $M_0 = \{b_1 b_2, b_3 b_4, \dots, b_{p-1} b_p\}$  gesättigt, und es gilt  $|M^*| = 2|M_0|$ . Dieses Beispiel zeigt, daß die Ungleichung in Satz 6.2 scharf ist.

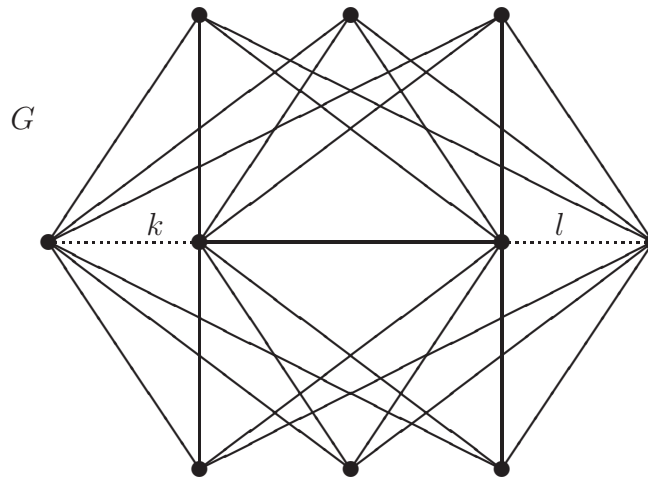
**Folgerung 6.2.** Existiert in einem Graphen  $G$  ein gesättigtes Matching  $M_0$  mit  $4|M_0| < |E(G)|$ , so besitzt  $G$  kein perfektes Matching.

*Beweis.* Angenommen,  $G$  besitzt ein perfektes Matching  $M^*$ . Dann ergibt sich aus Satz 6.2 und Bemerkung 6.1 iv) der Widerspruch

$$|E(G)| = 2|M^*| \leq 4|M_0| < |E(G)|. \quad ||$$

Folgerung 6.2 kann nützlich sein, um nachzuweisen, daß ein Graph kein perfektes Matching besitzt. Dazu betrachten wir

**Beispiel 6.3.** Gegeben sei der skizzierte Graph  $G$  der Ordnung 10.



Das Matching  $M_0 = \{k, l\}$  ist gesättigt mit  $4|M_0| = 8 < 10$ . Daher besitzt  $G$  nach Folgerung 6.2 kein perfektes Matching.

**Definition 6.3.** Es sei  $G$  ein Graph und  $M$  ein Matching von  $G$ . Ein Weg positiver Länge in  $G$  heißt  $M$ -alternierend, wenn die Kanten des Weges abwechselnd zu  $M$  und nicht zu  $M$  gehören. Ein  $M$ -alternierender Weg von  $G$  heißt  $M$ -zunehmend oder  $M$ -erweiternd, wenn die Endpunkte des Weges in  $G$  nicht mit  $M$  inzidieren, d.h. wenn die Endpunkte des Weges mit keiner Kante aus  $M$  inzidieren.

Die Bezeichnung  $M$ -zunehmender Weg begründet sich darin, daß man mit Hilfe der symmetrischen Differenz (man vgl. Definition 2.7) aus einem solchen Weg leicht ein Matching  $M'$  konstruieren kann mit  $|M'| = |M| + 1$ . Ist nämlich

$$W = (k_1, l_1, k_2, l_2, \dots, k_{p-1}, l_{p-1}, k_p)$$

ein  $M$ -zunehmender Weg in einem Graphen  $G$ , also  $k_i \in K(G) - M$  und  $l_i \in M$ , so ist

$$\begin{aligned} M' &= M \triangle K(W) = (M - K(W)) \cup (K(W) - M) \\ &= (M - \{l_1, l_2, \dots, l_{p-1}\}) \cup \{k_1, k_2, \dots, k_p\} \end{aligned}$$

ein Matching in  $G$  mit  $|M'| = |M| + 1$ . Damit haben wir bereits die eine Hälfte des nächsten Satzes bewiesen, der für die Matchingtheorie von fundamentaler Bedeutung ist.

**Satz 6.3 (Berge [1] 1957).** Ein Matching  $M^*$  in einem Graphen  $G$  ist genau dann maximal, wenn es keinen  $M^*$ -zunehmenden Weg in  $G$  gibt.

*Beweis.* Ist  $M^*$  ein maximales Matching von  $G$ , so entnehmen wir der Vorbetrachtung, daß es keinen  $M^*$ -zunehmenden Weg geben kann.

Nun sei umgekehrt  $M^*$  ein Matching von  $G$ , und es existiere kein  $M^*$ -zunehmender Weg. Angenommen, das Matching  $M^*$  ist nicht maximal. Dann gibt es aber ein Matching  $M$  in  $G$  mit  $|M| > |M^*|$ . Betrachten wir den Graphen

$$H = G[M^* \triangle M] = G[(M^* - M) \cup (M - M^*)],$$

so hat jede Ecke von  $H$  den Eckengrad 1 oder 2, denn jede Ecke von  $H$  inzidiert höchstens einmal mit einer Kante aus  $M^*$  oder  $M$ . Daher ist jede Komponente von  $H$  entweder ein

Kreis oder ein Weg, wobei inzidente Kanten in  $H$  aus  $M^*$  und  $M$  sind. Wegen  $|M| > |M^*|$  enthält  $H$  mehr Kanten aus  $M$  als aus  $M^*$ , denn aus  $M$  und  $M^*$  wurden nur solche Kanten entfernt, die in beiden Mengen liegen. Da jede Kreiskomponente von  $H$  gleich viele Kanten aus  $M$  und  $M^*$  besitzt, muß es in  $H$  eine Wegkomponente geben, die mit einer Kante aus  $M$  beginnt und einer Kante aus  $M$  endet. Diese Wegkomponente von  $H$  ist dann notwendig ein  $M^*$ -zunehmender Weg in  $G$ , was unserer Voraussetzung widerspricht.  $\parallel$

Verwendet man sukzessive das gerade beschriebene Kantenaustauschverfahren, so liefert der Satz von Berge folgendes Resultat.

**Folgerung 6.3.** Ist  $M$  ein Matching eines Graphen  $G$ , so besitzt  $G$  ein maximales Matching  $M^*$  mit  $E(M) \subseteq E(M^*)$ .

**Satz 6.4 (Folkman, Fulkerson [1] 1969).** Sind  $M$  und  $N$  zwei kantendisjunkte Matchings in einem Graphen  $G$  mit  $|M| > |N|$ , so existieren zwei kantendisjunkte Matchings  $M'$  und  $N'$  mit

- a)  $M' \cup N' = M \cup N$ ,
- b)  $|M'| = |M| - 1$  und  $|N'| = |N| + 1$ .

*Beweis.* Betrachten wir analog zum Beweis vom Satz 6.3 den Graphen  $H = G[M \Delta N]$ , so besitzt  $H$  eine Wegkomponente, die genau eine Kante mehr aus  $M$ , als aus  $N$  besitzt. Tauschen wir in dieser Wegkomponente die Kanten von  $M$  und  $N$  aus, so erhalten wir Matchings  $M'$  und  $N'$  mit den Eigenschaften a) und b).  $\parallel$

**Definition 6.4.** Ist  $G$  ein Multigraph, und sind  $M_1, M_2, \dots, M_p$  paarweise kantendisjunkte Matchings mit  $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p = K(G)$ , so sagt man, daß sich  $G$  in  $p$  kantendisjunkte Matchings zerlegen läßt. Es gilt natürlich notwendig  $p \geq \Delta(G)$ .

**Satz 6.5 (Folkman, Fulkerson [1] 1969).** Es sei  $G$  ein Multigraph, der sich in  $q$  kantendisjunkte Matchings zerlegen läßt. Ist  $p$  eine ganze Zahl mit  $p \geq q$ , so existiert eine Zerlegung von  $G$  in  $p$  kantendisjunkte Matchings  $M_1, M_2, \dots, M_p$  mit

$$\left\lfloor \frac{|K(G)|}{p} \right\rfloor \leq |M_i| \leq \left\lceil \frac{|K(G)|}{p} \right\rceil \quad (1 \leq i \leq p). \quad (6.1)$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung läßt sich  $G$  in  $p$  kantendisjunkte Matchings  $M'_1, M'_2, \dots, M'_p$  zerlegen, wenn man  $M'_i = \emptyset$  zuläßt. Durch wiederholtes Anwenden von Satz 6.4 erhält man daraus eine Zerlegung von  $G$  in  $p$  kantendisjunkte Matchings  $M_1, M_2, \dots, M_p$  mit  $||M_i| - |M_j|| \leq 1$  für  $1 \leq i, j \leq p$ . Ist  $r = \min_{1 \leq i \leq p} \{|M_i|\}$ , so gilt  $|M_i| = r$  oder  $|M_i| = r + 1$ . Bestehen  $t$  dieser Matchings aus  $r$  Kanten mit  $1 \leq t \leq p$ , so gilt

$$|K(G)| = tr + (p - t)(r + 1) = pr + p - t,$$

also

$$\frac{|K(G)|}{p} = r + 1 - \frac{t}{p},$$

woraus sich ohne Mühe (6.1) ergibt.  $\parallel$

Im Abschnitt 6.4 stellen wir Algorithmen zum Auffinden maximaler Matchings vor. Für eine bessere Effizienz werden wir folgende Beobachtung von Dörfler und Mühlbacher ausnutzen.

**Satz 6.6 (Dörfler, Mühlbacher [1] 1974).** Es sei  $M$  ein Matching des Graphen  $G$ . Weiter sei  $a \in E(G)$  mit  $a \notin E(M)$ , und von  $a$  aus gebe es keinen  $M$ -zunehmenden Weg in  $G$ .

Ist  $W_{xy}$  ein  $M$ -zunehmender Weg von  $x$  nach  $y$  in  $G$ , und betrachtet man das Matching  $M' = M \Delta K(W_{xy})$ , so existiert von der Ecke  $a$  aus auch kein  $M'$ -zunehmender Weg in  $G$ .

*Beweis.* Angenommen, es gibt in  $G$  einen  $M'$ -zunehmenden Weg  $W_{ab}$  von  $a$  nach  $b$ .

Ist  $E(W_{ab}) \cap E(W_{xy}) = \emptyset$ , so ist  $W_{ab}$  auch ein  $M$ -zunehmender Weg, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Ist  $a = a_0, b = a_r$  und hat der Weg  $W_{ab}$  die Gestalt

$$W_{ab} = (a, k_1, a_1, \dots, a_{i-1}, k_i, a_i, \dots, b),$$

so sei  $i$  der kleinste Index mit  $a_i \in E(W_{xy})$ . Dann gehören die Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_i$  gleichzeitig zu  $M$  und  $M'$  bzw. gleichzeitig nicht zu  $M$  und  $M'$ . Hat der  $M$ -zunehmende Weg  $W_{xy}$  die Form

$$W_{xy} = (x, h_1, x_1, l_1, y_1, h_2, \dots, h_j, x_j, l_j, a_i, h_{j+1}, \dots, h_p, y)$$

mit  $h_j \in K(G) - M$  und  $l_j \in M$ , so unterscheiden wir die beiden Fälle  $i$  gerade oder  $i$  ungerade.

Ist  $i$  gerade, so gilt  $k_i \in M$ . Da  $k_i$  und  $l_j$  mit der Ecke  $a_i$  inzidieren, sind  $k_i$  und  $l_j$  inzident, was der Tatsache widerspricht, daß  $M$  ein Matching ist.

Ist  $i$  ungerade, so gilt  $k_i \in K(G) - M$  und

$$W_{ax} = (a, k_1, a_1, \dots, a_{i-1}, k_i, a_i, l_j, x_j, h_j, \dots, h_1, x)$$

ist ein  $M$ -zunehmender Weg von  $a$  aus. Das widerspricht unserer Voraussetzung. Der Fall, daß  $W_{xy}$  die Form

$$W_{xy} = (x, h_1, x_1, l_1, y_1, h_2, \dots, h_j, a_i, l_j, y_j, h_{j+1}, \dots, h_p, y)$$

hat, wird analog behandelt. ||

## 6.2 Matchings in bipartiten Graphen

Der erste Satz in diesem Abschnitt, der 1931 von König [2] und 1935 unabhängig von Hall [1] gefunden wurde, ist für die gesamte Graphentheorie von zentraler Bedeutung. Wir geben hier einen Beweis, der gleichzeitig als Vorbereitung für einen Matchingalgorithmus dient.

**Satz 6.7 (König, Hall, König [2] 1931, Hall [1] 1935).** Es sei  $G$  ein bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ . Es gibt genau dann ein Matching  $M$  in  $G$  mit  $E(M) \cap A = A$ , wenn für alle  $S \subseteq A$  gilt:

$$|S| \leq |N(S, G)|$$

*Beweis.* Es gebe ein Matching  $M = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$  mit  $E(M) \cap A = A$ . Ist  $k_i = a_i b_i$  mit  $a_i \in A$ , so gilt notwendig  $b_i \in B$  für jedes  $i = 1, 2, \dots, p$ , und die Ecken  $b_1, b_2, \dots, b_p$  sind paarweise verschieden. Daraus folgt für alle  $S \subseteq A$  mit  $S = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_q}\}$

$$|S| = q = |\{b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q}\}| \leq |N(S, G)|.$$

Nun gelte umgekehrt  $|S| \leq |N(S, G)|$  für alle  $S \subseteq A$ . Es sei  $M$  ein maximales Matching von  $G$ , und wir nehmen an, daß  $E(M) \cap A \neq A$  gilt. Dann wählen wir eine feste Ecke

$a \in A - E(M)$  und bezeichnen mit  $U(a)$  die Menge aller Ecken von  $G$ , die man durch einen  $M$ -alternierenden Weg mit  $a$  verbinden kann. Weiter sei  $Z = U(a) \cup \{a\}$ . Da  $M$  maximal ist, gilt nach dem Satz von Berge (Satz 6.3)

$$Z - \{a\} \subseteq E(M). \quad (6.2)$$

Setzt man

$$S = Z \cap A \quad \text{und} \quad I = Z \cap B,$$

so folgt mit (6.2), daß jede Ecke aus  $S - \{a\}$  mit genau einer Ecke von  $I$  durch eine Kante aus  $M$  verbunden ist und umgekehrt. Daraus ergibt sich

$$|I| = |S| - 1 \quad (6.3)$$

und  $I \subseteq N(S, G)$ . Es gilt sogar

$$I = N(S, G), \quad (6.4)$$

denn gäbe es eine Ecke  $u \in N(S, G)$  mit  $u \notin I$ , so würde ein  $M$ -alternierender Weg von  $a$  nach  $u$  existieren, was aber nicht möglich ist. Die Identitäten (6.3) und (6.4) liefern uns die Ungleichung

$$|S| = |I| + 1 = |N(S, G)| + 1 > |N(S, G)|,$$

die unserer Voraussetzung widerspricht. ||

**Folgerung 6.4.** Es sei  $G$  ein bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ . Gilt

$$\delta_A = \min_{x \in A} d(x, G) \geq \max_{y \in B} d(y, G) = \Delta_B \geq 1,$$

so existiert in  $G$  ein maximales Matching  $M$  mit  $|M| = |A|$ .

*Beweis.* Für alle  $S \subseteq A$  ergibt sich aus  $N(S, G) \subseteq B$  und der Nachbarschaftsungleichung (Satz 1.13)

$$|S|\delta_A \leq \sum_{x \in S} d(x, G) \leq \sum_{y \in N(S, G)} d(y, G) \leq |N(S, G)|\Delta_B \leq |N(S, G)|\delta_A.$$

Wegen  $\delta_A \geq 1$  folgt daraus  $|S| \leq |N(S, G)|$ , womit nach dem Satz von König-Hall (Satz 6.7) ein Matching  $M$  mit  $|M| = |A|$  existiert, welches natürlich maximal ist. ||

Im Jahre 1955 fand Ore [2] folgende interessante Verallgemeinerung des Satzes von König-Hall.

**Satz 6.8 (König, Ore; Ore [2] 1955).** Ist  $G$  ein bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ , und ist  $M$  ein maximales Matching in  $G$ , so gilt

$$|A| - |M| = \max_{S \subseteq A} \{|S| - |N(S, G)|\}. \quad (6.5)$$

*Beweis.* Setzen wir die linke Seite von (6.5) gleich  $q$ , so gilt natürlich  $q \geq 0$ . Setzen wir die rechte Seite von (6.5) gleich  $p$ , so liefert  $S = \emptyset$  die Ungleichung  $p \geq 0$ .

Um  $p \geq q$  zu zeigen, fügen wir  $p$  neue Ecken zur Menge  $B$  hinzu und verbinden jede neue Ecke mit allen Ecken aus  $A$  durch eine Kante. Der dadurch entstandene bipartite Graph  $H$  besitzt eine Bipartition  $A, Y$ , wobei  $Y$  aus den Ecken von  $B$  und den  $p$  neuen Ecken



besteht. Für eine nicht leere Menge  $S \subseteq A$  ist  $|N(S, H)| = |N(S, G)| + p$ . Daraus ergibt sich zusammen mit der Voraussetzung  $|S| - |N(S, G)| \leq p$

$$|S| \leq |N(S, H)|.$$

Da diese Ungleichung auch für  $S = \emptyset$  gilt, existiert nach dem Satz von König-Hall in  $H$  ein Matching  $M^*$  mit  $|M^*| = |A|$ . Da  $M^*$  höchstens  $p$  Kanten enthält, die nicht zu  $G$  gehören, gibt es in  $G$  ein Matching  $M'$  mit  $|M'| \geq |M^*| - p$ . Daher gilt für das maximale Matching  $M$  die Abschätzung  $|M| \geq |M'| \geq |A| - p$ , also  $p \geq q$ .

Um  $q \geq p$  zu zeigen, fügen wir  $q$  neue Ecken zur Menge  $B$  hinzu und verbinden jede neue Ecke mit allen Ecken aus  $A$  durch eine Kante. In dem neuen Graphen  $H$  kann man das Matching  $M$  zu einem Matching  $M^*$  ergänzen mit  $|M^*| = |M| + q = |A|$ . Daher gilt nach dem Satz von König-Hall

$$|S| \leq |N(S, H)| \leq |N(S, G)| + q$$

für alle  $S \subseteq A$ , woraus sich sofort die gewünschte Ungleichung  $p \leq q$  ergibt. ||

Aus dem Satz von König-Hall und der Nachbarschaftsungleichung oder direkt aus Folgerung 6.4 ergeben sich zwei wichtige und sehr attraktive Resultate von König [1] aus dem Jahre 1916.

**Satz 6.9 (König [1] 1916).** Ist  $G$  ein bipartiter und  $r$ -regulärer Graph mit  $r \geq 1$ , so besitzt  $G$  ein perfektes Matching.

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt  $\Delta(G) = \delta(G) = r \geq 1$ . Ist  $A, B$  eine Bipartition von  $G$ , so existiert nach Folgerung 6.4 ein maximales Matching  $M_1$  mit  $|M_1| = |A|$  sowie ein maximales Matching  $M_2$  mit  $|M_2| = |B|$ . Daraus folgt  $|A| = |M_1| = |M_2| = |B|$  und die Matchings sind perfekt. ||

Sukzessives Anwenden von Satz 6.9 liefert unmittelbar:

**Satz 6.10 (König [1] 1916).** Ein bipartiter und  $r$ -regulärer Graph  $G$  läßt sich in  $r$  kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen.

Als interessante Folgerung aus Satz 6.10 bewies König noch das nächste Ergebnis.

**Satz 6.11 (König [1] 1916).** Ist  $G$  ein bipartiter Graph, so kann man  $G$  in  $\Delta(G)$  kantendisjunkte Matchings zerlegen.

*Beweis.* Ist  $A, B$  eine Bipartition von  $G$  mit  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  und  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ , so gelte o.B.d.A.  $q \leq p$ . Nun konstruieren wir aus  $G$  einen bipartiten und  $\Delta(G)$ -regulären Graphen  $H$  mit  $2p$  Ecken wie folgt und wenden auf  $H$  Satz 6.10 an.

Zunächst fügen wir  $p - q$  neue Ecken  $b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_p$  zu  $B$  hinzu und setzen dann  $Y = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ . Nun verbinden wir die Ecken aus  $A$  mit denen aus  $Y$  durch

$$p\Delta(G) - \sum_{x \in A} d(x, G)$$

zusätzliche Kanten, so daß daraus ein Graph  $H$  entsteht, der die Bedingung  $\Delta(H) = \Delta(G)$  erfüllt. Nach Konstruktion ist  $H$  wieder bipartit und außerdem  $\Delta(G)$ -regulär. Wegen Satz 6.10 läßt sich  $H$  in  $\Delta(G)$  kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen. Entfernt man aus diesen Matchings die neu hinzugefügten Kanten, so erhält man eine Zerlegung von  $G$  in  $\Delta(G)$  kantendisjunkte Matchings. ||

**Satz 6.12 (Mendelsohn, Dulmage [1] 1958).** Jeder bipartite Graph  $G$  besitzt ein maximales Matching das mit allen Ecken vom Grad  $\Delta(G)$  inzidiert.

*Beweis.* Der Beweis von Satz 6.11 hat gezeigt, daß  $G$  einen bipartiten und  $\Delta(G)$ -regulären Obergraphen  $H$  besitzt. Nach Satz 6.9 gibt es in  $H$  ein perfektes Matching  $M$ . Da nun alle Kanten aus  $M$ , die mit einer Ecke vom Grad  $\Delta(G)$  inzidieren, notwendig zu  $K(G)$  gehören, ist  $M' = M \cap K(G)$  ein Matching in  $G$ , das mit allen Ecken vom Grad  $\Delta(G)$  inzidiert. Wendet man auf  $M'$  Folgerung 6.3 an, so erhält man das gewünschte Ergebnis.  $\parallel$

Nach Satz 6.9 besitzt ein bipartiter und  $r$ -regulärer Graph mit  $r \geq 1$  ein perfektes Matching. Ein nicht sehr bekanntes Resultat von Ore [5] zeigt, daß diese Aussage erhalten bleibt, wenn man nicht allzusehr von der Regularität abweicht und voraussetzt, daß die beiden Partitions Mengen gleich groß sind.

**Satz 6.13 (Ore [5] 1962).** Es sei  $G$  ein bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ . Ist  $|A| = |B|$  und gilt für eine ganze Zahl  $q \geq 1$  die Ungleichung

$$\sum_{u \in A, d(u, G) < q} (q - d(u, G)) + \sum_{v \in B, d(v, G) > q} (d(v, G) - q) \leq q - 1,$$

so besitzt  $G$  ein perfektes Matching.

*Beweis.* Es sei  $S \subseteq A$  eine beliebige Teilmenge der Partitionsmenge  $A$ . Setzen wir  $d(x) = d(x, G)$  für  $x \in E(G)$ , so erhalten wir die Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in S} d(u) &= q|S| + \sum_{u \in S} (d(u) - q) \\ &= q|S| + \sum_{u \in S, d(u) \geq q} (d(u) - q) + \sum_{u \in S, d(u) < q} (d(u) - q) \\ &\geq q|S| + \sum_{u \in S, d(u) < q} (d(u) - q) \end{aligned}$$

Setzen wir  $N(S) = N(S, G)$ , so erhalten wir ebenso leicht die nächste Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in N(S)} d(v) &= q|N(S)| + \sum_{v \in N(S)} (d(v) - q) \\ &= q|N(S)| + \sum_{v \in N(S), d(v) > q} (d(v) - q) + \sum_{v \in N(S), d(v) \leq q} (d(v) - q) \\ &\leq q|N(S)| + \sum_{v \in N(S), d(v) > q} (d(v) - q) \end{aligned}$$

Diese beiden Ungleichungen liefern zusammen mit der Nachbarschaftsungleichung (Satz 1.13)  $\sum_{u \in S} d(u) \leq \sum_{v \in N(S)} d(v)$  und der Voraussetzung die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} q(|S| - |N(S)|) &\leq \sum_{u \in S, d(u) < q} (q - d(u)) + \sum_{v \in N(S), d(v) > q} (d(v) - q) \\ &\leq \sum_{u \in A, d(u) < q} (q - d(u)) + \sum_{v \in B, d(v) > q} (d(v) - q) \\ &\leq q - 1 \end{aligned}$$

Da  $|S| - |N(S)|$  ganzzahlig ist, ergibt sich daraus unmittelbar  $|S| \leq |N(S)|$ . Wegen der Bedingung  $|A| = |B|$  folgt daher aus dem Satz von König-Hall (Satz 6.7), daß  $G$  ein perfektes Matching besitzt. ||

**Bemerkung 6.2.** Mit Satz 6.11 lassen sich optimale Stundenpläne erstellen. Denn gibt es an einer Schule  $p$  Lehrer  $A_1, A_2, \dots, A_p$  und  $q$  Klassen  $B_1, B_2, \dots, B_q$ , so unterrichte der Lehrer  $A_i$  die Klasse  $B_j$  für  $t_{ij}$  Stunden. Gesucht wird ein Stundenplan, der in kürzester Zeit alle Unterrichtsstunden abdeckt.

Zur Lösung dieses Problems konstruieren wir uns einen bipartiten Graphen  $G$  mit der Bipartition

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \text{ und } B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\},$$

wobei  $A$  den Lehrern und  $B$  den Klassen entspricht. Dann werden die Ecken  $a_i$  und  $b_j$  durch  $t_{ij}$  parallele Kanten verbunden.

In jeder Zeiteinheit (z.B. von 8.00 - 9.00 Uhr, 9.00 - 10.00 Uhr usw.) kann ein Lehrer höchstens eine Klasse unterrichten, und jede Klasse kann in einer Zeiteinheit von höchstens einem Lehrer unterrichtet werden. Somit entspricht während einer Zeiteinheit die Zuordnung der Lehrer zu den Klassen einem Matching in  $G$  und umgekehrt entspricht jedes Matching einer möglichen Zuordnung. Daher ist das Stundenplanproblem gleichbedeutend damit, den zugehörigen bipartiten Graphen  $G$  in möglichst wenig kantendisjunkte Matchings zu zerlegen. Nach Satz 6.11 besteht also ein solcher optimaler Stundenplan aus genau  $\Delta(G)$  Zeiteinheiten.

Aus den Sätzen 6.5 und 6.11 ergibt sich unmittelbar:

**Folgerung 6.5.** Ist  $G$  ein bipartiter Graph und  $p$  eine ganze Zahl mit  $p \geq \Delta(G)$ , so kann man  $G$  in  $p$  kantendisjunkte Matchings  $M_1, M_2, \dots, M_p$  zerlegen mit

$$\left\lfloor \frac{|K(G)|}{p} \right\rfloor \leq |M_i| \leq \left\lceil \frac{|K(G)|}{p} \right\rceil \quad (1 \leq i \leq p).$$

**Bemerkung 6.3.** Mit Hilfe von Folgerung 6.5 kann man das Stundenplanproblem auch dann lösen, wenn man zusätzlich noch voraussetzt, daß nur eine bestimmte Anzahl von Klassenräumen zur Verfügung steht.

Ist  $G$  der dem Stundenplan zugeordnete bipartite Graph, so werden insgesamt  $m = K(G)$  Stunden unterrichtet.

- a) Stehen  $r$  Räume zur Verfügung, so gibt es einen Stundenplan, der mit  $\max\{\Delta(G), \lceil \frac{m}{r} \rceil\}$  Zeiteinheiten auskommt.
- b) Bei  $t \geq \Delta(G)$  vorgegebenen Zeiteinheiten gibt es einen Stundenplan, bei dem nur  $\lceil \frac{m}{t} \rceil$  Räume benötigt werden.

Für weitere Einzelheiten zum Stundenplanproblem vgl. man z.B. die Arbeiten von Dempster [1] 1971 und de Werra [1] 1970.

## 6.3 Kreisfaktoren in Digraphen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Anwendungen der erzielten Ergebnisse auf die Theorie der Digraphen vorstellen.

**Definition 6.5.** Es sei  $D$  ein Digraph. Ein Teildigraph  $D'$  von  $D$  wird *Faktor* genannt, falls  $E(D') = E(D)$  gilt. Ein Faktor von  $D$ , der aus eckendisjunkten orientierten Kreisen besteht, heißt *Kreisfaktor*.

Im Jahre 1962 hat Ore [5] gezeigt, daß ein Analogon zur König-Hall Bedingung in Digraphen zu Kreisfaktoren führt.

**Satz 6.14 (Ore [5] 1962).** Ein Multidigraph  $D$  besitzt genau dann einen Kreisfaktor, wenn  $|S| \leq |N^+(S, D)|$  für jede Teilmenge  $S \subseteq E(D)$  gilt.

*Beweis.* Ist  $C$  ein orientierter Kreis, so gilt  $|N^+(X, C)| = |X|$  für jede Teilmenge  $X \subseteq E(C)$ . Hat  $D$  nun einen Kreisfaktor so folgt daraus leicht die Ungleichung  $|S| \leq |N^+(S, D)|$  für jede Teilmenge  $S \subseteq E(D)$ .

Nun gelte umgekehrt  $|S| \leq |N^+(S, D)|$  für jede Teilmenge  $S \subseteq E(D)$ . Ist  $E(D) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , so setzen wir

$$E' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\} \text{ und } E'' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$$

mit  $E' \cap E'' = \emptyset$  und  $K' = \{x'_i x''_j | (x_i, x_j) \in B(D)\}$ . Nach Konstruktion ist  $G = (E' \cup E'', K')$  ein bipartiter Graph, und nach Voraussetzung gilt  $|X| \leq |N(X, G)|$  für jede Teilmenge  $X \subseteq E'$ . Wegen  $|E'| = |E''|$  folgt daher aus dem Satz von König-Hall (Satz 6.7), daß  $G$  ein perfektes Matching besitzt. Da ein perfektes Matching in  $G$  einen Kreisfaktor in  $D$  induziert, ist der Satz bewiesen. ||

Im Jahre 1999 hat Yeo [4] Satz 6.14 auf folgende nützliche Form gebracht.

**Satz 6.15 (Yeo [4] 1999).** Ein Multidigraph  $D$  besitzt genau dann keinen Kreisfaktor, wenn seine Eckenmenge in disjunkte Teilmengen  $Y, Z, R_1$  und  $R_2$  zerlegt werden kann, so daß in  $D[Y]$  kein Bogen existiert und  $R_1 \rightsquigarrow Y$ ,  $(R_1 \cup Y) \rightsquigarrow R_2$  und  $|Y| > |Z|$  gilt. ( $A \rightsquigarrow B$  bedeutet dabei, daß es keinen Bogen von  $B$  nach  $A$  gibt.)

*Beweis.* Es existiere eine im Satz angegebene Zerlegung. Dann erkennt man, daß jeder orientierte Kreis, der  $q$  Ecken aus  $Y$  enthält, mindestens auch  $q$  Ecken aus  $Z$  besitzen muß. Wegen  $|Y| > |Z|$  kann es daher keinen Kreisfaktor geben.

Besitzt umgekehrt  $D$  keinen Kreisfaktor, so existiert nach Satz 6.14 eine Teilmenge  $X \subseteq E(D)$  mit  $|X| > |N^+(X, D)|$ . Setzt man nun  $R_1 = E(D) - (N^+(X) \cup X)$ ,  $R_2 = N^+(X) \cap X$ ,  $Y = X - R_2$  und  $Z = N^+(X) - R_2$ , so überlegt man sich leicht mit Hilfe einer Skizze, daß diese Mengen die Bedingungen des Satzes erfüllen. ||

Den nächsten attraktiven Satz findet man implizit schon bei Ore [5] und explizit in einer Arbeit von Volkmann und Yeo [1].

**Satz 6.16.** Ein Digraph  $D$  ist genau dann die Vereinigung von bogendisjunkten Kreisfaktoren, wenn er  $r$ -regulär ist ( $r \geq 1$ ).

*Beweis.* Ist  $D$  die Vereinigung von  $r$  bogendisjunkten Kreisfaktoren, so ist  $D$  natürlich  $r$ -regulär.

Nun sei  $D$  ein  $r$ -regulärer Digraph. Ist  $E(D) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , so setzen wir

$$E' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\} \text{ und } E'' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$$

mit  $E' \cap E'' = \emptyset$  und  $K' = \{x'_i x''_j | (x_i, x_j) \in B(D)\}$ . Nach Konstruktion ist  $G = (E' \cup E'', K')$  ein  $r$ -regulärer bipartiter Graph. Daher läßt sich  $G$  nach dem Satz von König (Satz 6.10) in  $r$  kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen. Da jedes perfekte Matching in  $G$  einem Kreisfaktor in  $D$  entspricht, ist der Satz bewiesen. ||

**Folgerung 6.6.** Ist  $D$  ein regulärer Digraph, so gehört jeder Bogen von  $D$  zu einem Kreisfaktor.

**Folgerung 6.7 (Zhang [2] 1989).** Jedes  $r$ -reguläre ( $r \geq 1$ ) multipartite Turnier  $D$  enthält einen orientierten Hamiltonschen Weg.

*Beweis.* Nach Satz 6.16 besitzt  $D$  einen Kreisfaktor. Sukzessives anwenden von Satz 5.31 liefert das gewünschte Ergebnis. ||

## 6.4 Matching-Algorithmen

Die praktische Bedeutung der Matchingtheorie kann auch durch das Personal-Zuteilungsproblem belegt werden.

Wir betrachten eine Firma, in der  $p$  Arbeitnehmer  $A_1, A_2, \dots, A_p$  beschäftigt und  $p$  Arbeitsplätze  $B_1, B_2, \dots, B_p$  vorhanden sind. Jeder Arbeitnehmer sei für einen oder mehrere Arbeitsplätze qualifiziert. Nun stellt sich die natürliche Frage, ob man allen Arbeitnehmern einen geeigneten Arbeitsplatz zuweisen kann.

Graphentheoretisch gesehen hat dieses Problem folgende Gestalt. Gegeben sei ein bipartiter Graph  $G$  mit der Bipartition

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \quad \text{und} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\},$$

wobei  $A$  den Arbeitnehmern und  $B$  den Arbeitsplätzen entspricht. Dabei wird eine Ecke  $a_i$  mit einer Ecke  $b_j$  durch eine Kante verbunden, wenn der Arbeitnehmer  $A_i$  für den Arbeitsplatz  $B_j$  qualifiziert ist. Man kann jedem Arbeitnehmer genau dann einen geeigneten Arbeitsplatz geben, wenn der Graph  $G$  ein perfektes Matching besitzt. Im Fall, daß in  $G$  kein perfektes Matching existiert, kann ein maximales Matching auch noch von Interesse sein.

Wir wenden uns nun Verfahren zu, mit denen man maximale Matchings konstruieren kann. Dabei legen uns die Untersuchungen aus dem Abschnitt 6.1 folgende prinzipielle Vorgehensweise nahe.

Da das Aufsuchen eines gesättigten Matchings  $M$  keine Mühe macht, sollte man jeden Matching-Algorithmus mit einem solchen Matching starten, zumal  $|M|$  nach Satz 6.2 mindestens halb so groß ist, wie ein maximales Matching. Ist  $M$  perfekt oder fast-perfekt, so ist  $M$  maximal. Ist das nicht der Fall, so wähle man eine Ecke  $a$ , die nicht mit  $M$  inzidiert und suche systematisch nach einem  $M$ -zunehmenden Weg mit der Anfangsecke  $a$ .

Gibt es einen solchen Weg  $W$ , so liefert das im Satz von Berge (Satz 6.3) beschriebene Kantenaustauschverfahren ein Matching

$$M' = M \Delta K(W)$$

mit  $|M'| = |M| + 1$ . Mit dem Matching  $M'$ , das eine Kante mehr als unser Ausgangsmatching besitzt, beginne man das beschriebene Verfahren von neuem.

Gibt es keinen  $M$ -zunehmenden Weg von  $a$  aus, so kann man wegen Satz 6.6 die Ecke  $a$  aus  $G$  entfernen und sich auf den Graphen  $G - a$  beschränken.

Die Schwierigkeit der oben beschriebenen Methode liegt in der systematischen Suche nach  $M$ -zunehmenden Wegen. Für den bipartiten Fall wollen wir ausführlich einen Algorithmus vorstellen, der uns dieses Problem effizient löst. An der Entwicklung dieses Verfahrens, das heute unter dem Namen *Ungarische Methode* bekannt ist, haben neben dem schon genannten Personenkreis auch Kuhn [1] 1955, Munkres [1] 1957 und Edmonds [1] 1965 mitgewirkt.

**Definition 6.6.** Es sei  $M$  ein Matching in einem Graphen  $G$ . Ist  $a \in E(G)$  eine Ecke, die nicht mit  $M$  inzidiert, so heißt ein Baum  $T \subseteq G$  ein  $M$ -alternierender Wurzelbaum mit der Wurzel  $a$ , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $a \in E(T)$ .
- ii) Jede Ecke aus  $T$  ist mit der Ecke  $a$  durch einen (eindeutigen)  $M$ -alternierenden Weg in  $T$  verbunden.

Ein solcher  $M$ -alternierender Wurzelbaum  $T$  heißt *gesättigt*, wenn man  $T$  durch keine Kante aus  $G$  vergrößern kann.

Die systematische Suche nach  $M$ -zunehmenden Wegen mit der Anfangsecke  $a$  erfolgt in bipartiten Graphen durch sukzessives Aufbauen eines  $M$ -alternierenden Wurzelbaumes  $T$  mit der Wurzel  $a$ . Der folgende Satz zeigt, daß es in bipartiten Graphen genügt, einen einzigen  $M$ -alternierenden Wurzelbaum mit der Wurzel  $a$  wachsen zu lassen, um zu entscheiden, ob es einen  $M$ -zunehmenden Weg mit der Anfangsecke  $a$  gibt.

**Satz 6.17.** Es sei  $G$  ein bipartiter Graph,  $M$  ein Matching von  $G$  und  $a \in E(G)$  eine Ecke, die nicht mit  $M$  inzidiert. Weiter sei  $T \subseteq G$  ein  $M$ -alternierender Wurzelbaum mit der Wurzel  $a$ .

- a) Ist  $W$  ein  $M$ -zunehmender Weg in  $T$  mit der Anfangsecke  $a$ , den man in  $G$  durch keine Kante aus  $M$  verlängern kann, so ist  $W$  ein  $M$ -zunehmender Weg in  $G$ .
- b) Ist  $T$  gesättigt, und gibt es in  $T$  keinen  $M$ -zunehmenden Weg von  $a$  aus, so gibt es auch in  $G$  keinen  $M$ -zunehmenden Weg mit der Anfangsecke  $a$ .

*Beweis.* Der Teil a) des Satzes ist sofort ersichtlich, und diese Aussage gilt sogar für nicht bipartite Graphen.

Nun wollen wir b) bestätigen. Ist  $A, B$  eine Bipartition von  $G$ , so gelte o.B.d.A.  $a \in A$ . Wir setzen  $K_M(T) = M \cap K(T)$  und analog zum Beweis von Satz 6.7

$$S = E(T) \cap A \quad \text{und} \quad I = E(T) \cap B.$$

Wie beim Beweis von Satz 6.7 erkennt man  $I \subseteq N(S, G)$ , und da  $T$  gesättigt ist, gilt sogar  $I = N(S, G)$ . Angenommen, es gibt in  $G$  einen  $M$ -zunehmenden Weg

$$W = (a, k_1, y_1, l_1, x_1, \dots, x_j, k_{j+1}, y_{j+1}, l_{j+1}, x_{j+1}, \dots, x_{p-1}, k_p, y_p)$$

mit  $x_i \in A$ ,  $y_i \in B$ ,  $l_i \in M$  und  $k_i \in K(G) - M$ . Da nach Voraussetzung alle Ecken  $x \in E(T)$ , die von  $a$  verschieden sind, mit einer Kante aus  $K_M(T)$  inzidieren, folgt mit  $x_0 = a$  für alle  $j \geq 0$ :

Ist  $x_j \in E(T)$ , so gehört  $x_j$  zu der Menge  $S$ . Damit gilt natürlich  $y_{j+1} \in N(S, G) = I$ , also  $l_{j+1} \in K_M(T)$  und daher  $x_{j+1} \in E(T)$ . Daraus schließen wir induktiv, daß die Endecke  $y_p$  des  $M$ -zunehmenden Weges  $W$  zur Menge  $E(T)$  gehört. Das ist ein Widerspruch dazu, daß  $y_p$  mit einer Kante aus  $K_M(T)$  inzidiert. ||

Zusammenfassend ergibt sich der folgende effiziente Algorithmus zur Bestimmung maximaler Matchings in bipartiten Graphen.

## 8. Algorithmus

### Ungarische Methode

Es sei  $G$  ein bipartiter Graph mit einer Bipartition  $A, B$ , und es gelte o.B.d.A.  $|A| \leq |B|$ .



1. Man starte mit einem gesättigten Matching  $M$ .
2. Ist  $E(M) \cap A = A$ , so stoppe man den Algorithmus.  
Ist  $E(M) \cap A \neq A$ , so wähle man eine Ecke  $a \in A - E(M)$  und setze

$$S = \{a\}, \quad I = \emptyset \quad \text{und} \quad T = \{a\}.$$

3. Ist  $I = N(S, G)$ , so setze man  $A = A - \{a\}$  und gehe zu 2.  
Ist  $I \neq N(S, G)$ , so wähle man ein  $y \in N(S, G) - I$  und eine Kante  $k = xy$  mit  $x \in E(T)$  und gehe zu 4.
4. Inzidiert  $y$  mit  $M$ , so existiert eine Kante  $l \in M$  mit  $l = yz$ , wobei  $z$  nicht in  $E(T)$  liegt. Man setze

$$S = S \cup \{z\} \quad \text{und} \quad I = I \cup \{y\},$$

erweitere den  $M$ -alternierenden Wurzelbaum  $T$  durch die Ecken  $y, z$  sowie durch die Kanten  $k, l$  und gehe mit dem neuen Baum zu 3.

Inzidiert  $y$  nicht mit  $M$ , so ist der im Baum  $T$  eindeutig bestimmte Weg von  $a$  nach  $x$ , zusammen mit der Ecke  $y$  und der Kante  $k$ , ein  $M$ -zunehmender Weg  $W$  in  $G$ . Nun setze man  $M = M \Delta K(W)$  und gehe zu 2.

**Definition 6.7.** Es sei  $G$  ein bipartiter Graph mit der Bipartition

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \quad \text{und} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}.$$

Die  $p \times q$  Matrix  $(m_G(a_i, b_j)) = (m(a_i, b_j))$  heißt *Partitionsmatrix*.

**Bemerkung 6.4.** Bipartite Graphen werden durch Partitionsmatrizen übersichtlich dargestellt, und sie sind durch ihre Partitionsmatrizen eindeutig bestimmt.

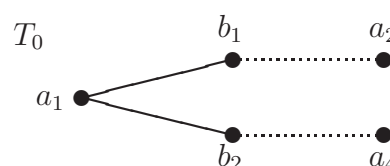
**Beispiel 6.4.** Ein bipartiter Graph  $G$  sei durch folgende Partitionsmatrix gegeben.

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$
$a_1$	1	1						
$a_2$	1	1						
$a_3$		1			1			
$a_4$	1	1						
$a_5$		1	1	1		1	1	1
$a_6$			1	1	1	1		1
$a_7$					1		1	

Mit Hilfe der Ungarischen Methode wollen wir ein maximales Matching von  $G$  bestimmen. Dabei starten wir z.B. mit dem gesättigten Matching

$$M_0 = \{a_2b_1, a_4b_2, a_5b_7, a_6b_5\}.$$

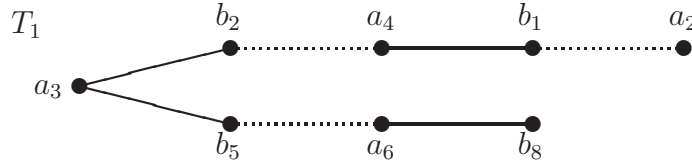
Die Ecke  $a_1$  inzidiert nicht mit  $M_0$ , und der skizzierte  $M_0$ -alternierende Wurzelbaum  $T_0$  mit der Wurzel  $a_1$  ist gesättigt.





Da es in  $T_0$  offensichtlich keinen  $M_0$ -zunehmenden Weg von  $a_1$  aus gibt, können wir die Ecke  $a_1$  aus  $G$  entfernen.

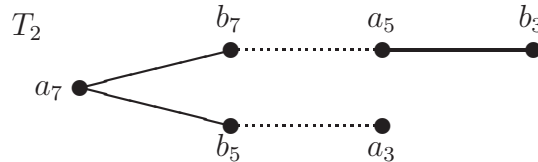
Die Ecke  $a_3$  inzidiert auch nicht mit  $M_0$ , und wir betrachten z.B. den skizzierten  $M_0$ -alternierenden Wurzelbaum  $T_1$  mit der Wurzel  $a_3$ .



Da die Ecke  $b_8$  nicht mit  $M_0$  inzidiert, ist  $(a_3, b_5, a_6, b_8)$  ein  $M_0$ -zunehmender Weg, und das Kantenaustauschverfahren liefert uns das Matching

$$M_1 = \{a_2b_1, a_3b_5, a_4b_2, a_5b_7, a_6b_8\}.$$

Die Ecke  $a_7$  inzidiert nicht mit  $M_1$ , und wir betrachten z.B. den skizzierten  $M_1$ -alternierenden Wurzelbaum  $T_2$  mit der Wurzel  $a_7$ .



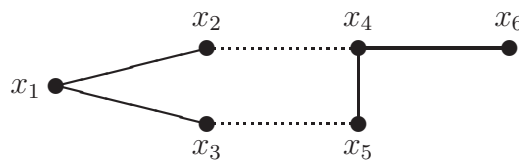
Da die Ecke  $b_3$  nicht mit  $M_1$  inzidiert, ist  $(a_7, b_7, a_5, b_3)$  ein  $M_1$ -zunehmender Weg, und das Kantenaustauschverfahren liefert uns das Matching

$$M_2 = \{a_2b_1, a_3b_5, a_4b_2, a_5b_3, a_6b_8, a_7b_7\},$$

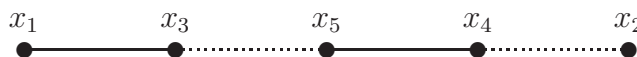
welches notwendig maximal in  $G$  ist.

Das nächste Beispiel wird zeigen, daß der 8. Algorithmus nicht anwendbar ist, wenn der gegebene Graph Kreise ungerader Länge besitzt. Dies liegt daran, daß Teil b) des Satzes 6.17 für solche Graphen keine Gültigkeit hat.

**Beispiel 6.5.** Gegeben sei der skizzierte Graph  $G$  mit dem gesättigten Matching  $M_0 = \{x_2x_4, x_3x_5\}$ .



Die Ecke  $x_1$  inzidiert nicht mit  $M_0$ , und wir betrachten beispielsweise den skizzierten  $M_0$ -alternierenden Wurzelbaum  $T$  mit der Wurzel  $x_1$ .



Offensichtlich ist  $T$  gesättigt, aber in  $G$  existiert der  $M_0$ -zunehmende Weg  $(x_1, x_2, x_4, x_6)$ .

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir einen allgemeinen Matching-Algorithmus beschreiben, der auf Edmonds [1] 1965 zurückgeht (man vgl. dazu auch das Buch von Lovász und Plummer [1], S. 358). Als erstes zeigen wir, daß man die Größe eines Graphen reduzieren kann, falls Kreise auftreten, die eine Gestalt wie im Beispiel 6.5 haben.

**Satz 6.18 (Edmonds [1] 1965).** Es sei  $G$  ein Multigraph und  $M$  ein Matching von  $G$ . Weiter sei  $C$  ein Kreis von  $G$  der Länge  $2p + 1$ , der  $p$  Kanten von  $M$  enthält, und  $C$  besitze genau eine Ecke  $a$ , die nicht zu  $E(M)$  gehört. Entsteht der Graph  $G'$  aus  $G$  durch Zusammenziehen des Kreises  $C$  zu einer Ecke  $u$  und durch Löschung aller dabei auftretenden Schlingen, so ist  $M' = M - K(C)$  genau dann ein maximales Matching von  $G'$ , wenn  $M$  ein maximales Matching von  $G$  ist.

*Beweis.* Ist  $M$  kein maximales Matching von  $G$ , so existiert nach dem Satz von Berge (Satz 6.3) ein  $M$ -zunehmender Weg  $W$  in  $G$ . Im Fall  $E(W) \cap E(C) = \emptyset$  ist  $W$  auch ein  $M'$ -zunehmender Weg in  $G'$  und folglich  $M'$  nicht maximal in  $G'$ . Daher gelte nun  $E(W) \cap E(C) \neq \emptyset$ . Wenigstens einer der beiden Endpunkte von  $W$ , den wir mit  $x$  bezeichnen wollen, gehört nicht zum Kreis  $C$ . Von  $x$  aus gesehen sei  $y$  die erste Ecke, die zu  $C$  und zu  $W$  gehört. Ist  $y = a$  oder  $y \neq a$ , so ist der Teil  $W_{xy}$  des Weges  $W$  von  $x$  nach  $y$ , der in  $G'$  die Gestalt  $W_{xu}$  hat, notwendig ein  $M'$ -zunehmender Weg in  $G'$ , womit  $M'$  auch in diesem Fall nicht maximal ist.

Nun sei umgekehrt  $M'$  kein maximales Matching von  $G'$  und  $N'$  ein Matching von  $G'$  mit  $|N'| > |M'|$ . Dieses Matching  $N'$  entspricht in  $G$  einem Matching  $N$  mit  $|E(N) \cap E(C)| \leq 1$ . Daher kann  $N$  durch  $p$  Kanten des Kreises  $C$  zu einem Matching  $N^*$  in  $G$  ergänzt werden, so daß

$$|N^*| = |N| + p = |N'| + p > |M'| + p = |M|$$

gilt. Daher ist  $M$  kein maximales Matching von  $G$ . ||

Benutzen wir die Bezeichnungen aus Satz 6.18, so liefert uns der Beweis dieses Satzes auch eine Methode, um in  $G$  ein größeres Matching als  $M$  zu konstruieren, falls wir in  $G'$  ein Matching gefunden haben, welches mehr Kanten als  $M'$  besitzt.

Nun wenden wir uns der Beschreibung des allgemeinen Matching-Algorithmus von Edmonds [1] aus dem Jahre 1965 zu.

## 9. Algorithmus

### Algorithmus von Edmonds

Es sei  $M$  ein gesättigtes Matching eines Graphen  $G$ . Ist  $M$  perfekt oder fast-perfekt, so sind wir fertig. Daher gelte für die Eckenmenge  $S = E(G) - E(M)$  die Ungleichung  $|S| \geq 2$ . Ausgehend von  $S$  konstruieren wir einen  $M$ -alternierenden Wald  $H \subseteq G$  mit folgenden Eigenschaften. Jede Komponente von  $H$  enthält genau eine Ecke aus  $S$ , jede Ecke aus  $S$  gehört zu genau einer Komponente von  $H$ , und jede Komponente von  $H$  ist ein  $M$ -alternierender Wurzelbaum mit einer Wurzel aus  $S$ . Darüber hinaus soll jede Ecke aus  $H$ , die nicht in  $S$  liegt, mit einer Kante aus  $M \cap K(H)$  inzidieren. Unter diesen Voraussetzungen haben alle Ecken von  $H$ , die eine ungerade Entfernung von  $S$  besitzen, den Eckengrad 2 in  $H$ , und man nennt sie *innere Ecken* von  $H$ , während die verbleibenden Ecken *äußere Ecken* von  $H$  heißen. Der Nullgraph, der aus der Eckenmenge  $S$  besteht, ist ein solcher  $M$ -alternierender Wald.

Gibt es in  $H$  eine äußere Ecke  $x$ , die zu einer Ecke  $y$  adjazent ist, die nicht zu  $H$  gehört, so gilt  $y \notin S$ . Daher existiert eine Kante  $l \in M$  mit  $l = yz$ , und es gilt  $z \notin E(H)$ . Ist  $k = xy$ , so können wir den Wald  $H$  durch Hinzufügen der Ecken  $y, z$  und der Kanten  $l, k$  vergrößern.

Gibt es in  $H$  zwei äußere Ecken  $x$  und  $y$ , die zu zwei verschiedenen Komponenten von  $H$  gehören und adjazent sind, so sind die beiden Wurzeln dieser Komponenten durch einen  $M$ -zunehmenden Weg verbunden. Daraus gewinnen wir auf die übliche Weise ein Matching  $M^*$  mit  $|M^*| = |M| + 1$ . Mit dem Matching  $M^*$  beginne man die Prozedur von neuem.

Existieren in einer Komponente  $T$  von  $H$  mit der Wurzel  $a$  zwei äußere Ecken  $x$  und  $y$ , die durch eine Kante  $k$  verbunden sind, so sei  $C$  der Kreis, der sich aus dem eindeutigen Weg von  $x$  nach  $y$  in  $T$  und der Kante  $k$  zusammensetzt. Ist  $W$  der (eindeutige) kürzeste Weg in  $T$  von  $a$  nach  $E(C)$ , so ist  $W$   $M$ -alternierend. Darüber hinaus beginnt  $W$  mit einer Kante aus  $K(G) - M$  und endet mit einer Kante aus  $M$ , oder  $W$  ist der Nullweg. Tauscht man in  $W$  die Kanten von  $M$  gegen die Kanten von  $K(G) - M$  aus, so erhält man erneut ein Matching  $M_1$  mit  $|M_1| = |M|$ . Das neue Matching  $M_1$  und der Kreis  $C$  erfüllen die Voraussetzungen von Satz 6.18. Daher genügt es nun, in dem kleineren Graphen  $G'$  nach einem Matching zu suchen, das größer ist als  $M_1 - K(C)$ .

Als letzte Möglichkeit setzen wir voraus, daß jede äußere Ecke von  $H$  nur Nachbarn in  $G$  hat, die innere Ecken von  $H$  sind. In diesem Fall wird sich herausstellen, daß  $M$  ein maximales Matching von  $G$  ist. Denn gibt es  $r$  innere Ecken  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\} = I$  und  $p$  äußere Ecken  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} = A$  von  $H$ , so gilt  $p - r = |S|$ . Darüber hinaus sind alle Ecken aus  $A$  isolierte Ecken im Graphen  $G - I$ . Bezeichnet man mit  $q(G - I)$  die Anzahl der Komponenten ungerader Ordnung von  $G - I$ , so folgt daraus

$$n(G) - 2|M| = |S| = p - r \leq q(G - I) - |I|.$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich zusammen mit Folgerung 7.1 (man vgl. Abschnitt 7.1), daß  $M$  ein maximales Matching von  $G$  ist.

Zusammenfassend wird bei dem Algorithmus von Edmonds immer einer der folgenden Schritte durchgeführt:

1. Der  $M$ -alternierende Wald  $H$  wird vergrößert.
2. Das Matching  $M$  wird vergrößert.
3. Die Anzahl  $|E(G)|$  der Ecken von  $G$  wird verkleinert.
4. Der Algorithmus stoppt mit einem maximalen Matching.

Von daher kann man sich überlegen, daß auch dieser Algorithmus effizient ist.

Für Verallgemeinerungen, Verfeinerungen und Erweiterungen des neunten Algorithmus vgl. man z.B. Jungnickel [1] 1987, Lovász und Plummer [1] 1986 oder Papadimitriou und Steiglitz [1] 1982.

## 6.5 Aufgaben

**Aufgabe 6.1.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $M$  ein gesättigtes Matching von  $G$ . Man beweise  $\delta(G) \leq 2|M|$ .

**Aufgabe 6.2.** Ist  $G$  ein Graph, und sind  $M_1, M_2, M_3$  drei Matchings von  $G$ , so zeige man:

- i) Für jede Ecke  $x$  des Graphen  $H = G[M_1 \cup M_2 \cup M_3]$  gilt notwendig  $1 \leq d(x, H) \leq 3$ .

- ii) Sind  $M_1$  und  $M_2$  maximale Matchings, so hat jede Komponente von  $G[M_1 \Delta M_2]$  eine gerade Anzahl von Kanten.
- iii) Sind  $M_1$  und  $M_2$  perfekt, so ist  $G[M_1 \Delta M_2]$  2-regulär.

**Aufgabe 6.3.** Besitzt ein schlichter Graph  $G$  vier paarweise kantendisjunkte perfekte Matchings, so zeige man  $6\kappa(G) \leq n(G)$ .

**Aufgabe 6.4.** Man bestimme alle nicht isomorphen, schlichten Graphen  $G$  mit  $n(G) = 11$ , die aus drei Komponenten  $G_1, G_2$  und  $G_3$  bestehen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- i)  $G_1$  ist Eulersch und regulär.
- ii)  $G_2$  besitzt genau eine Brücke.
- iii)  $G_3$  ist in zwei kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegbar.

**Aufgabe 6.5.** Es sei  $M$  ein beliebiges und  $M_0$  ein gesättigtes Matching eines Graphen. Man beweise oder widerlege die folgende Ungleichung:  $|E(M) \cap E(M_0)| \geq |M|$ .

**Aufgabe 6.6.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph gerader Ordnung,  $M$  ein nicht perfektes Matching von  $G$  und  $H = G - E(M)$ . Unter der Voraussetzung  $2\delta(H) \geq |E(H)|$  zeige man, daß in  $G$  ein perfektes Matching  $M^*$  existiert mit  $M \subseteq M^*$ .

**Aufgabe 6.7.** Man beweise Bemerkung 6.3.

**Aufgabe 6.8.** Man bestimme alle nicht isomorphen, schlichten Graphen  $G$  mit  $n(G) = 14$ , die aus drei Komponenten  $G_1, G_2$  und  $G_3$  bestehen, die den folgenden Bedingungen genügen:

- i)  $G_1$  ist Eulersch und besitzt ein perfektes Matching.
- ii)  $\mu(G_2) = 0$  und  $|\Gamma(G_2)| = 4$ .
- iii)  $G_3$  ist Hamiltonsch mit  $\nu(G_3) = 6$ .

**Aufgabe 6.9.** Zwei Spieler "spielen auf einem Graphen  $G$ " auf folgende Weise. Die beiden Spieler wählen abwechselnd verschiedene Ecken  $a_0, a_1, \dots$  ( $a_i \neq a_j$  für  $i \neq j$ ) des Graphen, und zwar so, daß  $a_{i+1}$  und  $a_i$  ( $i \geq 0$ ) adjazent sind. Derjenige Spieler gewinnt, der in der Lage ist, die letzte Ecke zu wählen.

Man zeige, daß derjenige Spieler, der die erste Ecke wählt, genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn  $G$  kein perfektes Matching besitzt.

**Aufgabe 6.10.** Man zeige, daß ein Baum höchstens ein perfektes Matching besitzt.

**Aufgabe 6.11.** Beim Zusammentreffen von 6 Personen gibt es immer 3 Personen, die sich untereinander kennen oder 3 Personen, die sich gegenseitig nicht kennen.

**Aufgabe 6.12.** Es sei  $M$  ein gesättigtes Matching in einem Graphen  $G$  und  $W$  ein  $M$ -zunehmender Weg. Man zeige, daß dann auch das Matching  $M' = M \Delta K(W)$  in  $G$  gesättigt ist.

**Aufgabe 6.13.** Es sei  $G$  ein schlichter bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ . Man zeige, daß  $G$  ein Matching  $M$  besitzt mit

$$|M| \geq \min\{|A|, |B|, 2\delta(G)\}.$$

**Aufgabe 6.14.** Es sei  $G$  ein Baum und  $M$  ein Matching von  $G$ . Enthält  $M$  keine Endkante von  $G$ , so zeige man, daß  $M$  nicht maximal ist.

**Aufgabe 6.15.** Es sei  $G$  ein bipartiter Graph ohne isolierte Ecken mit der Bipartition  $A, B$ .

Ist  $|A| = |B| = n$  und gilt

$$|N(u, G) \cup N(v, G)| \geq \frac{n}{2}$$

für je zwei verschiedene, nicht adjazente Ecken  $u$  und  $v$  von  $G$ , so zeige man, daß  $G$  ein perfektes Matching besitzt.

**Aufgabe 6.16.** Es sei  $G$  ein Multigraph. Man zeige:

- Ist  $x \in E(G)$  mit  $d(x, G) \geq 1$  beliebig gegeben, so existiert ein maximales Matching  $M$  mit  $x \in E(M)$ .
- Ist  $G$  bipartit und  $r$ -regulär ( $r > 0$ ), und ist  $k$  eine beliebige Kante von  $G$ , so existiert ein maximales Matching  $M$  mit  $k \in M$ .
- Man gebe ein Beispiel an, das zeigt, daß Teil b) für allgemeine reguläre Multigraphen nicht gilt.

**Aufgabe 6.17.** Es sei  $p \geq 2$  eine natürliche Zahl und  $G$  ein schlichter  $(2p + 1)$ -regulärer Graph der Ordnung  $n$  mit  $2p + 1 < n \leq 4p + 1$ . Man zeige, daß  $G$  einen Eulerschen Faktor  $G'$  mit  $\delta(G') \geq 3$  besitzt.

**Aufgabe 6.18.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $a, b$  zwei verschiedene nicht adjazente Ecken von  $G$  mit  $d(a, G) + d(b, G) \geq n(G) - 1$ . Man zeige, daß  $G$  genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn  $G + ab$  ein perfektes Matching besitzt.

**Aufgabe 6.19.** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $n \geq 4$ , so daß jede Kante von  $G$  zu einem perfekten Matching gehört. Man zeige, daß  $G$  2-fach eckenzusammenhängend ist.

**Aufgabe 6.20.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 2s$  und Minimalgrad  $\delta \geq s$  für ein  $s \in \mathbb{N}$ . Ist  $M$  ein maximales Matching von  $G$ , so zeige man  $|M| \geq s$ .

**Aufgabe 6.21.** Man bestimme die Anzahl der verschiedenen perfekten Matchings im vollständigen Graphen  $K_{2n}$ .

**Aufgabe 6.22.** Es sei  $G$  ein  $r$ -regulärer bipartiter Graph mit  $r \geq 2$ . Man zeige, daß  $G$  keine Brücken hat.

# Kapitel 7

## Faktortheorie

### 7.1 Der 1-Faktorsatz von Tutte

**Definition 7.1.** Ein Teilgraph  $H$  eines Graphen  $G$  mit  $E(H) = E(G)$  heißt *Faktor* von  $G$ . Ist  $f : E(G) \rightarrow \mathbf{N}_0$  eine Funktion und  $H$  ein Faktor von  $G$  mit  $d(x, H) = f(x)$  für alle  $x \in E(G)$ , so nennen wir  $H$  einen  $f$ -Faktor von  $G$ . Im Fall  $f(x) \equiv r$  sprechen wir auch von einem  $r$ -Faktor.

Es seien  $H_1, H_2, \dots, H_q$  Faktoren von  $G$  mit  $K(G) = \bigcup_{i=1}^q K(H_i)$  und  $K(H_i) \cap K(H_j) = \emptyset$  für  $1 \leq i < j \leq q$ . Dann heißt  $G$  *faktorisiert* durch die Faktoren  $H_1, H_2, \dots, H_q$ . Sind dabei alle  $H_i$  sogar  $r$ -Faktoren, so nennt man  $G$  auch  *$r$ -faktorisiert*.

Zum besseren Verständnis der neuen Begriffe geben wir zunächst ein paar einfache Beispiele.

**Beispiel 7.1.** i) Jeder Kreis gerader Länge ist 1-faktorisiert.

ii) Jeder Hamiltonsche Graph besitzt einen 2-Faktor.

iii) Der vollständige Graph  $K_5$  ist 2-faktorisiert.

iv) Da jeder 3-reguläre und Hamiltonsche Graph  $G$  gerade Ordnung hat, erkennt man zusammen mit i), daß  $G$  dann 1-faktorisiert ist.

Da jeder 1-Faktor einem perfekten Matching entspricht und umgekehrt, kann man die Faktortheorie als eine Fortführung der Matchingtheorie ansehen. Einige interessante Ergebnisse über Faktoren haben wir in den vorangegangenen Kapiteln schon kennengelernt, z.B.

**Satz (Satz 2.13).** Jeder zusammenhängende Graph hat einen Baumfaktor.

**Satz (Satz 6.9 (König [1] 1916)).** Jeder bipartite und  $r$ -reguläre ( $r > 0$ ) Graph besitzt einen 1-Faktor.

**Satz (Satz 6.10 (König [1] 1916)).** Jeder bipartite und  $r$ -reguläre ( $r > 0$ ) Graph ist 1-faktorisiert.

Mit einer völlig neuen Idee konnte Tutte [1] 1947 durch eine bemerkenswerte Bedingung alle Graphen charakterisieren, die einen 1-Faktor besitzen. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff.

**Definition 7.2.** Ist  $G$  ein Graph, so bedeutet  $q(G)$  die Anzahl der Komponenten ungerader Ordnung des Graphen  $G$  (kurz: die Anzahl der ungeraden Komponenten von  $G$ ).

**Satz 7.1 (1-Faktorsatz, Tutte [1] 1947).** Ein Graph  $G = (E, K)$  besitzt genau dann

einen 1-Faktor, wenn für alle  $A \subseteq E$  gilt:

$$q(G - A) \leq |A| \quad (7.1)$$

*Beweis* (Anderson [1] 1971). i) Besitzt  $G$  einen 1-Faktor  $H$ , und ist  $A \subseteq E$ , so bezeichnen wir mit  $U_1, U_2, \dots, U_q$  die ungeraden Komponenten von  $G - A$ . Da jede Komponente  $U_i$  eine ungerade Anzahl von Ecken besitzt, muß zu jeder Komponente  $U_i$  eine Kante des Faktors existieren, die mit einer Ecke  $a_i \in A$  und einer Ecke  $u_i \in E(U_i)$  inzidiert. Da  $H$  ein 1-Faktor ist, sind diese Ecken  $a_i \in A$  paarweise verschieden, womit

$$q(G - A) = q = |\{a_1, a_2, \dots, a_q\}| \leq |A|$$

gilt, und daher die Bedingung (7.1) erfüllt ist.

ii) Wir setzen umgekehrt (7.1) voraus und beweisen die Existenz eines 1-Faktors durch Induktion nach  $|E| = n \geq 2$ .

Für  $A = \emptyset$  ergibt sich sofort, daß  $G$  keine ungeraden Komponenten besitzt, also  $n$  gerade ist.

Daher muß  $G$  im Fall  $n = 2$  zusammenhängend sein und somit einen 1-Faktor enthalten.

Es sei nun  $n \geq 4$ . Ist  $x \in E$ , so besteht  $G - x$  aus einer ungeraden Anzahl von Ecken und besitzt daher mindestens eine ungerade Komponente. Setzt man in (7.1)  $A = \{x\}$ , so folgt insgesamt

$$q(G - x) = |\{x\}| = 1. \quad (7.2)$$

Nun wählen wir  $|T|$  maximal mit  $T \subseteq E$  und

$$q(G - T) = |T|. \quad (7.3)$$

Im folgenden zeigen wir in drei Schritten, daß  $G$  einen 1-Faktor besitzt.

a) Der Teilgraph  $G - T$  enthält keine geraden Komponenten, denn ist  $V$  eine gerade Komponente mit  $a \in E(V)$ , so ergibt sich aus (7.1) und (7.3) nachstehender Widerspruch zur Maximalität von  $|T|$ :

$$|T| + 1 = 1 + q(G - T) \leq q(G - (T \cup \{a\})) \leq |T \cup \{a\}| = |T| + 1$$

b) Es seien  $U_1, U_2, \dots, U_t$  die ungeraden Komponenten von  $G - T$ . Ist  $x \in E(U_i)$ , so zeigen wir, daß  $H = U_i - x$  einen 1-Faktor besitzt.

Wir nehmen an, dies sei falsch. Dann existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Menge  $S \subseteq E(H)$  mit

$$q(H - S) \geq |S| + 1. \quad (7.4)$$

Da  $|E(H)|$  gerade ist, muß  $q(H - S) - |S|$  ebenfalls gerade sein, denn ist  $|S|$  ungerade, so auch  $|E(H) - S|$  und damit  $q(H - S)$  ungerade, ist  $|S|$  gerade, so auch  $|E(H) - S|$  und damit  $q(H - S)$  gerade. Daher liefert (7.4) sogar

$$q(H - S) \geq |S| + 2. \quad (7.5)$$

Zusammen mit (7.1) und (7.3) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} |T| + |S| + 1 &= |T \cup S \cup \{x\}| \geq q(G - (T \cup S \cup \{x\})) \\ &= q(G - T) - 1 + q(H - S) \\ &\geq |T| - 1 + |S| + 2 = |T| + |S| + 1, \end{aligned}$$



im Widerspruch zur Maximalität von  $|T|$ .

c) Wegen  $|T| = t$  genügt es zu zeigen, daß es  $t$  nicht inzidente Kanten gibt, die alle Komponenten  $U_1, U_2, \dots, U_t$  mit  $T$  verbinden. Denn sind  $y_i \in E(U_i)$  die  $t$  Ecken, die mit diesen  $t$  Kanten inzidieren, so existiert nach b) in jedem Graphen  $U_i - y_i$  ein 1-Faktor, womit wir dann insgesamt einen 1-Faktor von  $G$  gefunden haben.

Um diese gewünschten  $t$  Kanten zu finden, konstruieren wir einen bipartiten Graphen  $B$  auf der Eckenmenge  $U = \{U_1, U_2, \dots, U_t\}$  und  $T$ , wobei die Ecken  $U_i$  und  $a_j \in T$  genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn in  $G$  mindestens eine Kante von  $a_j$  in die Komponente  $U_i$  führt. Unsere Behauptung ist gleichbedeutend mit der Existenz eines perfekten Matchings in  $B$ . Dies zeigen wir wieder mit dem Satz von König-Hall.

Für  $X \subseteq U$  gilt natürlich  $R = N(X, B) \subseteq T$ . Ist  $X = \{U'_1, U'_2, \dots, U'_r\}$ , so besitzt  $G - R$  mindestens die Komponenten  $U'_1, U'_2, \dots, U'_r$ , womit  $|X| \leq q(G - R)$  gilt. Zusammen mit unserer Voraussetzung (7.1) folgt daher für alle  $X \subseteq U$

$$|X| \leq q(G - R) \leq |R| = |N(X, B)|,$$

womit die bekannte Bedingung des Satzes von König-Hall erfüllt ist, also  $B$  ein perfektes Matching besitzt. ||

Als nächstes wollen wir einige interessante Anwendungen des 1-Faktorsatzes von Tutte vorstellen.

**Satz 7.2 (Little, Grant, Holton [1] 1975).** Es sei  $G$  ein Multigraph gerader Ordnung. Jede Kante von  $G$  gehört zu einem 1-Faktor genau dann, wenn für alle  $A \subseteq E(G)$  gilt:

$$q(G - A) \leq |A| \text{ und} \tag{7.6}$$

$$q(G - A) = |A| \text{ impliziert } G[A] \text{ ist ein Nullgraph.} \tag{7.7}$$

*Beweis.* Setzen wir voraus, daß jede Kante zu einem 1-Faktor gehört, so liefert der 1-Faktorsatz sofort (7.6). Nun gelte  $q(G - A) = |A|$ , und wir nehmen an, daß  $G[A]$  eine Kante  $k = xy$  enthält. Dann besitzt  $G$  einen 1-Faktor  $H$ , der die Kante  $k$  enthält. Darüber hinaus enthält  $H$  weitere  $q(G - A)$  Kanten die die  $q(G - A)$  ungeraden Komponenten mit Ecken aus  $A - \{x, y\}$  verbinden. Daraus ergibt sich aber der Widerspruch  $|A| \geq q(G - A) + 2$ .

Nun seien umgekehrt (7.6) und (7.7) erfüllt. Ist  $k = xy$  eine beliebige Kante aus  $G$ , so zeigen wir im folgenden, daß  $G - \{x, y\}$  einen 1-Faktor besitzt.

Es sei  $S \subseteq E(G) - \{x, y\}$  eine beliebige Teilmenge. Beachtet man wieder, daß  $q(G - A)$  und  $|A|$  für alle  $A \subseteq E(G)$  von gleicher Parität sind, so folgt aus (7.7) für  $A = S \cup \{x, y\}$

$$q((G - \{x, y\}) - S) = q(G - (S \cup \{x, y\})) \leq |S \cup \{x, y\}| - 2 = |S|.$$

Daher hat  $G - \{x, y\}$  nach dem 1-Faktorsatz von Tutte einen 1-Faktor, und der Beweis ist vollbracht. ||

Eine interessante Erweiterung von Satz 7.2 findet man in einer Arbeit von Liu und Yu [1] aus dem Jahre 2001.

**Satz 7.3 (Wallis [1] 1981).** Es sei  $G$  ein schlichter und  $r$ -regulärer ( $r \geq 3$ ) Graph der Ordnung  $n$  ohne ungerade Komponenten. Besitzt  $G$  keinen 1-Faktor, so gilt

$$n \geq 3r + 4, \text{ wenn } r \geq 6 \text{ gerade,} \tag{7.8}$$

$$n \geq 3r + 7, \text{ wenn } r \geq 3 \text{ ungerade,} \tag{7.9}$$

$$n \geq 22, \text{ wenn } r = 4. \tag{7.10}$$

*Beweis.* Da  $G$  aus geraden Komponenten besteht und keinen 1-Faktor besitzt, existiert nach dem 1-Faktorsatz eine Eckenmenge  $S \neq \emptyset$  mit  $q(G - S) \geq |S| + 1$ . Da  $n$  gerade ist folgt wie im Beweis des 1-Faktorsatzes sogar  $q(G - S) \geq |S| + 2$ .

Eine ungerade Komponente von  $G - S$  heißt "groß", wenn sie mindestens  $r + 1$  Ecken besitzt und andernfalls "klein". Ist  $\alpha$  die Anzahl der großen und  $\beta$  die Anzahl der kleinen Komponenten von  $G - S$ , so ergibt sich aus  $q(G - S) \geq |S| + 2$  sofort

$$\alpha + \beta \geq |S| + 2. \quad (7.11)$$

Ist  $U$  eine kleine Komponente von  $G - S$  mit  $|E(U)| = p \leq r$ , so folgt aus der  $r$ -Regularität von  $G$ , daß es mindestens  $p(r - (p - 1))$  Kanten von  $U$  nach  $S$  gibt. Wegen  $1 \leq p \leq r$ , zeigt man leicht  $p(r - (p - 1)) \geq r$ , womit jede kleine Komponente durch mindestens  $r$  Kanten mit  $S$  verbunden ist. Da  $G$  keine ungeraden Komponenten besitzt, ist jede große Komponente durch mindestens eine Kante mit  $S$  verbunden. Damit gehen mindestens  $\alpha + r\beta$  Kanten von den ungeraden Komponenten nach  $S$ . Daraus ergibt sich

$$\alpha + r\beta \leq r|S|, \quad (7.12)$$

denn es inzidieren natürlich höchstens  $r|S|$  Kanten mit  $S$ . Da jede große Komponente mindestens  $r + 1$  Ecken besitzt, ja sogar mindestens  $r + 2$  Ecken, wenn  $r$  ungerade ist, gilt

$$n \geq |S| + \alpha(r + 1) + \beta, \quad \text{wenn } r \geq 4 \text{ gerade,} \quad (7.13)$$

$$n \geq |S| + \alpha(r + 2) + \beta, \quad \text{wenn } r \geq 3 \text{ ungerade} \quad (7.14)$$

Aus (7.12) folgt  $\beta \leq |S|$  und daher liefert (7.11)  $\alpha \geq 2$ . Wenden wir nochmals (7.12) an, so erhalten wir  $\beta < |S|$  und daher wegen (7.11) sogar  $\alpha \geq 3$ . Beachten wir noch  $|S| \geq 1$ , so folgen (7.8) und (7.9) aus (7.13) und (7.14).

Im Fall  $r = 4$  zeigt das Handschlaglemma, daß jede große Komponente von  $G - S$  mindestens 2 Kanten nach  $S$  sendet. Daraus ergibt sich  $2\alpha + 4\beta \leq 4|S|$ . Aus (7.11) folgt

$$2\alpha + 2\beta \geq 2|S| + 4 \geq \alpha + 2\beta + 4$$

und daher  $\alpha \geq 4$ . Nun ergibt sich aus (7.13) sofort  $n \geq 21$  und weil  $n$  gerade ist sogar die gewünschte Abschätzung (7.10). ||

Wallis [1] hat Beispiele konstruiert, die zeigen, daß Satz 7.3 bestmöglich ist. Betrachtet man die Fälle  $r = 1$  oder  $r = 2$  in Satz 7.3, so sieht man unmittelbar, daß ein solcher Graph immer einen 1-Faktor besitzt. Mit der gleichen Beweismethode konnte Zhao [1] den Fall  $r \geq 6$  gerade in Satz 7.3 durch folgendes Resultat erweitern.

**Satz 7.4 (Zhao [1] 1991).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  ohne ungerade Komponenten mit  $r \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq r + 1$  für eine ganze Zahl  $r \geq 2$ . Besitzt  $G$  keinen 1-Faktor, so gilt  $n \geq 3r + 4$ .

In dem Sinne, wie Ore 1955 den Satz von König-Hall (Satz 6.7) erweitert hat, gelang es Berge 1958 den 1-Faktorsatz von Tutte zu verallgemeinern.

**Definition 7.3.** Sind  $G$  und  $H$  zwei disjunkte Graphen, so besteht die *Summe*  $G + H$  aus  $G \cup H$  und den Kanten, die alle Ecken von  $G$  mit allen Ecken von  $H$  verbinden.

**Satz 7.5 (Tutte, Berge, Berge [2] 1958).** Ist  $G$  ein Graph der Ordnung  $n$  und  $M$  ein maximales Matching von  $G$ , so gilt

$$n - 2|M| = \max_{A \subseteq E(G)} \{q(G - A) - |A|\}. \quad (7.15)$$

*Beweis* (McCarthy [1] 1973). Wir setzen  $n - 2|M| = t \geq 0$ , und die rechte Seite von (7.15) bezeichnen wir mit  $s$ . Mit  $A = \emptyset$  ergibt sich  $s \geq 0$ . Zu zeigen ist:  $s = t$ .

i) Um  $s \leq t$  zu beweisen, betrachten wir den Graphen  $H = G + K_t$ . Der Graph  $H$  besitzt ein perfektes Matching, denn die  $t$  Ecken in  $G$ , die nicht mit dem maximalen Matching  $M$  inzidieren, kann man in  $H$  mit den Ecken des vollständigen Graphen durch  $t$  paarweise nicht inzidente Kanten verbinden. Damit gilt in  $H$  die Ungleichung (7.1) für alle  $B \subseteq E(H)$ . Wählt man speziell  $B = A \cup E(K_t)$  mit  $A \subseteq E(G)$ , so ergibt sich zusammen mit (7.1)

$$q(G - A) = q(H - B) \leq |B| = |A| + t$$

und daher

$$s = \max_{A \subseteq E(G)} \{q(G - A) - |A|\} \leq t.$$

ii) Um  $t \leq s$  nachzuweisen, betrachten wir zunächst den Fall  $s = 0$ . Dann besitzt  $G$  nach dem 1-Faktorsatz einen 1-Faktor, woraus sich auch  $t = 0$  ergibt. Ist  $s \geq 1$ , so setzen wir  $T = G + K_s$ . Für den zusammenhängenden Graphen  $T$  zeigen wir nun  $q(T - S) \leq |S|$  für alle  $S \subseteq E(T)$ .

a) Ist  $S = A \cup E(K_s)$  mit  $A \subseteq E(G)$ , so gilt

$$q(T - S) = q(G - A) \leq |A| + s = |S|.$$

b) Ist  $S \cap E(K_s) \neq E(K_s)$  und  $S \neq \emptyset$ , so besteht  $T - S$  aus einer Komponente, und es gilt  $q(T - S) \leq 1 \leq |S|$ .

c) Es verbleibt der Fall  $S = \emptyset$ . Ist  $n$  gerade, so ist  $q(G - A) - |A|$  gerade für alle  $A \subseteq E(G)$  (man vgl. Teil b) des Beweises vom 1-Faktorsatz). Daher muß notwendig  $s$  gerade, also  $|E(T)| = n + s$  gerade sein. Ist  $n$  ungerade, so ist  $q(G - A) - |A|$  für alle  $A \subseteq E(G)$  ungerade. Denn ist  $|A|$  ungerade, so ist  $q(G - A)$  gerade, und ist  $|A|$  gerade, so ist  $q(G - A)$  ungerade. Daher muß  $s$  ungerade, also  $|E(T)| = n + s$  wieder gerade sein. Da  $T$  zusammenhängend ist, folgt schließlich für  $S = \emptyset$ :

$$q(T - S) = q(T) = 0 = |S|$$

Zusammen zeigen a), b) und c), daß  $T$  die Bedingung (7.1) erfüllt, womit  $T$  einen 1-Faktor besitzt. Dieser 1-Faktor hat maximal  $s$  Kanten, die nicht in  $G$  liegen, und deshalb gilt für jedes maximale Matching  $M$  in  $G$  die Ungleichung  $2|M| \geq n - s$ , also  $s \geq n - 2|M| = t$ . ||

**Folgerung 7.1.** Es sei  $G$  ein Graph der Ordnung  $n$ . Ist  $M$  ein Matching von  $G$  und  $S \subseteq E(G)$  mit

$$n - 2|M| \leq q(G - S) - |S|,$$

so ist  $M$  ein maximales Matching von  $G$ .

*Beweis.* Ist  $M^*$  ein maximales Matching von  $G$ , so folgt aus (7.15) und der Voraussetzung

$$n - 2|M| \leq q(G - S) - |S| \leq n - 2|M^*|,$$

also  $|M^*| \leq |M|$ , womit  $M$  maximal ist. ||

Andere Beweise der Sätze 7.1 bzw. 7.5 findet man bei Lovász [3] 1975, Mader [3] 1973 und Woodall [1] 1973.

Verwendet man an Stelle des 1-Faktorsatzes den Satz von Tutte-Berge, so kann man mit höherem technischen Aufwand das folgende Analogon zu Satz 7.4 beweisen, aus dem sich Satz 7.4 dann leicht ergibt.

**Satz 7.6 (Volkmann [16] 2004).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit genau einer ungeraden Komponente, so daß  $r \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq r + 1$  für eine ganze Zahl  $r \geq 2$  gilt. Besitzt  $G$  kein fast-perfektes Matching, so gilt

$$n \geq 4r + 5, \quad (7.16)$$

$$n \geq 4r + 7, \text{ wenn } r \geq 3 \text{ ungerade oder } r = 2 \text{ und } \kappa(G) = 1, \quad (7.17)$$

$$n \geq 4r + 9, \text{ wenn } r \geq 3 \text{ ungerade und } \kappa(G) = 1. \quad (7.18)$$

Wir wollen diesen Satz nicht beweisen aber zeigen, wie sich Satz 7.4 von Zhao aus diesem Resultat herleiten läßt.

*Beweis von Satz 7.4 mit Hilfe von Satz 7.6.* Angenommen, es gibt einen schlichten Graphen  $G$  ohne ungerade Komponenten und ohne 1-Faktor mit  $r \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq r + 1$ , so daß  $n(G) \leq 3r + 3$  gilt.

Ist  $r$  gerade, so ist die disjunkte Vereinigung  $H = G \cup K_{r+1}$  ein schlichter Graph mit genau einer ungeraden Komponente und  $r \leq \delta(H) \leq \Delta(H) \leq r + 1$ , der kein fast-perfektes Matching besitzt. Wegen  $n(G) \leq 3r + 3$  erhalten wir den Widerspruch  $n(H) \leq 4r + 4$  zu (7.16).

Ist  $r$  ungerade, so ist die disjunkte Vereinigung  $H = G \cup K_{r+2}$  ein schlichter Graph mit genau einer ungeraden Komponente und  $r \leq \delta(H) \leq \Delta(H) \leq r + 1$ , der kein fast-perfektes Matching besitzt. Wegen  $n(G) \leq 3r + 3$  erhalten wir den Widerspruch  $n(H) \leq 4r + 5$  zu (7.17). ||

Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Sätze 7.3, 7.4 und 7.6 findet man in Arbeiten von Klinckenberg und Volkmann [1, 2, 3].

Beim Beweis der Resultate von König spielte der Satz 6.7 von König-Hall für bipartite Graphen, und dabei die bekannte König-Hall Bedingung  $|N(S)| \geq |S|$  für alle  $S \subseteq A$ , eine zentrale Rolle, wobei  $A, B$  eine Bipartition des bipartiten Graphen ist. Die Bedeutung der König-Hall Bedingung für beliebige Graphen wurde 1953 von Tutte [3] geklärt.

**Definition 7.4.** Es sei  $G$  ein Graph und  $g, f : E(G) \rightarrow \mathbf{N}_0$  zwei Abbildungen mit  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  für alle  $x \in E(G)$ . Ist  $H$  ein Faktor von  $G$ , der für alle  $x \in E(G)$  die Bedingungen  $g(x) \leq d(x, H) \leq f(x)$  erfüllt, so nennt man  $H$  einen  $(g, f)$ -Faktor von  $G$ . Im Spezialfall  $g(x) \equiv a$  und  $f(x) \equiv b$  sprechen wir auch von einem  $[a, b]$ -Faktor.

Ein  $[a, a + 1]$ -Faktor  $H$  von  $G$  heißt *perfekt*, wenn seine Komponenten entweder  $a$ - oder  $(a + 1)$ -regulär sind.

**Satz 7.7.** [Tutte [3] 1953] Ein Multigraph  $G = (E, K)$  besitzt genau dann einen perfekten  $[1, 2]$ -Faktor, wenn für alle  $S \subseteq E$  die Bedingung  $|S| \leq |N(S, G)|$  erfüllt ist.

*Beweis* (Mader [8] 1988, Niessen [1] 1988). i) Es sei  $H = H_1 \cup H_2$  ein perfekter  $[1, 2]$ -Faktor von  $G$ . Dabei bestehe  $H_1$  aus den 1-regulären und  $H_2$  aus den 2-regulären Komponenten von  $H$ . Ist  $S \subseteq E$ , so setzen wir  $S_1 = S \cap E(H_1)$  und  $S_2 = S \cap E(H_2)$ . Es gilt natürlich  $|S_1| = |N(S_1, H)|$ . Ferner folgt aus der Nachbarschaftsungleichung bzw. aus Folgerung 1.4

$$2|S_2| \leq 2|N(S_2, H_2)| = 2|N(S_2, H)|,$$

also  $|S_2| \leq |N(S_2, H)|$ . Da  $N(S_1, H)$  und  $N(S_2, H)$  disjunkt sind, ergibt sich die gewünschte Bedingung

$$|S| = |S_1| + |S_2| \leq |N(S_1, H)| + |N(S_2, H)| = |N(S, H)| \leq |N(S, G)|.$$

ii) Es gelte nun  $|S| \leq |N(S, G)|$  für alle  $S \subseteq E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Wir setzen

$$E' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\} \quad \text{und} \quad E'' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$$

mit  $E' \cap E'' = \emptyset$  und  $K' = \{x'_i x''_j | x_i x_j \in K\}$ , womit der neue Graph  $G' = (E' \cup E'', K')$  bipartit ist. Ist  $S' \subseteq E'$  und  $S = \{x_i | x'_i \in S'\}$ , so gilt  $N(S', G') = \{x''_i | x_i \in N(S, G)\}$  und damit

$$|S'| = |S| \leq |N(S, G)| = |N(S', G')|.$$

Daher besitzt  $G'$  wegen  $|E'| = |E''|$  nach dem Satz von König-Hall (Satz 6.7) einen 1-Faktor  $H'$ . Setzen wir

$$M = \{x_i x_j | x'_i x''_j \in K(H')\},$$

so werden wir zeigen, daß die Komponenten des schlichten Faktors  $H = (E, M)$  entweder 1- oder 2-regulär sind.

Es gilt  $1 \leq d(x_i, H) \leq 2$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Daher genügt es zu zeigen: Ist  $d(x_i, H) = 1$  für ein  $x_i \in E$  und  $x_i x_j \in M$ , so gilt  $d(x_j, H) = 1$ .

Nach Voraussetzung existieren  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  mit  $x'_i x''_j, x'_k x''_i \in K(H')$ . Da  $d(x_i, H) = 1$  ist, gilt notwendig  $j = k$ , womit wir  $d(x_j, H) = 1$  gezeigt haben. ||

Als nette Anwendung von Satz 7.7 und der Nachbarschaftsungleichung bzw. Folgerung 1.4 ergibt sich unmittelbar

**Folgerung 7.2.** Jeder  $r$ -reguläre ( $r \geq 1$ ) Multigraph besitzt einen perfekten  $[1, 2]$ -Faktor.

## 7.2 Das $f$ -Faktorproblem

Das allgemeine  $f$ -Faktorproblem kann man mit Hilfe einer geschickten Konstruktion, die auch auf Tutte [4] zurückgeht, in ein 1-Faktorproblem überführen.

**Definition 7.5.** Es sei  $G$  ein Multigraph ohne isolierte Ecken. Ist  $f : E(G) \rightarrow \mathbf{N}_0$  eine Abbildung mit  $f(x) \leq d(x, G)$  für alle  $x \in E(G)$ , so sei  $s(x) = d(x, G) - f(x)$ . Nun ordnen wir jeder Ecke  $x \in E(G)$  zwei disjunkte Mengen zu:

$$\begin{aligned} D(x) &= \{x_k | k \in K(G) \text{ und } k \text{ inzidiert mit } x\} \\ S(x) &= \{x(i) | 1 \leq i \leq s(x)\} \end{aligned}$$

Es gilt  $|D(x)| = d(x, G)$  und  $|S(x)| = s(x)$ . Mit Hilfe dieser beiden Mengen definieren wir einen neuen Graphen  $G^* = G_f^* = (E^*, K^*)$  mit

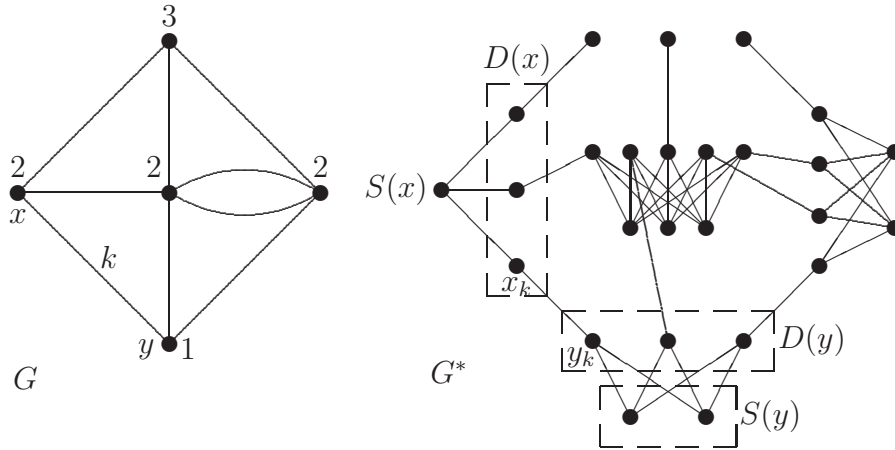
$$E^* = D^* \cup S^*, \quad K^* = L^* \cup M^*,$$

wobei folgendes festgesetzt wird:

$$\begin{aligned} D^* &= \bigcup_{x \in E(G)} D(x), & S^* &= \bigcup_{x \in E(G)} S(x) \\ L^* &= \{x_k y_k | k = xy \in K(G)\} \\ M^* &= \bigcup_{x \in E(G)} \{uv | u \in D(x) \text{ und } v \in S(x)\} \end{aligned}$$

Um die in Definition 7.5 beschriebene Konstruktion besser zu verstehen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

**Beispiel 7.2.** Die Zahlen an den Ecken des Graphen  $G$  bedeuten  $f(x)$ .



**Bemerkung 7.1.** Die Abbildung  $F: K(G) \rightarrow L^*$  mit  $F(k) = x_k y_k$ , wobei  $k = xy$  gilt, ist bijektiv, so daß  $L^*$  genau den Kanten von  $G$  entspricht. Darüber hinaus ist  $L^*$  nach Konstruktion ein Matching von  $G^*$ . Identifiziert man in  $G^*[D^*]$  jeweils alle Ecken aus  $D(x)$  zu einer Ecke, so erhält man einen zu  $G$  isomorphen Graphen. Für jede Ecke  $x \in E(G)$  ist  $G^*[D(x) \cup S(x)] = B^*(x)$  ein vollständiger bipartiter Graph.

**Satz 7.8 (Tutte [4] 1954).** Ein Multigraph  $G$  ohne isolierte Ecken hat genau dann einen  $f$ -Faktor, wenn  $G_f^*$  einen 1-Faktor besitzt.

*Beweis.* i) Hat  $G$  einen  $f$ -Faktor  $H$ , so ist nach Bemerkung 7.1  $F(K(H))$  ein Matching in  $G_f^*$ , und in jeder Eckenmenge  $D(x)$  inzidieren genau  $s(x)$  Ecken nicht mit den Kanten aus  $F(K(H))$ . Diese  $s(x)$  Ecken lassen sich nun leicht durch  $s(x)$  paarweise nicht inzidente Kanten mit  $S(x)$  verbinden, womit wir insgesamt in  $G^*$  einen 1-Faktor erzeugt haben.

ii) Besitzt umgekehrt  $G^*$  einen 1-Faktor mit der Kantenmenge  $J \subseteq K^*$ , so bilden die Kanten  $F^{-1}(J \cap L^*)$  zusammen mit  $E(G)$  einen  $f$ -Faktor von  $G$ . ||

**Bemerkung 7.2.** Damit ein Graph  $G$  einen  $f$ -Faktor besitzt, muß nach dem Handschlaglemma notwendig  $\sum_{x \in E(G)} f(x) \equiv 0 \pmod{2}$  gelten.

**Bemerkung 7.3.** Benutzt man Satz 7.8 und den Algorithmus von Edmonds (9. Algorithmus), so läßt sich das allgemeine  $f$ -Faktorproblem für schlichte Graphen effizient lösen.

Im Jahre 1952 publizierte Tutte [2] seinen äußerst wichtigen  $f$ -Faktorsatz, für den er zwei Jahre später einen wesentlich kürzeren Beweis fand [4]. Dieser Beweis, den wir jetzt vorstellen wollen, greift auf den Graphen  $G^*$  aus Definition 7.5 und den 1-Faktorsatz zurück.

**Definition 7.6.** Es sei  $G$  ein Multigraph ohne isolierte Ecken. Ist nun  $f: E(G) \rightarrow \mathbf{N}_0$  eine Abbildung mit  $f(x) \leq d(x, G)$  für alle  $x \in E(G)$ , so seien  $D(x), S(x)$  und  $E^*$  die in Definition 7.5 eingeführten Größen. Wir nennen eine Eckenmenge  $W^* \subseteq E^*$  *normal*, wenn für alle  $x \in E(G)$  folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

- i) Ist  $D(x) \cap W^* \neq \emptyset$ , so gilt  $D(x) \subseteq W^*$ .
- ii) Ist  $S(x) \cap W^* \neq \emptyset$ , so gilt  $S(x) \subseteq W^*$ .
- iii) Höchstens eine der beiden Mengen  $D(x)$  und  $S(x)$  ist eine Teilmenge von  $W^*$ .



Ist  $W^* \subseteq E^*$  normal, so setzen wir:

$$\begin{aligned} D &= \{x \mid x \in E(G) \text{ mit } D(x) \subseteq W^*\} \\ S &= \{x \mid x \in E(G) \text{ mit } S(x) \subseteq W^*\} \end{aligned}$$

Für  $X \subseteq E(G)$  benutzen wir im folgenden auch die Schreibweisen  $\sum_{x \in X} d(x, G) = d_G(X)$  und  $\sum_{x \in X} f(x) = f(X)$ .

**Satz 7.9 ( $f$ -Faktorsatz, Tutte [2] 1952).** Es sei  $G$  ein Graph und  $f: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Abbildung. Der Graph  $G$  besitzt genau dann einen  $f$ -Faktor, wenn für alle disjunkten Teilmengen  $X$  und  $Y$  von  $E(G)$  gilt:

$$\Theta_G(X, Y, f) = f(X) - f(Y) + d_{G-X}(Y) - q_G(X, Y, f) \geq 0$$

Dabei bedeutet  $q_G(X, Y, f)$  die Anzahl der Komponenten  $U$  des Graphen  $G - (X \cup Y)$  mit

$$m_G(Y, E(U)) + f(E(U)) \equiv 1 \pmod{2}.$$

(Solche Komponenten  $U$  werden auch *ungerade  $f$ -Komponenten* genannt.)

*Beweis.* O.B.d.A. setzen wir voraus, daß  $G$  keine isolierten Ecken besitzt. Denn ist  $I$  die Menge der isolierten Ecken von  $G$  und  $G' = G - I$ , so hat  $G$  genau dann einen  $f$ -Faktor, wenn  $G'$  einen  $f$ -Faktor besitzt und  $f(x) = 0$  für alle  $x \in I$  gilt. Nun überlegt man sich leicht die Identität  $\Theta_G(X, Y, f) = \Theta_{G'}(X - I, Y - I, f)$ , denn in beiden Größen ist die Anzahl der ungeraden  $f$ -Komponenten gleich.

Weiter sei  $G$  zunächst ein Multigraph. Der allgemeine Fall wird dann am Ende des Beweises diskutiert.

1. *Schritt:* Ist  $W^* \subseteq E^*$  normal, so sind die Mengen  $D$  und  $S$  aus Definition 7.6 disjunkt mit  $|D| = d_G(D)$  und  $|S| = d_G(S) - f(S)$ . Daraus ergibt sich

$$|W^*| = |D| + |S| = d_G(D) - f(S) + d_G(S). \quad (7.19)$$

Ist  $H^*$  eine Komponente von  $G^* - W^*$ , so erfüllt  $H^*$  genau eine der folgenden vier Bedingungen.

1. Die Komponente  $H^*$  besteht aus einer einzelnen Ecke aus  $D(x)$ , also  $H^* = \{x_k\}$  mit  $k = xy \in K(G)$ . Dann gilt  $S(x) \cup \{y_k\} \subseteq N(x_k, G^*) \subseteq W^*$  und daher  $x \in S$  und  $y \in D$ . Ist umgekehrt  $k = xy \in K(G)$  mit  $x \in S$  und  $y \in D$ , so besteht die Komponente von  $G^* - W^*$ , die  $x_k$  enthält, nur aus der Ecke  $x_k$ . Daher ist die Anzahl solcher Komponenten gleich

$$m_G(D, S) = d_G(S) - d_{G-D}(S). \quad (7.20)$$

2. Die Komponente  $H^*$  besteht aus einer einzelnen Ecke  $x(i)$  für ein  $i$  mit  $1 \leq i \leq s(x)$  und  $x \in E(G)$ . Dann gilt notwendig  $x \in D$ . Ist umgekehrt  $x \in D$ , so bilden alle  $x(i)$  für  $1 \leq i \leq s(x)$  eine Komponente dieser Form. Daher ist die Anzahl dieser Komponenten gleich

$$\sum_{x \in D} s(x) = \sum_{x \in D} (d(x, G) - f(x)) = d_G(D) - f(D). \quad (7.21)$$

3. Es gilt  $K(H^*) \neq \emptyset$  mit  $K(H^*) \subseteq L^*$ . Da  $L^*$  ein Matching von  $G^*$  ist, ergibt sich in diesem Fall  $|E(H^*)| = 2$ .



4. Es gilt  $K(H^*) \cap M^* \neq \emptyset$ . Komponenten dieser Form werden *große Komponenten* von  $G^* - W^*$  genannt. Enthält  $H^*$  eine Kante aus  $B^*(x)$ , so gilt  $D(x), S(x) \not\subseteq W^*$ , also  $B^*(x) \subseteq H^*$ . Setzt man

$$E_1(H^*) = \{x \mid x \in E(G), B^*(x) \subseteq H^* \text{ mit } K(B^*(x)) \neq \emptyset\},$$

so gilt  $E_1(H^*) \subseteq E(G) - (D \cup S)$ .

Aus den Teilgraphen  $B^*(x) \subseteq H^*$  läßt sich  $H^*$  wie folgt erzeugen. Zu allen  $B^*(x) \subseteq H^*$  füge man alle Kanten hinzu, die zwischen diesen Teilgraphen in  $G^*$  existieren. Diese Konstruktion liefert einen zusammenhängenden Teilgraphen, den wir mit  $H_0^*$  bezeichnen wollen. Zu  $H^*$  gehören weiter alle Kanten  $x_k y_k$  und alle Ecken  $x_k \in D(x)$  mit  $x \in S$  und  $y_k \in E(H_0^*)$ . Man sieht nun leicht, daß  $E_1(H^*)$  genau die Eckenmenge einer Komponente  $F_{H^*}$  von  $G - (D \cup S)$  ist, wobei  $F_{H^*}$  aus  $H_0^*$  durch Identifizierung aller Ecken von  $B^*(x) \subseteq H_0^*$  zu einer Ecke  $x$  entsteht.

Ist umgekehrt  $F$  eine Komponente von  $G - (D \cup S)$ , so gilt für  $x \in E(F)$  wegen  $x \notin S$  natürlich  $S(x) \neq \emptyset$  und wegen  $x \notin D$  aber  $D(x) \cap W^* = S(x) \cap W^* = \emptyset$ . Daher ist  $B^*(x) \subseteq G^* - W^*$  und  $K(B^*(x)) \neq \emptyset$ , womit  $B^*(x)$  zu einer großen Komponente  $H^*$  von  $G^* - W^*$  mit  $F = G[E_1(H^*)]$  gehört. Damit ist die Anzahl der Komponenten von  $G - (D \cup S)$  gleich der Anzahl der großen Komponenten  $H^*$  von  $G^* - W^*$  mit

$$\begin{aligned} |E(H^*)| &= \sum_{x \in E(F_{H^*})} (d(x, G) + s(x)) + m_G(E(F_{H^*}), S) \\ &\equiv \sum_{x \in E(F_{H^*})} f(x) + m_G(E(F_{H^*}), S) \pmod{2} \\ &\equiv m_G(S, E(F_{H^*})) + f(E(F_{H^*})) \pmod{2}, \end{aligned}$$

womit die Anzahl der großen ungeraden Komponenten von  $G^* - W^*$  gleich der Anzahl  $q_G(D, S, f)$  der ungeraden  $f$ -Komponenten des Graphen  $G - (D \cup S)$  ist. Daher ergibt sich aus (7.20) und (7.21)

$$q(G^* - W^*) = d_G(S) - d_{G-D}(S) + d_G(D) - f(D) + q_G(D, S, f).$$

Zusammen mit (7.19) folgt daraus

$$|W^*| - q(G^* - W^*) = f(D) - f(S) + d_{G-D}(S) - q_G(D, S, f) = \Theta_G(D, S, f). \quad (7.22)$$

2. *Schritt*: Besitzt  $G$  einen  $f$ -Faktor, so gilt notwendig  $f(x) \leq d(x, G)$  für alle  $x \in E(G)$  und  $\sum_{x \in E(G)} f(x) \equiv 0 \pmod{2}$ . Angenommen, es gilt  $\Theta_G(A, B, f) < 0$  für ein Paar  $A, B$ . Im folgenden sei  $|A|$  minimal mit dieser Eigenschaft gewählt. Ist  $f(a) = d(a, G)$  für ein  $a \in A$ , so werden wir für  $A' = A - \{a\}$  und  $B' = B \cup \{a\}$  zeigen, daß dann auch  $\Theta_G(A', B', f) < 0$  gilt, was aber der Minimalität von  $|A|$  widerspricht. Da die Zusammenhangskomponenten in den Graphen  $G - (A \cup B)$  und  $G - (A' \cup B')$  übereinstimmen, unterscheidet sich die Anzahl der ungeraden  $f$ -Komponenten in den beiden Teilgraphen  $G - (A \cup B)$  und  $G - (A' \cup B')$  um maximal  $d(a, G) - m_G(a, A' \cup B)$ , woraus sich  $q_G(A', B', f) \geq q_G(A, B, f) - (d(a, G) -$

$m_G(a, A' \cup B)$ ) ergibt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Theta_G(A', B', f) &= f(A') - f(B') + d_{G-A'}(B') - q_G(A', B', f) \\
&\leq f(A) - d(a, G) - f(B) - d(a, G) + d_{G-A'}(B) \\
&\quad + d_{G-A'}(a) + d(a, G) - q_G(A, B, f) - m_G(a, A' \cup B) \\
&\leq f(A) - f(B) + d_{G-A'}(B) \\
&\quad - q_G(A, B, f) - m_G(a, B) \\
&= f(A) - f(B) + d_{G-A}(B) - q_G(A, B, f) \\
&= \Theta_G(A, B, f) < 0
\end{aligned}$$

Daher sei nun  $s(x) = d(x, G) - f(x) > 0$  für alle  $x \in A$ . Setzen wir

$$W^* = \left( \bigcup_{x \in A} D(x) \right) \cup \left( \bigcup_{y \in B} S(y) \right),$$

so ist  $W^*$  normal, denn i) und ii) sind definitionsgemäß erfüllt, und gilt  $D(x) \subseteq W^*$ , so ist  $s(x) > 0$ , also  $S(x) \neq \emptyset$ , womit  $S(x)$  wegen  $A \cap B = \emptyset$  keine Teilmenge von  $W^*$  ist. Berücksichtigt man Definition 7.6, so ergibt sich  $A = D$  und  $B = S$ , woraus dann wegen (7.22) die Ungleichung  $q(G^* - W^*) > |W^*|$  folgt. Somit besitzt  $G^*$  nach dem 1-Faktorsatz keinen 1-Faktor, also  $G$  wegen Satz 7.8 keinen  $f$ -Faktor, was unserer Voraussetzung widerspricht.

3. Schritt: Es gelte nun  $\Theta_G(X, Y, f) \geq 0$  für alle disjunkten Teilmengen  $X, Y \subseteq E(G)$ . Setzt man speziell  $X = Y = \emptyset$ , so ergibt sich mühelos  $\sum_{x \in E(G)} f(x) \equiv 0 \pmod{2}$ . Weiter folgt für  $X = \emptyset$  und  $Y = \{y\}$  sofort  $f(y) \leq d(y, G)$  für alle  $y \in E(G)$ .

Angenommen, es gibt in  $G$  keinen  $f$ -Faktor. Dann besitzt  $G^*$  wegen Satz 7.8 keinen 1-Faktor, womit nach dem 1-Faktorsatz eine Menge  $W^* \subset E^*$  existiert mit

$$|W^*| < q(G^* - W^*). \quad (7.23)$$

Wählt man  $|W^*|$  minimal in (7.23), so werden wir zeigen, daß  $W^*$  normal ist, was uns zusammen mit (7.22) den gewünschten Widerspruch liefert.

Da  $\sum_{x \in E(G)} f(x)$  gerade ist, ist auch

$$|E(G^*)| = \sum_{x \in E(G)} d(x, G) + \sum_{x \in E(G)} (d(x, G) - f(x))$$

gerade, womit sich aus (7.23)

$$|W^*| \leq q(G^* - W^*) - 2 \quad (7.24)$$

ergibt. Ist  $V^* \subset W^*$ , so erhält man aus der Minimalität von  $|W^*|$  zusammen mit (7.24)

$$q(G^* - V^*) \leq |V^*| \leq |V^*| + q(G^* - W^*) - 2 - |W^*| \leq q(G^* - W^*) - 3. \quad (7.25)$$

Nun werden wir für  $W^*$  die Eigenschaften i), ii) und iii) aus Definition 7.6 nachweisen.

Es gelte  $W^* \cap S(x) \neq \emptyset$  für ein  $x \in E(G)$ . Angenommen, es gibt ein  $a \in S(x)$  mit  $a \notin W^*$ . Dann setzen wir  $V^* = W^* - S(x)$ . Ist  $D(x) \subseteq W^*$ , so erhalten wir  $q(G^* - V^*) \geq q(G^* - W^*)$ , was (7.25) widerspricht. Existiert dagegen ein  $b \in D(x)$  mit  $b \notin W^*$ , so gehören in  $G^* - W^*$  sowie in  $G^* - V^*$  alle verbleibenden Ecken aus  $B^*(x)$  zu einer Komponente, womit  $q(G^* - V^*) \geq q(G^* - W^*) - 1$  gilt. Da dies ein Widerspruch zu (7.25) ist, haben wir ii) nachgewiesen.

Es gelte  $W^* \cap D(x) \neq \emptyset$  für ein  $x \in E(G)$ . Ist  $x_k \in W^* \cap D(x)$  mit  $k = xy \in K(G)$ , so setzen wir  $V^* = W^* - \{x_k\}$ . Unter der Voraussetzung  $S(x) \subseteq W^*$  ist  $x_k$  eine Edecke in  $G^* - V^*$ , woraus sich sofort der Widerspruch  $q(G^* - V^*) \geq q(G^* - W^*) - 1$  ergibt. Damit ist auch iii) bewiesen.

Es gelte  $W^* \cap D(x) \neq \emptyset$  für ein  $x \in E(G)$ . Angenommen, es gibt ein  $a \in D(x)$  mit  $a \notin W^*$ . Wegen obiger Überlegungen gilt  $S(x) \not\subseteq W^*$ , insbesondere  $S(x) \neq \emptyset$ . Ist  $x_k \in W^* \cap D(x)$  mit  $k = xy \in K(G)$ , so setzen wir wieder  $V^* = W^* - \{x_k\}$ . Vergleicht man nun die Komponenten von  $G^* - W^*$  mit denen von  $G^* - V^*$ , so erkennt man, daß höchstens eine Komponente von  $G^* - V^*$  in zwei Komponenten von  $G^* - W^*$  zerfällt, womit sich  $q(G^* - V^*) \geq q(G^* - W^*) - 2$  ergibt, was aber wegen (7.25) nicht möglich ist. Damit ist auch i) gezeigt, und wir haben den  $f$ -Faktorsatz für Multigraphen bewiesen.

Den Fall, daß  $G$  Schlingen enthält, führen wir durch folgenden Trick, der von meinem Schüler Dr. Thomas Niessen [3] stammt, auf den gerade behandelten Fall zurück.

Ersetzen wir in  $G$  jede Schlinge durch einen Kreis der Länge drei, so entsteht aus  $G$  ein Multigraph, den wir mit  $H$  bezeichnen wollen. Weiter definieren wir  $g : E(H) \rightarrow \mathbf{N}_0$  durch  $g(v) = f(v)$  für  $v \in E(G)$  und  $g(v) = 1$  für  $v \in E(H) - E(G)$ . Nun erkennt man ohne Mühe, daß  $G$  genau dann einen  $f$ -Faktor hat, wenn  $H$  einen  $g$ -Faktor besitzt. Daher genügt es zu zeigen, daß  $H$  genau dann einen  $g$ -Faktor besitzt, wenn für alle disjunkten Teilmengen  $X$  und  $Y$  von  $E(G)$  die Ungleichung  $\Theta_G(X, Y, f) \geq 0$  erfüllt ist. Für solche Mengen  $X$  und  $Y$  überlegt man sich leicht die Identität  $\Theta_H(X, Y, g) = \Theta_G(X, Y, f)$ . Da  $H$  ein Multigraph ist folgt unmittelbar  $\Theta_G(X, Y, f) \geq 0$  für alle disjunkten Teilmengen  $X$  und  $Y$  von  $E(G)$ , falls  $H$  einen  $g$ -Faktor hat. Für die umgekehrte Richtung werden wir nun nachweisen, daß zwei disjunkte Teilmengen  $A$  und  $B$  aus  $E(G)$  mit  $\Theta_G(A, B, f) < 0$  existieren, falls  $H$  keinen  $g$ -Faktor enthält.

Ist  $g(E(H)) \equiv 1 \pmod{2}$ , so existiert kein  $g$ -Faktor, und es gilt dann  $\Theta_G(\emptyset, \emptyset, f) < 0$ . Daher sei nun  $g(E(H)) \equiv 0 \pmod{2}$ .

Hat  $H$  keinen  $g$ -Faktor, so existieren zwei disjunkte Teilmengen  $A$  und  $B$  in  $E(H)$  mit  $\Theta_H(A, B, g) < 0$ . Wegen der anschließenden Bemerkung 7.4 gilt sogar  $\Theta_H(A, B, g) \leq -2$ . Wir wählen dabei  $A$  und  $B$  so, daß  $|A \cup B|$  minimal ist. Nun zeigen wir  $A \cup B \subseteq E(G)$ .

Gibt es eine Ecke  $b \in B$  mit  $b \notin E(G)$ , so gilt  $\Theta_H(A, B - \{b\}, g) \geq 0$  und daher

$$\begin{aligned} -2 &\geq \Theta_H(A, B, g) - \Theta_H(A, B - \{b\}, g) \\ &= -1 + d_{H-A}(b) - q_H(A, B, g) + q_H(A, B - \{b\}, g). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Da die Nachbarn von  $b$  in  $H$  adjazent sind, gilt  $q_H(A, B - \{b\}, g) \geq q_H(A, B, g) - 1$  und im Fall  $q_H(A, B - \{b\}, g) = q_H(A, B, g) - 1$  die Abschätzung  $d_{H-A}(b) \geq 1$ . Das widerspricht offensichtlich der Ungleichung (7.26).

Gibt es eine Ecke  $a \in A$  mit  $a \notin E(G)$ , so erhalten wir zusammen mit  $q_H(A - \{a\}, B, g) \geq q_H(A, B, g) - 1$  den Widerspruch

$$\begin{aligned} -2 &\geq \Theta_H(A, B, g) - \Theta_H(A - \{a\}, B, g) \\ &= 1 + m_H(a, B) - q_H(A, B, g) + q_H(A - \{a\}, B, g) \geq 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $A \cup B \subseteq E(G)$  und daher  $\Theta_G(A, B, f) = \Theta_H(A, B, g) < 0$ .

Damit haben wir schließlich und endlich den  $f$ -Faktorsatz von Tutte vollständig bewiesen, falls wir noch die anschließende Bemerkung beachten. ||

**Bemerkung 7.4.** Es sei  $G$  ein Graph und  $f : E(G) \rightarrow \mathbf{N}_0$  eine Abbildung. Dann gilt für alle disjunkten Teilmengen  $X$  und  $Y$  von  $E(G)$

$$\Theta_G(X, Y, f) \equiv f(E(G)) \pmod{2}.$$

*Beweis.* Sind  $U_1, U_2, \dots, U_t$  die Komponenten von  $G - (X \cup Y)$ , so ergibt sich aus der Definition von  $q_G(X, Y, f)$

$$\begin{aligned} \Theta_G(X, Y, f) &= f(X) - f(Y) + d_{G-X}(Y) - q_G(X, Y, f) \\ &\equiv f(X) + f(Y) + d_{G-X}(Y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^t [m_G(Y, E(U_i)) + f(E(U_i))] \\ &= f(E(G)) + d_{G-X}(Y) + m_G(Y, E(G - (X \cup Y))) \\ &= f(E(G)) + 2|K(G[Y])| + 2m_G(Y, E(G - (X \cup Y))) \\ &\equiv f(E(G)) \pmod{2}. \end{aligned} \quad \parallel$$

Zwei Jahre vor Tutte hatte Belck [1] den  $f$ -Faktorsatz für konstantes  $f$  gefunden. Dieses Ergebnis von Belck, das sich sofort aus Satz 7.9 ergibt, hat dann folgende Gestalt.

**Satz 7.10 ( $r$ -Faktorsatz, Belck [1] 1950).** Es sei  $r \in \mathbf{N}$ . Ein Graph  $G$  besitzt genau dann einen  $r$ -Faktor, wenn für alle disjunkten Teilmengen  $X$  und  $Y$  von  $E(G)$  gilt:

$$\Theta_G(X, Y, r) = r|X| - r|Y| + d_{G-X}(Y) - q_G(X, Y, r) \geq 0$$

Dabei bedeutet  $q_G(X, Y, r)$  die Anzahl der Komponenten  $U$  des Graphen  $G - (X \cup Y)$  mit

$$m_G(Y, E(U)) + r|E(U)| \equiv 1 \pmod{2}.$$

Als Anwendung des  $r$ -Faktorsatzes von Belck beweisen wir folgendes interessante Ergebnis von Katerinis [1].

**Satz 7.11 (Katerinis [1] 1985).** Es seien  $p, r$  und  $t$  ungerade natürliche Zahlen mit  $p < r < t$ . Besitzt ein Graph  $G$  einen  $p$ -Faktor und einen  $t$ -Faktor, so hat  $G$  auch einen  $r$ -Faktor.

*Beweis.* Angenommen,  $G$  hat keinen  $r$ -Faktor. Dann existieren nach Satz 7.10 zwei disjunkte Teilmengen  $X$  und  $Y$  von  $E(G)$  mit

$$q_G(X, Y, r) - d_{G-X}(Y) > r(|X| - |Y|), \quad (7.27)$$

wobei  $q_G(X, Y, r)$  die Anzahl der Komponenten  $U$  von  $G - (X \cup Y)$  mit

$$m_G(Y, E(U)) + r|E(U)| \equiv 1 \pmod{2}$$

bedeutet. Da  $G$  aber einen  $p$ -Faktor und einen  $t$ -Faktor besitzt, gilt nach Satz 7.10 für diese Mengen  $X$  und  $Y$

$$q_G(X, Y, p) - d_{G-X}(Y) \leq p(|X| - |Y|), \quad (7.28)$$

$$q_G(X, Y, t) - d_{G-X}(Y) \leq t(|X| - |Y|), \quad (7.29)$$

wobei  $q_G(X, Y, p)$  und  $q_G(X, Y, t)$  entsprechend definiert sind. Da  $p, r$  und  $t$  ungerade Zahlen sind, erkennt man ohne Mühe

$$q_G(X, Y, p) = q_G(X, Y, r) = q_G(X, Y, t).$$

Daher ergibt sich aus (7.27) und (7.28)  $|X| < |Y|$  und aus (7.27) und (7.29) der Widerspruch  $|X| > |Y|$ . ||

Als Anwendung des  $f$ -Faktorsatzes von Tutte beweisen wir ein Ergebnis von Erdős und Gallai [1] über Gradsequenzen schlichter Graphen.

**Satz 7.12 (Erdős, Gallai [1] 1960).** Eine Folge  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  nicht negativer ganzer Zahlen ist genau dann eine Gradsequenz eines schlichten Graphen, wenn  $\sum_{i=1}^n d_i$  gerade ist, und wenn

$$\sum_{i=1}^p d_i \leq p(p-1) + \sum_{i=p+1}^n \min\{p, d_i\} \quad (7.30)$$

für alle  $p$  mit  $1 \leq p \leq n$  gilt.

*Beweis.* Ist die gegebene Folge eine Gradsequenz eines schlichten Graphen  $G$ , so ist natürlich  $\sum_{i=1}^n d_i$  gerade. Ist  $d(x_i, G) = d_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ , und setzen wir  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ , so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p d(x_i, G) &\leq p(p-1) + m_G(X, E(G) - X) \\ &\leq p(p-1) + \sum_{i=p+1}^n \min\{p, d(x_i, G)\}, \end{aligned}$$

womit wir die Notwendigkeit der Bedingung (7.30) bewiesen haben.

Für die Umkehrung beachten wir, daß die Folge  $d_1, d_2, \dots, d_n$  genau dann die Gradsequenz eines schlichten Graphen ist, wenn der vollständige Graph  $G = K_n$  mit der Eckenmenge  $E(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  einen  $f$ -Faktor mit  $f(x_i) = d_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$  besitzt. Wegen des  $f$ -Faktorsatzes und der Bemerkung 7.4 genügt es nachzuweisen, daß für alle  $X, Y \subseteq E(G)$  mit  $X \cap Y = \emptyset$ , die Ungleichung  $\Theta_G(X, Y, f) \geq -1$  gilt. Nach dem  $f$ -Faktorsatz ist diese Ungleichung äquivalent zu:

$$\begin{aligned} q_G(X, Y, f) - 1 &\leq f(X) - f(Y) + d_{G-X}(Y) \\ &= f(X) - f(Y) + |Y|(n-1-|X|) \end{aligned}$$

Da  $G$  vollständig ist, gilt  $q_G(X, Y, f) \leq 1$ , womit unser Ergebnis aus der Abschätzung

$$0 \leq f(X) - f(Y) + |Y|(n-1-|X|)$$

folgt, die wir nun nachweisen werden. Setzen wir  $|X| = r$  und  $|Y| = p$ , so wird die rechte Seite der letzten Ungleichung minimal, wenn  $X = \{x_{n-r+1}, \dots, x_n\}$  und  $Y = \{x_1, \dots, x_p\}$  gilt. Nun folgt aus (7.30)

$$\begin{aligned} &f(X) - f(Y) + |Y|(n-1-|X|) \\ &\geq \sum_{i=n-r+1}^n d_i - \sum_{i=1}^p d_i + (n-1-r)p \\ &\geq \sum_{i=n-r+1}^n d_i - p(p-1) - \sum_{i=p+1}^n \min\{p, d_i\} + (n-1-r)p \\ &\geq \sum_{i=n-r+1}^n d_i - p(p-1) - \sum_{i=p+1}^{n-r} p - \sum_{i=n-r+1}^n d_i + (n-1-r)p \\ &= 0, \end{aligned}$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist. ||

Einen direkten Beweis von Satz 7.12, also einen Beweis, der den  $f$ -Faktorsatz von Tutte nicht benutzt, findet man in der Originalarbeit von Erds und Gallai [1] oder in dem Buch von Harary [2] auf den Seiten 59 – 61.

Als wichtige Erweiterung des  $f$ -Faktorsatzes entdeckte Lovász [1] im Jahr 1970 den  $(g, f)$ -Faktorsatz. Zehn Jahre später zeigte wiederum Tutte [6], wie man den  $(g, f)$ -Faktorsatz relativ einfach auf den  $f$ -Faktorsatz zurückführen kann.

**Satz 7.13 (( $g, f$ )-Faktorsatz, Lovász [1] 1970).** Es sei  $G$  ein Graph und  $g, f: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  zwei Abbildungen mit  $g(x) \leq f(x)$  für alle  $x \in E(G)$ . Der Graph  $G$  besitzt genau dann einen  $(g, f)$ -Faktor, wenn für alle disjunkten Teilmengen  $X$  und  $Y$  von  $E(G)$  gilt:

$$\Theta_G(X, Y, g, f) = f(X) - g(Y) + d_{G-X}(Y) - q_G(X, Y, g, f) \geq 0$$

Dabei bedeutet  $q_G(X, Y, g, f)$  die Anzahl der Komponenten  $U$  des Graphen  $G - (X \cup Y)$  mit  $g(x) = f(x)$  für alle  $x \in E(U)$  und

$$m_G(Y, E(U)) + f(E(U)) \equiv 1 \pmod{2}.$$

(Solche Komponenten  $U$  werden auch *ungerade*  $(g, f)$ -Komponenten genannt.)

*Beweis* (Tutte [6] 1981). Wir nehmen zunächst an, daß der Graph  $G$  einen  $(g, f)$ -Faktor  $F$  besitzt. Sind nun  $X$  und  $Y$  zwei disjunkte Teilmengen von  $E(G)$ , so gilt offensichtlich

$$f(X) \geq m_F(X, Y) \geq g(Y) - d_{G-X}(Y).$$

Es sei nun  $U$  eine ungerade  $(g, f)$ -Komponente von  $G - (X \cup Y)$ . Aus dem Handschlaglemma folgt, daß mindestens eine Kante von  $U$  nach  $X$  zu  $F$  gehört oder, daß nicht alle Kanten von  $G$ , die Ecken aus  $U$  und  $Y$  verbinden, zu  $F$  gehören. Demnach kann also für jede derartige Komponente  $U$  zumindest eine der obigen Abschätzungen um 1 verbessert werden. Faßt man diese Überlegungen zusammen, so ergibt sich  $\Theta_G(X, Y, g, f) \geq 0$ .

Die umgekehrte Richtung zeigen wir nur für den Fall, daß  $f \neq g$  gilt, denn anderenfalls folgt diese Aussage schon aus dem  $f$ -Faktorsatz von Tutte (Satz 7.9).

Zunächst setzen wir  $s = \sum_{x \in E(G)} (f(x) - g(x))$  und wählen dasjenige  $p \in \{s - 1, s\}$ , für das  $\sum_{x \in E(G)} f(x) \equiv p \pmod{2}$  gilt. Da  $f \neq g$  ist, existiert ein solches mit  $p \geq 0$ . Nun fügen wir zu  $G$  eine neue Ecke  $a$  hinzu und verbinden  $a$  mit jeder Ecke  $x \in E(G)$  durch genau  $f(x) - g(x)$  Kanten. Schließlich ergänzen wir  $p$  Schlingen an  $a$ . Den so erhaltenen Graphen nennen wir  $H$ . Für  $u \in E(H)$  setzen wir

$$f_p(u) = \begin{cases} f(u) & \text{falls } u \in E(G) \\ p & \text{falls } u = a. \end{cases}$$

Man beachte, daß  $p$  so gewählt wurde, daß  $\sum_{u \in E(H)} f_p(u) \equiv 0 \pmod{2}$  gilt.

Als erstes überlegen wir uns, daß  $G$  genau dann einen  $(g, f)$ -Faktor hat, wenn  $H$  einen  $f_p$ -Faktor besitzt. Es sei zunächst  $J$  ein  $f_p$ -Faktor von  $H$ . Dann ist  $F = J - a$  natürlich ein  $(g, f)$ -Faktor von  $G$ . Ist umgekehrt  $F$  ein  $(g, f)$ -Faktor von  $G$ , so fügen wir die Ecke  $a$  zu  $F$  hinzu und verbinden  $a$  mit jeder anderen Ecke  $x$  durch genau  $f(x) - d(x, F)$  Kanten. Wegen der Ungleichung  $\sum_{x \in E(G)} (f(x) - d(x, F)) \leq s$ , und da nach der Wahl von  $p$  auch  $\sum_{x \in E(G)} (f(x) - d(x, F)) \equiv \sum_{x \in E(G)} f(x) \equiv p \pmod{2}$  gilt, können wir nun noch  $(p - \sum_{x \in E(G)} (f(x) - d(x, F)))/2$  Schlingen an  $a$  hinzufügen, so daß wir einen  $f_p$ -Faktor von  $H$  erhalten.



Den eigentlichen Beweis führen wir indirekt. Dazu nehmen wir an, daß  $\Theta_G(X, Y, g, f) \geq 0$  für alle disjunkten Teilmengen  $X$  und  $Y$  von  $G$  gilt, und  $G$  keinen  $(g, f)$ -Faktor besitzt. Wie wir bereits gesehen haben, besitzt dann  $H$  keinen  $f_p$ -Faktor. Aus dem  $f$ -Faktorsatz und der Bemerkung 7.4 folgt demnach die Existenz zweier disjunkter Teilmengen  $X_p, Y_p$  von  $E(H)$  mit  $\Theta_H(X_p, Y_p, f_p) \leq -2$ . Wir nehmen an, daß diese Teilmengen minimal bezüglich  $|X_p \cup Y_p|$  gewählt sind.

Wir unterscheiden nun danach, ob  $a$  zu  $X_p$ , zu  $Y_p$  oder nicht zu  $X_p \cup Y_p$  gehört.

Ist  $a \notin X_p \cup Y_p$ , so gilt

$$\begin{aligned} -2 &\geq \Theta_H(X_p, Y_p, f_p) - \Theta_G(X_p, Y_p, g, f) \\ &= g(Y_p) - f(Y_p) + d_{H-X_p}(Y_p) - d_{G-X_p}(Y_p) \\ &\quad + q_G(X_p, Y_p, g, f) - q_H(X_p, Y_p, f_p) \\ &= q_G(X_p, Y_p, g, f) - q_H(X_p, Y_p, f_p). \end{aligned}$$

Demnach ist also  $q_H(X_p, Y_p, f_p) \geq q_G(X_p, Y_p, g, f) + 2$ , was einen Widerspruch bedeutet.

Ist  $a \in Y_p$ , so gilt  $-2 \geq \Theta_H(X_p, Y_p, f_p) - \Theta_H(X_p, Y_p - \{a\}, f_p)$  aufgrund der Wahl des Paares  $(X_p, Y_p)$ . Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir die Abschätzung

$$f_p(a) - 2 \geq d(a, H - X_p) - q_H(X_p, Y_p, f_p) + q_H(X_p, Y_p - \{a\}, f_p).$$

Da jede ungerade  $f_p$ -Komponente bezüglich  $(X_p, Y_p)$  ebenfalls eine ungerade  $f_p$ -Komponente bezüglich  $(X_p, Y_p - \{a\})$  ist, gilt die Ungleichung  $q_H(X_p, Y_p, f_p) \leq q_H(X_p, Y_p - \{a\}, f_p)$ . Zusammen mit obiger Abschätzung erhalten wir daraus  $f_p(a) - 2 \geq d(a, H - X_p)$ , was aber einen Widerspruch bedeutet, da  $f_p(a) = p$  ist und  $d(a, H - X_p) \geq 2p$  gilt.

Ist  $a \in X_p$ , so gilt  $-2 \geq \Theta_H(X_p, Y_p, f_p) - \Theta_H(X_p - \{a\}, Y_p, f_p)$  aufgrund der Wahl von  $(X_p, Y_p)$ . Einsetzen und Umformen ergeben in diesem Fall die Ungleichung

$$f_p(a) \leq m_H(a, Y_p) - 2 + q_H(X_p, Y_p, f_p) - q_H(X_p - \{a\}, Y_p, f_p).$$

Wie oben folgt  $q_H(X_p, Y_p, f_p) \leq q_H(X_p - \{a\}, Y_p, f_p)$ . Damit erhalten wir hier

$$p = f_p(a) \leq m_H(a, Y_p) - 2 \leq \sum_{x \in E(G)} (f(x) - g(x)) - 2 = s - 2,$$

was der Wahl von  $p$  widerspricht. Damit ist der  $(g, f)$ -Faktorsatz von Lovász vollständig bewiesen. ||

Im Jahre 1990 publizierten Heinrich, Hell, Kirkpatrick und Liu [1] einen kurzen Beweis des  $(g, f)$ -Faktorsatzes für die Spezialfälle, daß  $g < f$  gilt oder der Graph bipartit ist.

### 7.3 Reguläre Faktoren in regulären Graphen

Unser erstes Ergebnis über reguläre Faktoren in regulären Graphen ist äußerst wichtig für Turniere und Spielpläne (z.B. Fußballbundesliga). Da der Beweis dieses Satzes konstruktiv sein wird, kann man mit dieser Methode tatsächlich Spielpläne erstellen.

**Satz 7.14 (Kirkman [1] 1847, Reiß[1] 1859).** Jeder vollständige Graph  $K_{2n}$  ist 1-faktorisierbar.



*Beweis.* Wir geben hier einen geometrischen Beweis. Sind  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  die Ecken des Graphen  $K_{2n}$ , so seien  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$  die Eckpunkte eines ebenen und regulären  $(2n-1)$ -Ecks, in das alle Diagonalen eingezeichnet sind. Über diesem  $(2n-1)$ -Eck errichten wir eine Pyramide mit der Spitze  $a_{2n}$ . Nehmen wir nun eine Seitenkante des  $(2n-1)$ -Ecks, alle dazu parallelen Diagonalen und diejenige Kante, die die Spitze der Pyramide mit dem übriggebliebenen Eckpunkt verbindet, so haben wir einen 1-Faktor gefunden. Zwei verschiedene Seitenkanten des  $(2n-1)$ -Ecks erzeugen so zwei kantendisjunkten 1-Faktoren. Ausgehend von allen Seitenkanten erhält man eine 1-Faktorisierung des  $K_{2n}$ .  $\parallel$

Aus diesem Satz ergibt sich leicht (man vgl. Aufgabe 7.9)

**Folgerung 7.3.** Ein schlichter und  $(2n-2)$ -regulärer Graph  $G$  der Ordnung  $2n$  ist 1-faktorisierbar.

Im Jahre 1891 publizierte Julius Petersen [1] in der Acta Mathematica 15 eine Arbeit mit Titel "Die Theorie der regulären graphs". In dieser, an Tiefe und Auswirkung, bemerkenswerten Abhandlung wird erstmalig das allgemeine Faktorisierungsproblem in Angriff genommen. Petersens Arbeit ist wirklich ein Markstein in der Graphentheorie.

Im Anschluß an ein von Gordan und Hilbert behandeltes Problem der Invariantentheorie betrachtete Petersen folgende Aufgabe:

Gegeben sei ein homogenes Polynom  $P$  in  $n$  Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  von der Form

$$P = (x_1 - x_2)^{m_{1,2}}(x_1 - x_3)^{m_{1,3}} \dots (x_{n-1} - x_n)^{m_{n-1,n}},$$

wobei die  $m_{i,j}$  nicht negative ganze Zahlen bedeuten, und der Grad von  $P$  in jeder der  $n$  Veränderlichen dieselbe positive Zahl  $r$  ist. Es wird verlangt,  $P$  als Produkt von Polynomen derselben Art – aber mit kleineren konstanten Zahlen  $r$  – darzustellen.

Als Beispiele betrachten wir die Produkte

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)^2 = \\ [(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)][(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)][(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)][(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)]$$

bzw.

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),$$

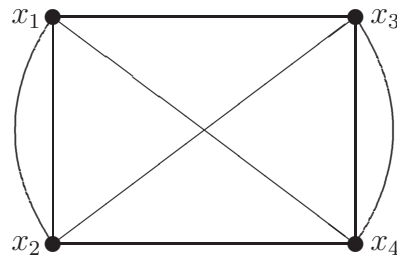
wobei das erste Produkt vom Grad 4 aus 4 Faktoren ersten Grades besteht, und das zweite Produkt vom Grad 2 nicht weiter zerlegt werden kann.

Die fundamentale Idee von Petersen bestand darin, die oben geschilderte Aufgabe in ein graphentheoretisches Problem zu transformieren. Dazu lassen wir nun Petersen selbst zu Wort kommen.

"Man kann der Aufgabe eine geometrische Form geben, indem man  $x_1, x_2, \dots, x_n$  durch beliebige Punkte der Ebene repräsentiert, während der Factor  $x_m - x_p$  durch eine beliebige Verbindungslinie zwischen  $x_m$  und  $x_p$  dargestellt wird. Man erhält so für das Product eine Figur, welche aus  $n$  Punkten besteht, die so verbunden sind, dass in jedem Punkte gleich viele Linien zusammenlaufen. Dieselben zwei Punkte können durch mehrere Linien verbunden sein. Als Beispiel betrachte man die Figur I, die das Product

$$(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = \\ [(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)][(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)][(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)][(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)]$$

darstellt.



Figur I

Englische Verfasser haben für ähnliche Figuren den Namen *graph* eingeführt; ich werde diesen Namen beibehalten und nenne den *graph* regulär, weil in jedem Punkte gleich viele Linien zusammenlaufen. Für Halbinvarianten würden irreguläre *graphs* in Betracht kommen, was doch hier nicht näher besprochen werden soll.

Durch die *Ordnung* eines *graphs* werde ich die Anzahl der Punkte (die Ordnung der binären Grundform) verstehen, durch den *Grad* die Anzahl der in jedem Punkt zusammenlaufenden Linien (den Grad der entsprechenden Invariante). Durch  $G_\alpha^n$  oder einfach  $G_\alpha$  werde ich einen *graph* von der Ordnung  $n$  und vom Grade  $\alpha$  verstehen. Ein solcher lässt sich zerlegen oder in Factoren auflösen, wenn man andere *graphs* von derselben Ordnung aber niedrigerem Grade finden kann, die durch Überlagerung den gegebenen *graph* herstellen. Ein *graph*, der sich nicht in solcher Weise auflösen lässt, heisst *primitiv*. Unsere Aufgabe geht auf die Bestimmung aller primitiven *graphs* aus.”

Wir beobachten, daß die von Petersen benutzten Bezeichnungen Graph, Faktor, regulärer Graph, Ordnung eines Graphen und Grad auch heute noch aktuell sind. Außerdem erkennen wir deutlich, woher der Name Faktor kommt.

Am Anfang seiner Arbeit bemerkte Petersen, daß die Theorie der Faktorisierung regulärer Graphen ungeraden Grades wesentlich schwieriger ist als die der geraden Grades. Im geraden Fall gab Petersen durch folgenden Satz eine vollständige Lösung des oben gestellten Problems.

**Satz 7.15 (I. Satz von Petersen [1] 1891).** Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-faktorierbar, wenn er  $2p$ -regulär ist ( $p > 0$ ).

*Beweis.* Da ein 2-faktorisierbarer Graph natürlich  $2p$ -regulär ist, betrachten wir umgekehrt einen Graphen  $G$ , der  $2p$ -regulär ist. Dann sind die Komponenten von  $G$  nach Satz 3.1 Eulersche Graphen, und sie besitzen daher Eulertouren. Geben wir jeder Kante von  $G$  die durch diese Touren induzierte Orientierung, so erhalten wir einen  $p$ -regulären Digraphen  $D$ . Nach Satz 6.16 können wir  $D$  in  $p$  bogendisjunkte Kreisfaktoren zerlegen, die dann unmittelbar eine 2-Faktorisierung von  $G$  induzieren. ||

Das nächste Beispiel zeigt, daß der I. Satz von Petersen in einem gewissen Sinne bestmöglich ist.

**Beispiel 7.3.** Zunächst einmal besitzt ein  $2p$ -regulärer Graph ungerader Ordnung sicherlich keinen regulären Faktor ungeraden Grades.

Darüber hinaus existiert zu jedem  $p \geq 2$  ein schlichter, zusammenhängender  $2p$ -regulärer Graph gerader Ordnung ohne 1-Faktor, sogar ohne regulären Faktor ungeraden Grades, falls  $p$  gerade ist.

Um dies zu zeigen, setzen wir  $H = K_{2p+1} - k$ , wobei  $k$  eine beliebige Kante von  $K_{2p+1}$  ist. Weiter seien  $H_1, H_2, \dots, H_{2p}$  Kopien von  $H$ ,  $a_i, b_i \in E(H_i)$  die Ecken vom Grad  $2p-1$  für  $i = 1, 2, \dots, 2p$  und  $u, v$  zwei zusätzliche Ecken. Den Graphen  $G$  definieren wir als Vereinigung von  $H_1, H_2, \dots, H_{2p}$  und den Ecken  $u, v$  zusammen mit den neuen Kanten  $ua_i$  und  $vb_i$  für  $i = 1, 2, \dots, 2p$ . Dann ist  $G$  ein  $2p$ -regulärer Graph von gerader Ordnung  $2p(2p+1)+2$ .

Ist  $F$  ein  $(2k+1)$ -regulärer Faktor von  $G$ , so gilt  $d(u, F) = d(v, F) = 2k+1$ . Das Handschlaglemma zeigt uns, daß für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, 2p\}$  genau eine der beiden Kanten  $ua_i$  oder  $vb_i$  zu  $F$  gehört. Daraus ergibt sich  $2p = 2(2k+1)$ , also  $p = 2k+1$ . Da  $p \geq 2$  vorausgesetzt war, enthält  $G$  keinen 1-Faktor, und wenn  $p$  gerade ist, besitzt  $G$  überhaupt keinen regulären Faktor ungeraden Grades.

Besitzt ein regulärer Graph aber einen 1-Faktor, so gilt folgende schöne Aussage.

**Satz 7.16 (Katerinis [1] 1985).** Hat ein  $r$ -regulärer Graph  $G$  einen 1-Faktor, so besitzt  $G$  einen  $q$ -Faktor für alle  $q \in \{1, 2, \dots, r\}$ .

*Beweis.* Ist  $r$  ungerade, so folgt die gewünschte Aussage unmittelbar aus dem I. Satz von Petersen.

Ist  $r$  gerade, so enthält  $G$  nach dem I. Satz von Petersen jeden regulären Faktor geraden Grades zwischen 2 und  $r$ . Nach Voraussetzung existiert in  $G$  ein 1-Faktor und damit auch ein  $(r-1)$ -Faktor, womit  $G$  nach Satz 7.11 aber auch jeden  $q$ -Faktor ungeraden Grades zwischen 1 und  $r-1$  besitzt. ||

Mit ähnlichen Argumenten wird auch der nächste Satz bewiesen, der durch ein Resultat von Kano und Yu [1] (man vgl. Folgerung 7.4) angeregt wurde.

**Satz 7.17 (Volkman [30] 2007).** Es sei  $k$  eine Kante eines  $r$ -regulären Graphen  $G$ . Hat  $G$  einen 1-Faktor, der  $k$  enthält und einen 1-Faktor, der  $k$  nicht enthält, so besitzt  $G$  einen  $q$ -Faktor der  $k$  enthält und einen  $q$ -Faktor, der  $k$  nicht enthält für alle  $q \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ .

*Beweis.* Seien  $F$  und  $F'$  zwei 1-Faktoren von  $G$ , so daß  $k \in K(F)$  und  $k \notin K(F')$  gilt.

*Fall 1:* Sei  $r = 2t+1$  ungerade. Nach dem I. Satz von Petersen können die  $2t$ -regulären Graphen  $G - K(F)$  und  $G - K(F')$  in 2-Faktoren zerlegt werden. Daher besitzt  $G$  jeden gewünschten regulären Faktor geraden Grades zwischen 2 und  $r-1$ . Ist nun  $F_{2s}$  ein  $2s$ -Faktor von  $G$ , der  $k$  enthält bzw. nicht enthält, so ist  $G - K(F_{2s})$  ein  $(2t+1-2s)$ -Faktor von  $G$ , der  $k$  nicht enthält bzw. enthält. Damit ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

*Fall 2:* Sei  $r = 2t$  gerade. Der I. Satz von Petersen zeigt unmittelbar, daß  $G$  jeden gewünschten regulären Faktor geraden Grades zwischen 2 und  $r-2$  besitzt.

Da  $G$  einen 1-Faktor hat, der  $k$  nicht enthält, besitzt der Graph  $G - k$  einen 1-Faktor. Außerdem ist  $G - K(F)$  ein  $(r-1)$ -regulärer Faktor von  $G$ , der  $k$  nicht enthält, womit  $G - k$  einen  $(r-1)$ -regulären Faktor besitzt. Wenden wir nun Satz 7.11 auf  $G - k$  an, so sehen wir, daß  $G - k$  jeden  $q$ -Faktor ungeraden Grades zwischen 1 und  $r-1$  besitzt, womit  $G$  jeden  $q$ -Faktor ungeraden Grades zwischen 1 und  $r-1$  besitzt, der  $k$  nicht enthält.

Ist nun  $F_{2s+1}$  ein  $(2s+1)$ -Faktor von  $G$ , der  $k$  nicht enthält so ist  $G - K(F_{2s+1})$  ein  $(2t - (2s+1))$ -Faktor von  $G$ , der  $k$  enthält, und Satz 7.17 ist vollständig bewiesen. ||

**Folgerung 7.4 (Kano, Yu [1] 2005).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender  $r$ -regulärer Graph gerader Ordnung. Hat  $G$  für jede Kante  $k$  von  $G$  einen 1-Faktor, der  $k$  enthält, so besitzt  $G$  einen  $q$ -Faktor der  $k$  enthält und einen  $q$ -Faktor, der  $k$  nicht enthält für alle  $q \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ .

*Beweis.* Es sei  $r \geq 2$  und  $k$  eine beliebige Kante von  $G$ . Ist  $k'$  eine zu  $k$  inzidente Kante, so besitzt  $G$  nach Voraussetzung einen 1-Faktor, der  $k'$  enthält und daher  $k$  nicht enthält. Damit hat  $G$  einen 1-Faktor, der  $k$  enthält und einen 1-Faktor, der  $k$  nicht enthält, und Folgerung 7.4 ergibt sich nun sofort aus Satz 7.17.  $\parallel$

Obwohl auch Kano und Yu Satz 7.11 von Katerinis benutzten, war ihr Beweis von Folgerung 7.4 fast drei Seiten lang.

Im Jahre 2004 haben mein Schüler Dr. Arne Hoffmann und ich [1] gezeigt, daß jeder  $r$ -reguläre Graph  $G$  mit  $\text{dm}(G) \leq 3$  einen  $q$ -Faktor für alle  $q \in \{1, 2, \dots, r\}$  besitzt, falls  $q|E(G)|$  gerade ist.

Einen  $r$ -regulären Graphen mit keinem  $q$ -Faktor für  $1 \leq q \leq r-1$  nennt Petersen *primitiv*.

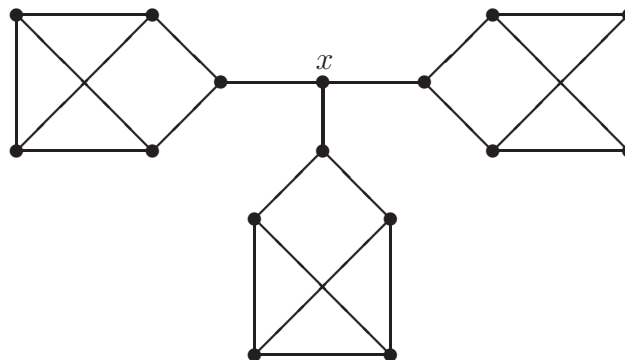
Aus dem I. Satz von Petersen folgt, daß ein  $2p$ -regulärer Graph  $G$  genau dann primitiv ist, wenn  $p = 1$  gilt, und  $G$  einen Kreis ungerader Länge besitzt. An Hand der folgenden Beispiele zeigte Petersen [1] in seiner Abhandlung, daß die Situation ganz anders ist, wenn man  $(2p+1)$ -reguläre Graphen betrachtet.

**Beispiel 7.4.** Für jedes  $p \in \mathbf{N}$  liefert die folgende Konstruktion einen  $(2p+1)$ -regulären primitiven Graphen.

Die Ecke  $u$  sei zu  $2p+1$  verschiedenen Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}$  adjazent. Jede Ecke  $x_i$  sei mit zwei weiteren Ecken  $y_i$  und  $z_i$  durch  $p$  parallele Kanten verbunden für  $i = 1, 2, \dots, 2p+1$ . Schließlich seien die Ecken  $y_i$  und  $z_i$  durch  $p+1$  parallele Kanten miteinander verbunden für  $i = 1, 2, \dots, 2p+1$ .

Da die Ecke  $u$  auf keinem Kreis liegt, besitzt dieser  $(2p+1)$ -reguläre Graph  $G$  keinen 2-Faktor, also überhaupt keinen regulären Faktor geraden Grades. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß in  $G$  auch kein regulärer Faktor ungeraden Grades existiert.

Der Fall  $p = 1$  dieses Beispiels stammt von Sylvester mit dem Petersen diese Probleme intensiv diskutiert hat. Der skizzierte Graph zeigt uns eine schlichte Version des Graphen von Sylvester.



Satz 7.3 von Wallis zeigt uns, daß der skizzierte *Sylvester-Graph* der kleinste 3-reguläre und schlichte Graph ist, der keinen 1-Faktor besitzt.

Den zweiten Teil seiner Abhandlung widmete Petersen [1] dem Studium der regulären Graphen ungeraden Grades, und er bewies den folgenden wichtigen Satz über 3-reguläre Graphen. Der Beweis von Petersen ist lang und außerordentlich kompliziert. Mit dem 1-Faktorsatz läßt sich dieses Ergebnis sehr schnell herleiten, was auch ein Indiz für die Tiefe des 1-Faktorsatzes von Tutte ist.

**Satz 7.18 (II. Satz von Petersen [1] 1891).** Ist  $G$  ein 3-regulärer Graph mit höchstens zwei Brücken, so besitzt  $G$  einen 1-Faktor.

*Beweis.* Da  $n(G)$  gerade ist, gilt  $|A| \equiv q(G - A) \pmod{2}$  für alle  $A \subseteq E(G)$ . Hat  $G$  keinen 1-Faktor, so existiert nach dem 1-Faktorsatz von Tutte eine Eckenmenge  $S \neq \emptyset$  mit  $|S| \leq q(G - S) - 2$ . Aus dem Handschlaglemma und der 3-Regularität von  $G$  folgt, daß jede ungerade Komponente von  $G - S$  durch eine ungerade Anzahl von Kanten mit  $S$  verbunden sein muß. Beachten wir, daß  $G$  höchstens zwei Brücken hat, so erkennen wir, daß die ungeraden Komponenten von  $G - S$  mindestens

$$3(q(G - S) - 2) + 2 \geq 3|S| + 2$$

Kanten nach  $S$  senden. Da aber höchstens  $3|S|$  Kanten von  $S$  zu den ungeraden Komponenten von  $G - S$  gehen, haben wir einen Widerspruch erzielt, und der II. Satz von Petersen ist bewiesen. ||

Der oben skizzierte Sylvester-Graph zeigt uns, daß der zweite Satz von Petersen im allgemeinen nicht gilt, wenn man mehr als zwei Brücken zuläßt. Als unmittelbare Folgerung aus Satz 7.18 erhalten wir die sogenannte *schwache Form des zweiten Satzes von Petersen*.

**Satz 7.19 (Petersen [1] 1891).** Ist  $G$  ein 3-regulärer Graph ohne Brücken, so besitzt  $G$  einen 1-Faktor.

Im Zusammenhang mit den Ergebnissen von Petersen schrieb König in seinem Buch [3] aus dem Jahre 1936:

“Diese Abhandlung von Petersen, an der auch Sylvester beteiligt ist, ist sicherlich eine der bedeutendsten Arbeiten über Graphentheorie, scheint aber mehr als 25 Jahre lang fast gänzlich unbeachtet geblieben zu sein.

Es ist nichts darüber bekannt, wie sich der Petersensche Satz auf reguläre Graphen vom Grad 5, 7, 9, ... ausdehnen läßt. Petersen hat die Vermutung ausgesprochen, daß auch diese Graphen nur dann primitiv sein können, wenn sie Brücken enthalten. Er hat aber “die Schwierigkeiten zu groß gefunden und die Untersuchungen auf Graphen dritten Grades beschränkt.” Am Ende seiner Abhandlung schreibt dann Petersen: “Es scheint doch, daß der hier befolgte Weg auch dort zum Ziel führen kann.”

Trotz der mehr als 40 Jahre, die seitdem vergangen sind und trotz der (besonders von Frink gefundenen) Vereinfachungen, die den Petersenschen Weg sicherlich gangbarer gemacht haben, konnte dieses Ziel bis heute nicht erreicht werden.”

Nur zwei Jahre später gab Bäßler [1] eine Antwort auf das von König gestellte Problem, und er bewies die Vermutung von Petersen (man vergleiche dazu die nächsten beiden Sätze). Analog zum zweiten Satz von Petersen beweist man das erste Resultat von Bäßler (man vgl. Aufgabe 7.14).

**Satz 7.20 (Bäßler [1] 1938).** Ein  $(2p + 1)$ -regulärer und  $2p$ -fach kantenzusammenhängender Graph (man vgl. Definition 14.1) besitzt einen 1-Faktor.

**Satz 7.21 (Bäßler [1] 1938).** Ist  $r \in \mathbb{N}$  eine ungerade Zahl mit  $r \geq 3$  und  $G$  ein zusammenhängender und  $r$ -regulärer Graph ohne Brücken, so besitzt  $G$  einen 2-Faktor.

*Beweis.* Nach Satz 7.19 ist die Aussage des Satzes für  $r = 3$  richtig. Daher sei nun  $r \geq 5$ . Ist  $X \subseteq E(G)$  und  $y$  ein Ecke von  $G - X$ , so gilt

$$d(y, G - X) = d(y, G) - m(y, X) = r - m(y, X).$$

Daher genügt es wegen Satz 7.10 für alle disjunkten Teilmengen  $X, Y \subseteq E(G)$  die Ungleichung

$$q_G(X, Y, 2) \leq 2|X| + (r - 2)|Y| - m(X, Y) \quad (7.31)$$

nachzuweisen, wobei  $q_G(X, Y, 2)$  die Anzahl der Komponenten  $U$  von  $G - (X \cup Y)$  bedeutet mit  $m_G(Y, E(U)) \equiv 1 \pmod{2}$ . Da (7.31) für  $X = Y = \emptyset$  richtig ist, sei nun  $X \cup Y \neq \emptyset$ . Nach Voraussetzung besitzt  $G$  keine Brücken, womit mindestens  $2q_G(X, Y, 2)$  Kanten von  $X \cup Y$  nach  $G - (X \cup Y)$  führen. Aus der  $r$ -Regularität folgt daher

$$2q_G(X, Y, 2) \leq r|X| + r|Y| - 2m(X, Y). \quad (7.32)$$

Die Bedingung  $m(Y, E(U)) \geq 1$  liefert die Ungleichung

$$q_G(X, Y, 2) \leq r|Y| - m(X, Y). \quad (7.33)$$

Multipliziert man (7.32) mit  $\frac{2}{r}$  und (7.33) mit  $1 - \frac{4}{r} > 0$  und addiert die beiden neuen Ungleichungen, so erhält man die gewünschte Abschätzung (7.31).  $\parallel$

Folgende schöne Verallgemeinerung der Sätze 7.18 und 7.21 haben kürzlich Fan, Liu und Liu [1] bewiesen.

**Satz 7.22 (Fan, Liu, Liu [1] 2006).** Es sei  $G$  ein  $(2p + 1)$ -regulärer Graph mit  $p \in \mathbf{N}$ . Hat  $G$  höchstens  $2p$  Brücken, so besitzt  $G$  einen 2-Faktor.

Andere Erweiterungen und Verallgemeinerungen von Satz 7.21 befinden sich in den Arbeiten von Bollobás, Saito und Wormald [1] 1985, Niessen und Randerath [1] 1998 sowie Hoffmann [1] 2002.

## 7.4 Fastreguläre Faktoren

Das nächste Resultat wurde von Erdős vermutet und erstmalig 1978 von Tutte [5] mit dem  $f$ -Faktorsatz bewiesen.

**Satz 7.23 (Tutte [5] 1978).** Ist  $G$  ein  $\delta$ -regulärer Graph, so besitzt  $G$  einen  $[p, p + 1]$ -Faktor für alle ganzen Zahlen  $p$  mit  $0 \leq p \leq \delta$ .

**Bemerkung 7.5.** Satz 7.23 ist nur im Fall, daß  $\delta$  ungerade ist neu, denn im anderen Fall liefert schon der I. Satz von Petersen eine genauere Aussage.

Kurze Zeit später fanden Bollobás und Thomassen Verallgemeinerungen von Satz 7.23. Zur Formulierung dieser Verallgemeinerungen benötigen wir folgende

**Definition 7.7.** Ein Graph  $G$  heißt  $r$ -fastregulär ( $r \in \mathbf{N}_0$ ), wenn für alle  $x, y \in E(G)$  gilt:

$$|d(x, G) - d(y, G)| \leq r \quad (7.34)$$

Der Graph  $G$  heißt *lokal- $r$ -fastregulär*, wenn alle adjazenten Ecken  $x$  und  $y$  aus  $G$  die Ungleichung (7.34) erfüllen.

**Satz 7.24 (Thomassen [3] 1981).** Es sei  $G$  ein 1-fastregulärer Graph. Dann besitzt  $G$  einen  $[p, p + 1]$ -Faktor für alle ganzen Zahlen  $p$  mit  $0 \leq p \leq \delta(G)$ .

**Satz 7.25 (Bollobás [2] 1979).** Ist  $G$  ein  $r$ -fastregulärer ( $r > 0$ ) Graph, so besitzt  $G$  einen  $[p, p + r]$ -Faktor für alle ganzen Zahlen  $p$  mit  $0 \leq p \leq \delta(G)$ .



Offensichtlich folgt Satz 7.23 aus Satz 7.24 und Satz 7.24 aus Satz 7.25. Wir wollen jetzt Satz 7.25 für lokal- $r$ -fastreguläre Graphen beweisen.

**Satz 7.26 (Joentgen, Volkmann [1] 1991).** Ist  $G$  ein lokal- $r$ -fastregulärer ( $r > 0$ ) Graph, so besitzt  $G$  einen  $[p, p + r]$ -Faktor für alle ganzen Zahlen  $p$  mit  $0 \leq p \leq \delta(G) = \delta$ .

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, daß  $G$  einen  $[\delta, \delta + r]$ -Faktor besitzt.

i) Ist  $\Delta(G) = \Delta \leq \delta + r$ , so sind wir fertig.

Im Fall  $\Delta \geq \delta + r + 1$  genügt es nachzuweisen, daß  $G$  einen lokal  $r$ -fastregulären Faktor  $H_1$  besitzt mit  $\delta(H_1) = \delta$  und  $\Delta(H_1) < \Delta$ . Denn iteriert man diesen Schritt oft genug, so erhält man einen lokal  $r$ -fastregulären Faktor  $H$  von  $G$  mit  $\delta(H) = \delta$  und  $\Delta(H) \leq \delta(H) + r$ , womit  $H$  gleichzeitig ein  $[\delta, \delta + r]$ -Faktor ist.

ii) Es sei  $\Delta \geq \delta + r + 1$  und  $I \subseteq E(G)$  die Menge der Ecken von maximalem Grad  $\Delta$ . Sind alle Ecken aus  $I$  paarweise nicht adjazent, so setze man  $G_1 = G$ ,  $I_1 = I$  und gehe zu iii). Ist das nicht der Fall, so verbinde die Kante  $k$  zwei verschiedene Ecken  $x, y \in I$ . Offensichtlich ist  $G' = G - k$  ein lokal  $r$ -fastregulärer Faktor von  $G$  mit  $\delta(G') = \delta$ . Im Fall  $\Delta(G') < \Delta$  ist  $G' = H_1$  ein gesuchter Faktor. Im Fall  $\Delta(G') = \Delta$  ist  $I' = I - \{x, y\}$  die Menge der Ecken von maximalem Grad in  $G'$ . Sind die Ecken aus  $I'$  paarweise nicht adjazent, so setze man  $G_1 = G'$ ,  $I_1 = I'$  und gehe zu iii). Ist das nicht der Fall, so wiederhole man die beschriebene Prozedur so lange, bis die verbleibende Menge  $I_1$  der Ecken von maximalem Grad  $\Delta$  aus paarweise nicht adjazenten Ecken besteht oder der Maximalgrad absinkt. Sinkt der Maximalgrad ab, so sind wir fertig. Im anderen Fall erhalten wir einen lokal  $r$ -fastregulären Faktor  $G_1$  von  $G$  mit  $\delta(G_1) = \delta$  und  $\Delta(G_1) = \Delta$ .

iii) Die Menge  $Y \subseteq I_1$  bestehe aus Ecken, die mit einer Schlinge inzidieren. Wählen wir zu jeder Ecke  $y \in Y$  eine Schlinge, die mit  $y$  inzidiert, so erhalten wir eine Menge von Schlingen, die wir mit  $L$  bezeichnen (im Fall  $Y = \emptyset$  setzen wir  $L = \emptyset$ ). Nun ist leicht zu sehen, daß auch  $G_2 = G_1 - L$  ein lokal  $r$ -fastregulärer Faktor von  $G_1$  und damit von  $G$  ist mit  $\delta(G_2) = \delta$ . Im Fall  $Y = I_1$  gilt sogar  $\Delta(G_2) < \Delta$ , und wir haben einen gewünschten Faktor  $H_1 = G_2$  gefunden.

iv) Ist  $X = I_1 - Y \neq \emptyset$ , so sei  $B$  der bipartite Graph, bestehend aus der Bipartition  $X, N(X, G_2)$  zusammen mit allen Kanten von  $G_2$ , die die Ecken aus  $X$  mit denen aus  $N(X, G_2)$  verbinden. Da  $d(x, B) = \Delta$  für jedes  $x \in X$  gilt, existiert nach Folgerung 6.4 ein Matching  $M \subseteq K(B)$ , welches mit allen Ecken von  $X$  inzidiert. Da  $H_1 = G_2 - M$  ein Faktor von  $G$  ist mit  $\delta(H_1) = \delta$  und  $\Delta(H_1) < \Delta$ , verbleibt zu zeigen, daß  $H_1$  lokal  $r$ -fastregulär ist.

Es sei  $A$  diejenige Eckenmenge aus  $N(X, G_2)$ , die mit  $M$  inzidiert. Sind  $x$  und  $y$  zwei adjazente Ecken aus  $H_1$  mit  $x, y \in X \cup A$  oder  $x, y \notin X \cup A$ , so erkennt man ohne Mühe

$$|d(x, H_1) - d(y, H_1)| = |d(x, G_2) - d(y, G_2)| \leq r.$$

Nun gelte  $x \in X \cup A$  und  $y \notin X \cup A$ . Da  $G_2$  lokal- $r$ -fastregulär ist, gilt  $\Delta - d(x, G_2) \leq r$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} d(x, H_1) - d(y, H_1) &= d(x, G_2) - 1 - d(y, G_2) \leq r - 1 < r, \\ d(y, H_1) - d(x, H_1) &= d(y, G_2) - d(x, G_2) + 1 \\ &\leq \Delta - 1 - (\Delta - r) + 1 = r, \end{aligned}$$

womit auch  $H_1$  lokal- $r$ -fastregulär ist.

Wendet man die unter ii) - iv) beschriebene Methode in entsprechender Form auf den  $[\delta, \delta + r]$ -Faktor an, so erhält man einen Faktor, dessen Minimalgrad  $\geq \delta - 1$  und dessen



Maximalgrad  $\leq \delta + r - 1$  ist, womit ein  $[\delta - 1, \delta - 1 + r]$ -Faktor von  $G$  existiert. Durch wiederholtes Anwenden dieses Verfahrens ergibt sich die Aussage des Satzes.  $\parallel$

Der Beweis von Satz 7.26 liefert sofort folgenden Zusammenhang zwischen den lokal- $r$ -fastregulären und den  $r$ -fastregulären Graphen.

**Folgerung 7.5 (Joentgen, Volkmann [1] 1991).** Ist  $G$  ein lokal- $r$ -fastregulärer Graph ( $r > 0$ ), so besitzt  $G$  einen  $r$ -fastregulären Faktor  $H$  mit  $\delta(H) = \delta(G)$ .

**Bemerkung 7.6.** Für  $r = 0$  ist Folgerung 7.5 nicht gültig. Denn betrachtet man z.B. den Graphen  $G = K_3 \cup K_2$ , so ist  $G$  natürlich lokal 0-fastregulär, aber  $G$  besitzt keinen 0-fastregulären Faktor  $H$  mit  $\delta(H) = \delta(G) = 1$ , d.h.  $G$  besitzt keinen 1-Faktor.

**Satz 7.27 (Egawa, Kano [1] 1996).** Es seien  $G$  ein zusammenhängender Multigraph und  $g, f: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  zwei Abbildungen mit  $g(x) \leq f(x)$  und  $g(x) \leq d(x, G)$  für alle  $x \in E(G)$ . Erfüllen  $f, g$  und  $G$  die drei folgenden Bedingungen, so besitzt  $G$  einen  $(g, f)$ -Faktor.

- i) Entweder besitzt  $G$  eine Ecke  $v$  mit  $g(v) < f(v)$ , oder es gilt  $g(x) = f(x)$  für alle  $x \in E(G)$  und  $\sum_{x \in E(G)} f(x) \equiv 0 \pmod{2}$ .
- ii) Für jedes Paar adjazenter Ecken  $x$  und  $y$  aus  $G$  gilt

$$\frac{g(x)}{d(x, G)} \leq \frac{f(y)}{d(y, G)}.$$

- iii) Für jede echte Teilmenge  $X$  von  $E(G)$  mit  $g(x) = f(x)$  für alle  $x \in X$  und  $G[X]$  zusammenhängend gilt

$$\sum_{a \in E(G) - X} m_G(a, X) \cdot \min\left(\frac{f(a)}{d(a, G)}, 1 - \frac{g(a)}{d(a, G)}\right) \geq 1.$$

*Beweis.* Sind  $X$  und  $Y$  zwei disjunkte Teilmengen von  $E(G)$ , so genügt es wegen Satz 7.13  $\Theta_G(X, Y, g, f) \geq 0$  nachzuweisen. Im Fall  $X = Y = \emptyset$  gilt wegen  $\kappa(G) = 1$  und der Bedingung i)  $q_G(\emptyset, \emptyset, g, f) = 0$  und damit  $\Theta_G(\emptyset, \emptyset, g, f) = 0$ . Daher gelte im folgenden  $X \cup Y \neq \emptyset$ , und wir setzen  $q_G(X, Y, g, f) = t \in \mathbb{N}_0$ . Ist  $t \geq 1$ , so seien  $U_1, U_2, \dots, U_t$  die Komponenten von  $G - (X \cup Y)$ , die den Bedingungen von Satz 7.13 genügen. Beachtet man die Identität

$$m(X, Y) = m_G(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} m(x, y),$$

so ergibt sich aus den Bedingungen ii) und iii) mit  $d(u) = d(u, G)$

$$\Theta_G(X, Y, g, f) = \sum_{x \in X} d(x) \frac{f(x)}{d(x)} + \sum_{y \in Y} d(y) \left(1 - \frac{g(y)}{d(y)}\right) - m(X, Y) - t$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{i=1}^t \left\{ -1 + \sum_{x \in X} m(x, E(U_i)) \frac{f(x)}{d(x)} + \sum_{y \in Y} m(y, E(U_i)) \left( 1 - \frac{g(y)}{d(y)} \right) \right\} \\
&+ \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} m(x, y) \frac{f(x)}{d(x)} + \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} m(x, y) \left( 1 - \frac{g(y)}{d(y)} \right) \\
&- \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} m(x, y) \\
&= \sum_{i=1}^t \left\{ \sum_{x \in X} m(x, E(U_i)) \frac{f(x)}{d(x)} + \sum_{y \in Y} m(y, E(U_i)) \left( 1 - \frac{g(y)}{d(y)} \right) - 1 \right\} \\
&+ \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} m(x, y) \left( \frac{f(x)}{d(x)} - \frac{g(y)}{d(y)} \right) \\
&\geq \sum_{i=1}^t \left\{ \sum_{a \in E(G) - E(U_i)} m(a, E(U_i)) \cdot \min \left( \frac{f(a)}{d(a)}, 1 - \frac{g(a)}{d(a)} \right) - 1 \right\} \geq 0.
\end{aligned}$$

Im Fall  $t = 0$  wird die leere Summe wie üblich gleich Null gesetzt. ||

**Folgerung 7.6 (Egawa, Kano [1] 1996).** Es sei  $G$  ein Graph, und es seien  $g, f: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  zwei Abbildungen mit  $g(x) \leq d(x, G)$  und  $g(x) < f(x)$  für alle  $x \in E(G)$ . Ist

$$\frac{g(x)}{d(x, G)} \leq \frac{f(y)}{d(y, G)}$$

für alle adjazenten Ecken  $x, y \in E(G)$ , so besitzt  $G$  einen  $(g, f)$ -Faktor.

*Beweis.* Da für alle  $x \in E(G)$  die Ungleichung  $g(x) < f(x)$  gilt, sind die Bedingungen aus Satz 7.27 für jede Komponente von  $G$  erfüllt, womit sich Folgerung 7.6 sofort aus Satz 7.27 ergibt. ||

**Folgerung 7.7 (Joentgen, Volkmann [1] 1991).** Es sei  $G$  ein lokal  $r$ -fastregulärer Graph und  $p, s$  ganze Zahlen mit  $0 \leq p \leq \delta(G) = \delta$  und  $s > 0$ . Wird die Ungleichung  $rp \leq \delta s$  erfüllt, so besitzt  $G$  einen  $[p, p + s]$ -Faktor.

*Beweis.* Ist  $\delta = 0$ , so gibt es nichts zu beweisen. Daher sei nun  $\delta \geq 1$ . Definieren wir die Abbildungen  $g, f: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  durch  $g(x) = p$  und  $f(x) = p + s$  für alle  $x \in E(G)$ , so gilt wegen  $s > 0$  für alle Ecken  $x$  die Ungleichung  $g(x) < f(x)$ . Aus den Voraussetzungen  $rp \leq \delta s$  und  $d(y) \leq d(x) + r$  für alle adjazenten Ecken  $x$  und  $y$  folgt

$$\frac{g(x)}{f(y)} = \frac{p}{p + s} \leq \frac{\delta}{\delta + r} \leq \frac{d(x)}{d(y)}$$

für alle adjazenten Ecken  $x$  und  $y$ . Daher besitzt  $G$  nach Folgerung 7.6 einen  $[p, p + s]$ -Faktor. ||

Setzt man in Folgerung 7.7  $r = s$ , so ergibt sich sofort Satz 7.26.

Mit der Voraussetzung, daß  $G$  ein  $r$ -fastregulärer Graph ist, geht Folgerung 7.7 auf Kano und Saito [1] 1983 zurück. In der gleichen Note bewiesen sie auch das nächste Ergebnis, das man ebenfalls ohne Mühe aus Folgerung 7.6 erhält.

**Folgerung 7.8 (Kano, Saito [1] 1983).** Es sei  $G$  ein Graph, und es seien  $g, f: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  zwei Abbildungen mit  $g(x) < f(x)$  für alle  $x \in E(G)$ . Existiert eine reelle Zahl  $\omega$  mit  $0 \leq \omega \leq 1$ , so daß  $g(x) \leq \omega d(x, G) \leq f(x)$  für alle  $x \in E(G)$  gilt, so besitzt  $G$  einen  $(g, f)$ -Faktor.

Als weitere Anwendung des  $(g, f)$ -Faktorsatzes von Lovász konnte Kano [1] 1986 folgende hochinteressante Verschärfung von Satz 7.23 für den ungeraden Fall beweisen.

**Satz 7.28 (Kano [1] 1986).** Ist  $G$  ein  $\delta$ -regulärer Multigraph, so besitzt  $G$  einen perfekten  $[p, p+1]$ -Faktor für alle ganzen Zahlen  $p$  mit  $0 \leq p \leq \frac{2}{3}\delta - 1$ .

Darüber hinaus konstruierte Kano [1] schlichte,  $\delta$ -reguläre Graphen, die für  $\delta - \sqrt{\delta+1} < p \leq \delta - 2$  keinen perfekten  $[p, p+1]$ -Faktor besitzen. Der Fall  $\frac{2}{3}\delta \leq p \leq \delta - \sqrt{\delta+1}$  ist noch ungeklärt.

**Bemerkung 7.7.** Der Satz 7.28 von Kano kann nicht für fastreguläre oder lokal fastreguläre Graphen gelten. Denn betrachtet man z.B. den vollständigen bipartiten Graphen  $G = K_{\delta, \delta+1}$  mit der Bipartition  $A, B$ , so kann dieser keinen perfekten  $[p, p+1]$ -Faktor besitzen, da jeder reguläre Teilgraph von  $G$  gleich viele Ecken aus  $A$  und  $B$  besitzt.

Weitere interessante Ergebnisse zur Faktortheorie findet man in den Dissertationen meiner Schüler Dr. Thomas Niessen [2] 1994 und Dr. Arne Hoffmann [2] 2002.

Die Matching- und Faktortheorie gehören heute zu den am weitesten erforschten Teilgebieten der Graphentheorie. Den interessierten Leser möchte ich auf die umfassende Werke von Lovász und Plummer [1] "Matching Theory" aus dem Jahre 1986 und Akiyama und Kano [2] "Factors and Factorizations of Graphs" aus dem Jahre 2011 hinweisen, die eine Fülle von Resultaten zu diesem Thema enthalten. Die wichtigsten Ergebnisse der Faktortheorie bis 1985 findet man in dem Übersichtsartikel "Factors and factorizations of graphs - a survey" von Akiyama und Kano [1]. Die Entwicklung der Faktortheorie von den Anfängen bis heute, mit besonderer Würdigung der Petersenschen Sätze, wurde in der 1995 erschienenen Arbeit "Regular graphs, regular factors, and the impact of Petersen's Theorems" von Volkmann [6] beschrieben. Im Jahre 2007 hat Plummer [2] einen weiteren Übersichtsartikel mit dem Titel "Graph factors and factorization: 1985-2003: A survey" hinzugefügt.

## 7.5 Aufgaben

**Aufgabe 7.1.** Ist  $G$  ein Graph und  $r \in \mathbb{N}$  eine ungerade Zahl, so zeige man:

- i) Besitzt  $G$  einen  $r$ -Faktor, so ist die Ordnung  $n(G)$  gerade, und es gilt  $m(G) \geq \frac{r}{2}n(G)$ .
- ii) Ist  $G$   $r$ -faktorierbar, so ist die Größe  $m(G)$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\frac{r}{2}n(G)$ .

**Aufgabe 7.2.** Es sei  $G$  ein  $p$ -regulärer, bipartiter Graph ( $p \in \mathbb{N}$ ). Man zeige, daß  $G$  genau dann  $r$ -faktorierbar ist ( $r \in \mathbb{N}$ ), wenn  $p = r \cdot t$  mit  $t \in \mathbb{N}$  gilt.

**Aufgabe 7.3.** Als Anwendung des 1-Faktorsatzes zeige man: Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $|E(G)| = 8$ ,  $|K(G)| \geq 15$  und  $2 = \delta(G) \leq \Delta(G) \leq 5$ , so besitzt  $G$  einen 1-Faktor.

**Aufgabe 7.4.** Es sei  $G$  ein schlichter und Eulerscher Graph der Ordnung 10 mit  $\delta(G) \geq 3$ .

- i) Gibt es in  $G$  mindestens fünf Ecken  $x$  mit  $d(x, G) \geq 5$ , so zeige man, daß  $G$  einen 1-Faktor besitzt.
- ii) Man gebe ein Beispiel  $G$  an, das nur vier Ecken  $x$  mit  $d(x, G) \geq 5$  besitzt, welches

keinen 1-Faktor besitzt.

**Aufgabe 7.5.** Es seien  $H$  und  $G$  zwei disjunkte Graphen mit folgenden Eigenschaften:

- a)  $n(H) \leq n(G)$ .
- b)  $G$  besitzt einen 1-Faktor.

Man zeige, daß der Graph  $H+G$  (man vgl. Definition 7.3) genau dann einen 1-Faktor besitzt, wenn  $n(H)$  gerade ist.

**Aufgabe 7.6.** Man beweise analog zu Satz 7.3 den Satz 7.4.

**Aufgabe 7.7.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer Baum. Man zeige, daß  $G$  genau dann einen 1-Faktor besitzt, wenn  $q(G-x) = 1$  für alle  $x \in E(G)$  gilt.

**Aufgabe 7.8.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit einem eindeutigen 1-Faktor, so beweise man  $|K(G)| \leq \frac{|E(G)|^2}{4}$ .

**Aufgabe 7.9.** Es sei  $G$  der vollständige  $p$ -partite Graph  $K_{r_1, r_2, \dots, r_p}$  mit  $p \geq 2$ , und es gelte o.B.d.A.  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ . Man zeige, daß  $G$  genau dann einen 1-Faktor besitzt, wenn  $n(G)$  gerade ist und  $\sum_{i=1}^{p-1} r_i \geq r_p$  gilt.

**Aufgabe 7.10.** Man beweise Folgerung 7.3.

**Aufgabe 7.11.** Für die Graphen aus Beispiel 7.4 gebe man schlichte Versionen an.

**Aufgabe 7.12.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender 3-regulärer Graph. Liegen alle Brücken von  $G$  auf einem Weg, so zeige man, daß  $G$  einen 1-Faktor besitzt.

**Aufgabe 7.13.** Es sei  $G$  ein schlichter und  $r$ -regulärer Graph der Ordnung  $2n$  mit  $r \geq n \geq 2$ . Man zeige, daß  $G$  einen  $q$ -Faktor für alle  $q \in \{1, 2, \dots, r\}$  besitzt.

**Aufgabe 7.14.** Man beweise Satz 7.20.

**Aufgabe 7.15.** Man beweise Folgerung 7.5.

**Aufgabe 7.16.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n(G) = 2p$  mit  $\delta(G) \geq p+1 \geq 3$ . Man zeige, daß  $G$  einen 3-Faktor besitzt.

**Aufgabe 7.17.** Im Zusammenhang mit Satz 7.17 konstruiere man Gegenbeispiele zur folgenden Aussage:

Es sei  $k$  eine Kante eines  $r$ -regulären Graphen. Gehört  $k$  zu einem 1-Faktor von  $G$ , so besitzt  $G$  einen  $q$ -Faktor der  $k$  enthält für alle  $q \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ .

**Aufgabe 7.18.** Es sei  $G$  ein schlichter und  $r$ -regulärer Graph gerader Ordnung  $n$  mit  $r \geq 2$ . Ist  $n \leq 2r$ , so zeige man, daß jede Kante von  $G$  zu einem 1-Faktor von  $G$  gehört.

# Kapitel 8

## Blöcke, Line-Graphen und Graphenoperationen

### 8.1 Schnittecken und Blöcke

**Definition 8.1.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Multigraph. Eine Ecke  $x$  aus  $G$  heißt *Schnittecke* von  $G$ , wenn  $\kappa(G - x) > 1$  ist. Ein zusammenhängender Teilgraph  $B$  von  $G$ , der bezüglich  $B$  keine Schnittecke besitzt, ist ein *Block* von  $G$ , wenn es keinen zusammenhängenden Teilgraphen  $B' \subseteq G$  ohne Schnittecke gibt mit  $B \subseteq B'$  und  $B \neq B'$ . Damit ist ein Block eines Multigraphen  $G$  ein maximaler zusammenhängender Teilgraph ohne Schnittecke. Besitzt ein zusammenhängender Multigraph  $G$  keine Schnittecke, so bezeichnet man  $G$  auch als *Block* (damit ist der  $K_1$  ein Block). Man nennt einen Block  $B$  von  $G$  *Endblock*, wenn es in  $B$  höchstens eine Ecke gibt, die Schnittecke von  $G$  ist.

**Satz 8.1 (König [3] 1936).** Eine Ecke  $x$  eines zusammenhängenden Multigraphen  $G$  ist genau dann eine Schnittecke von  $G$ , wenn zwei von  $x$  verschiedene Ecken  $u, v$  ( $u \neq v$ ) existieren, so daß  $x$  auf jedem Weg von  $u$  nach  $v$  liegt.

*Beweis.* Ist  $x$  eine Schnittecke von  $G$ , so ist  $G - x$  nicht zusammenhängend. Liegen die beiden Ecken  $u$  und  $v$  in verschiedenen Komponenten von  $G - x$ , so existiert kein Weg von  $u$  nach  $v$  in  $G - x$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, führen dann in  $G$  alle Wege von  $u$  nach  $v$  über  $x$ .

Gibt es umgekehrt zwei Ecken  $u, v$  in  $G$ , so daß jeder Weg von  $u$  nach  $v$  durch die Ecke  $x$  geht, so existiert in  $G - x$  kein Weg von  $u$  nach  $v$ , womit  $G - x$  nicht zusammenhängend, also  $x$  eine Schnittecke ist. ||

Wir beweisen nun einen wichtigen Struktursatz, den man im wesentlichen in dem Buch von König [3] S. 224 – 228 findet.

**Satz 8.2 (König [3] 1936).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Multigraph mit einer Schnittecke. Sind  $B_1, B_2, \dots, B_t$  alle Blöcke von  $G$ , so gelten folgende Aussagen für  $1 \leq i < j \leq t$ :

- i)  $|E(B_i) \cap E(B_j)| \leq 1$ .
- ii)  $K(B_i) \cap K(B_j) = \emptyset$  und  $K(G) = K(B_1) \cup K(B_2) \cup \dots \cup K(B_t)$ .
- iii) Ist  $x \in E(B_i) \cap E(B_j)$ , so ist  $x$  eine Schnittecke von  $G$ .
- iv) Ist  $x$  eine Schnittecke von  $G$ , so gehört  $x$  zu mindestens zwei verschiedenen Blöcken von  $G$ .
- v) Gehören die Ecken  $a$  und  $b$  nicht zu einem Block, so liegt auf jedem Weg von  $a$  nach

$b$  eine Schnittecke  $x \neq a, b$  von  $G$ , so daß  $a$  und  $b$  in verschiedenen Komponenten von  $G - x$  liegen.

*Beweis.* i) Gäbe es zwei verschiedene Ecken  $x, y \in E(B_i) \cap E(B_j)$ , so besäße der Teilgraph  $B_i \cup B_j$  keine Schnittecke, womit  $B_i$  und  $B_j$  keine Blöcke von  $G$  wären.

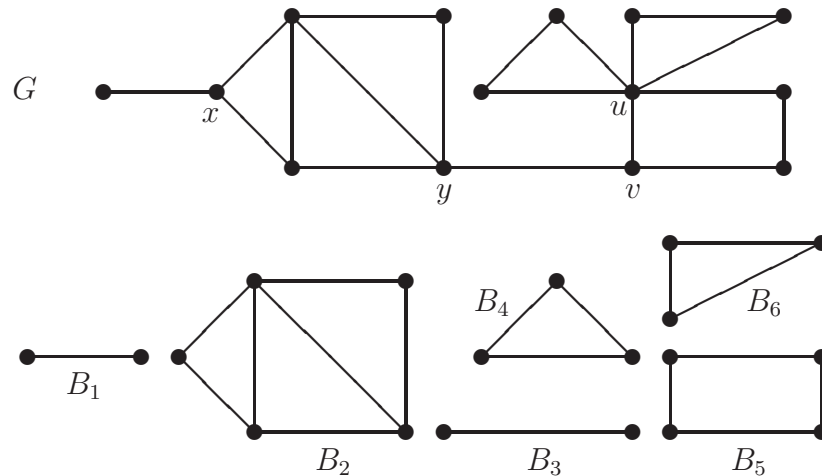
ii) Die erste Aussage folgt direkt aus i). Da jede Kante in einem Block liegt, ergibt sich sofort der zweite Teil von ii).

iii) Es seien  $u \in E(B_i)$  und  $v \in E(B_j)$  mit  $u, v \neq x$ . Ist  $x$  keine Schnittecke von  $G$ , so gibt es in  $G - x$  einen Weg  $W$  von  $u$  nach  $v$ . Dann besitzt aber der Teilgraph  $B_i \cup B_j \cup W$  keine Schnittecke, womit wir einen Widerspruch erzeugt haben.

iv) Es seien  $H$  und  $L$  zwei Komponenten von  $G - x$ . Dann existieren zwei Kanten  $ax$  und  $bx$  mit  $a \in E(H)$  und  $b \in E(L)$ . Da  $x$  eine Schnittecke von  $G$  ist, müssen diese beiden Kanten zu verschiedenen Blöcken von  $G$  gehören, womit  $x$  in mindestens zwei Blöcken liegt.

v) Es sei  $W_{ab} = (a_0, k_1, a_1, k_2, a_2, \dots, a_{p-1}, k_p, a_p)$  ein Weg von  $a = a_0$  nach  $b = a_p$  in  $G$  mit  $k_1 \in K(B_i)$ , und es sei  $r$  der kleinste Index mit  $a_r \notin E(B_i)$ . Dann liegt  $a_{r-1}$  in mindestens zwei Blöcken und ist daher nach iii) eine Schnittecke. Gäbe es in  $G - a_{r-1}$  noch einen Weg  $P$  von  $a$  nach  $b$ , so sei  $s$  mit  $0 \leq s \leq r - 2$  der größte Index und  $l$  mit  $r \leq l \leq p$  der kleinste Index, so daß  $a_s, a_l \in E(P)$  gilt. Dann gehören aber die Ecken  $a_s, \dots, a_{r-2}, a_{r-1}, a_r, \dots, a_l$  zu einem Block  $B^*$  von  $G$  und wegen  $k_{r-1} \in K(B_i) \cap K(B^*)$  folgt aus ii)  $B_i = B^*$ , womit entgegen unserer Annahme auch noch  $a_r$  zu  $B_i$  gehört. Daher ist  $x = a_{r-1}$  eine gesuchte Schnittecke von  $G$ . ||

**Beispiel 8.1.** Die Skizze zeigt uns einen Graphen  $G$  und seine Zerlegung in 6 kantendisjunkte Blöcke. Die Ecken  $x, y, u$  und  $v$  sind die Schnittecken von  $G$ , und die Blöcke  $B_1, B_4$  und  $B_6$  sind die Endblöcke von  $G$ .



**Satz 8.3 (Harary, Norman [1] 1953).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Multigraph. Dann besitzt  $G$  einen Block, der alle Ecken des Zentrums von  $G$  enthält.

*Beweis.* Angenommen, das Zentrum  $Z(G)$  liegt nicht in einem Block von  $G$ . Dann besitzt  $G$  nach Satz 8.2 v) eine Schnittecke  $v$ , so daß  $G - v$  mindestens zwei Komponenten  $G_1$  und  $G_2$  hat, in denen sich Elemente aus  $Z(G)$  befinden. Ist  $e(v)$  die Exzentrizität der Ecke  $v$  in  $G$ , so sei  $u \in E(G)$  mit  $d_G(u, v) = e(v)$  und  $W_{uv}$  ein Weg von  $u$  nach  $v$  in  $G$  mit  $L(W_{uv}) = e(v)$ . Wenigstens eine der beiden Komponenten  $G_1$  und  $G_2$  enthält dann keine Ecke des Weges  $W_{uv}$ . Es gelte o.B.d.A.  $E(W_{uv}) \cap E(G_2) = \emptyset$ . Nun sei  $x \in Z(G) \cap E(G_2)$  und  $W_{vx}$  ein Weg von



$v$  nach  $x$  in  $G$  mit  $L(W_{vx}) = d_G(v, x)$ . Fügt man die beiden Wege  $W_{uv}$  und  $W_{vx}$  zusammen, so erhält man einen Weg  $W_{ux}$  von  $u$  nach  $x$  in  $G$  mit  $L(W_{ux}) = d_G(u, x)$ . Denn gäbe es einen kürzeren Weg von  $u$  nach  $x$ , so würde dieser die Ecke  $v$  nicht enthalten, womit aber  $u$  und  $x$  in der gleichen Komponente von  $G - v$  lägen. Daraus ergibt sich

$$e(x) \geq d_G(u, x) = L(W_{ux}) > L(W_{uv}) = e(v),$$

was ein Widerspruch zu der Tatsache ist, daß die Ecke  $x$  zum Zentrum von  $G$  gehört. ||

**Folgerung 8.1 (Jordan [1] 1869).** Da in einem nicht trivialen Baum jeder Block ein  $K_2$  ist, besteht das Zentrum eines Baumes entweder aus einem  $K_1$  oder einem  $K_2$ .

**Bemerkung 8.1.** Jeder Graph kann das Zentrum eines anderen Graphen sein. Denn ist  $G$  ein beliebiger Graph, so betrachte man z.B.  $K_2 \cup G \cup K_2$ . In diesem Graphen verbinde man jeweils eine Ecke der beiden vollständigen Graphen  $K_2$  mit allen Ecken von  $G$  durch eine Kante. Für den so konstruierten Graphen  $H$  gilt dann  $\text{dm}(H) = 4$ ,  $r(H) = 2$  und  $Z(H) = G$ .

Weitere Informationen zu den Begriffen Durchmesser, Radius, Zentrum usw. erhält man aus dem Lehrbuch von Buckley und Harary [1] 1990.

**Definition 8.2.** Es sei  $G$  ein beliebiger Graph und  $k = ab$  eine Kante von  $G$ . Wir sagen  $k$  wird *unterteilt*, wenn wir zu  $G$  eine neue Ecke  $x$  hinzufügen und die Kante  $k$  durch zwei neue Kanten  $ax$  und  $xb$  ersetzen. Ein Graph  $H$  heißt *Unterteilungsgraph* von  $G$ , wenn man  $H$  aus  $G$  durch sukzessives Unterteilen von Kanten erhält.

**Satz 8.4 (Whitney [4] 1932).** Ist  $G$  ein zusammenhängender Multigraph mit  $|E(G)| \geq 3$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $G$  ist ein Block.
- ii) Je zwei Ecken von  $G$  liegen auf einem gemeinsamen Kreis.
- iii) Je eine Ecke und eine Kante von  $G$  liegen auf einem gemeinsamen Kreis.
- iv) Je zwei Kanten von  $G$  liegen auf einem gemeinsamen Kreis.

*Beweis.* Aus i) folgt ii). Sei  $a$  eine beliebige Ecke von  $G$  und  $U(a)$  die Menge der Ecken, die auf einem gemeinsamen Kreis mit  $a$  liegen. Da  $G$  ein Block ist, gibt es keine Schmittecke, und da  $|E(G)| \geq 3$  gilt, enthält  $G$  auch keine Brücke. Daher liegt nach Folgerung 1.1 jede Kante auf einem Kreis, womit alle Nachbarn von  $a$  zu  $U(a)$  gehören. Ist  $U(a) \neq E(G)$ , so existiert eine Ecke  $b \in E(G) - U(a)$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $a_0 a_1 \dots a_t$  von  $a = a_0$  nach  $b = a_t$ . Es sei  $i$  der kleinste Index mit  $a_i \notin U(a)$  und  $a_{i-1} \in U(a)$  und  $C$  ein Kreis, der die beiden Ecken  $a$  und  $a_{i-1}$  enthält. Da  $a_{i-1}$  keine Schmittecke ist und  $a_{i-1} \neq a$  gilt, existiert ein Weg  $W = a_i = x_0 x_1 \dots x_r = a$ , der die Ecke  $a_{i-1}$  nicht enthält. Ist  $a$  die einzige gemeinsame Ecke von  $C$  und  $W$ , so erkennt man leicht, daß es einen Kreis gibt, der die Ecken  $a$  und  $a_i$  enthält, womit wir einen Widerspruch erhalten. Daher gibt es weitere gemeinsame Ecken von  $C$  und  $W$ . Sei  $j$  der kleinste Index mit  $1 \leq j < r$ , so daß  $x_j$  zu  $C$  gehört. Dann läßt sich ein Kreis, der die Ecken  $a$  und  $a_i$  enthält, folgendermaßen konstruieren: Beginnend bei  $a_i$  nehme man zunächst den Teilweg von  $a_i$  nach  $x_j$  von  $W$ , danach den Teil des Kreises  $C$  von  $x_j$  nach  $a$ , der  $a_{i-1}$  nicht enthält, dann den Teil des Kreises  $C$  von  $a$  nach  $a_{i-1}$ , der noch nicht genommen wurde und zum Schluß die Kante  $a_{i-1} a_i$ . (Man beachte, daß  $x_j = a_{i-1}$  nicht möglich ist.) Damit haben wir einen Widerspruch erzeugt, womit es eine solche Ecke  $b$  nicht geben kann.



Aus ii) folgt i). Hätte  $G$  eine Schnittecke  $x$ , so würden nach Satz 8.1 zwei Ecken  $u, v$  existieren, so daß  $x$  auf jedem Weg von  $u$  nach  $v$  läge. Ist nun  $C$  ein Kreis, der die beiden Ecken  $u$  und  $v$  enthält, so ergibt das einen offensichtlichen Widerspruch.

Aus i) folgt iii). Es sei  $k = ab$  und o.B.d.A.  $u \neq a, b$ . Durch Einfügen einer neuen Ecke  $x$  unterteilen wir die Kante  $k$  in die Kanten  $ax$  und  $xb$ . Dieser neue Graph  $G'$  ist wieder ein Block und erfüllt damit ii). Daher gibt es in  $G'$  einen Kreis, der durch die Ecken  $x$  und  $u$  geht, womit ein entsprechender Kreis in  $G$  die Kante  $k$  und die Ecke  $u$  enthält.

Aus i) folgt iv) zeigt man analog zum letzten Teil des Beweises.

Da ii) sofort aus iii) und iii) sofort aus iv) folgt, ist Satz 8.4 vollständig bewiesen. ||

Als erste Anwendung von Satz 8.4 wollen wir ein hübsches Resultat von Rubin vorstellen (man vgl. Erdős, Rubin und Taylor [1] 1980 oder Entringer [1] 1985).

**Satz 8.5 (Rubin).** Es sei  $G$  ein schlichter Block mit  $|E(G)| \geq 3$ , der jedoch kein Kreis ist. Es gibt genau dann Kreise gerader und ungerader Länge in  $G$ , wenn  $G$  nicht bipartit ist.

*Beweis.* Besitzt  $G$  Kreise gerader und ungerader Länge, so ist  $G$  nach dem Satz von König (Satz 4.15) nicht bipartit.

Ist  $G$  nicht bipartit, so gibt es nach dem Satz von König sicher einen Kreis ungerader Länge in  $G$ . Daher müssen wir noch die Existenz eines Kreises gerader Länge nachweisen. Es sei  $C = (x_1, k_1, x_2, \dots, x_p, k_p, x_1)$  ein längster Kreis in  $G$ . Da wir im Fall, daß  $L(C)$  gerade ist, fertig sind, sei im folgenden  $L(C)$  ungerade. Ist  $C$  ein Hamiltonkreis, so gibt es nach Voraussetzung eine Kante  $k$  in  $G$ , die nicht zu  $K(C)$  gehört. Man erkennt ohne Mühe, daß die Kante  $k$  mit einem Teil des Kreises  $C$  einen Kreis gerader Länge bildet. Ist  $C$  kein Hamiltonkreis, so existiert eine Kante  $l_1 \in K(G) - K(C)$ , die mit genau einer Ecke, sagen wir  $x_1$ , von  $C$  inzidiert. Nach Satz 8.4 liegen die beiden Kanten  $l_1 = x_1 a_2$  und  $k_1$  auf einem gemeinsamen Kreis  $(x_1, l_1, a_2, l_2, a_3, \dots, a_t, l_t, x_1)$  mit  $a_t = x_2$  und  $l_t = k_1$ . Nun sei  $j \in \{3, 4, \dots, t\}$  der kleinste Index, so daß  $a_j$  zu  $C$  gehört. Ist  $a_j = x_q$ , so gilt sicher  $q \neq 1$ , und  $C' = (x_1, l_1, a_2, \dots, a_j = x_q, k_{q-1}, x_{q-1}, \dots, x_2, k_1, x_1)$  ist ein Kreis, der mit  $C$  genau die Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_{q-1}$  gemeinsam hat. Ist  $L(C')$  gerade, so ist der Satz bewiesen. Ist  $L(C')$  ungerade, so sieht man leicht, daß dann der Kreis  $(x_1, l_1, a_2, l_2, \dots, a_j = x_q, k_q, \dots, k_p, x_1)$  gerade Länge hat. ||

**Definition 8.3.** Ist  $G$  ein zusammenhängender Multigraph mit den Blöcken  $B_1, B_2, \dots, B_r$  und den Schnittecken  $x_1, x_2, \dots, x_t$ , so definieren wir einen schlichten, bipartiten Graphen  $BS(G)$  auf den Eckenmengen  $X = \{B_1, B_2, \dots, B_r\}$  und  $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ , wobei die Ecken  $B_i$  und  $x_j$  genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn  $x_j \in E(B_i)$  gilt.

**Satz 8.6 (Harary, Prins [1] 1966).** Ist  $G$  ein zusammenhängender und nicht trivialer Multigraph, so ist der gemäß Definition 8.3 gegebene bipartite Graph  $BS(G)$  ein Baum.

*Beweis.* Nehmen wir zunächst an, daß der Graph  $BS(G)$  nicht zusammenhängend ist, und es sei  $U$  eine Komponente vom Graphen  $BS(G)$ . Mit  $H$  bezeichnen wir die Vereinigung aller Blöcke von  $G$ , die durch  $U$  induziert werden, und  $L$  sei die Vereinigung der verbleibenden Blöcke von  $G$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, gilt  $E(H) \cap E(L) \neq \emptyset$ . Ist  $x$  eine Ecke aus dieser Schnittmenge, so ist  $x$  nach Satz 8.2 iii) eine Schnittecke von  $G$ . Damit ist  $x$  im Graphen  $BS(G)$  adjazent zu einer Ecke aus  $U$  aber auch zu einer Ecke, die nicht zu  $U$  gehört. Das widerspricht der Voraussetzung, daß  $U$  eine Komponente ist.

Nun nehmen wir an, daß der Graph  $BS(G)$  einen Kreis besitzt. Ist

$$C = (B_1^*, y_1, B_2^*, y_2, \dots, B_p^*, y_p, B_1^*)$$

mit  $B_i^* \in X$  und  $y_i \in Y$  für  $1 \leq i \leq p$  ein Kreis kürzester Länge im Graphen  $BS(G)$ , so erkennt man leicht, daß der Teilgraph  $B_1^* \cup B_2^* \cup \dots \cup B_p^*$  von  $G$  keine Schnittcke besitzt, was der Eigenschaft widerspricht, daß  $B_1^*$  ein Block ist.  $\parallel$

**Folgerung 8.2.** Ist  $G$  ein zusammenhängender Multigraph mit einer Schnittcke, so besitzt  $G$  mindestens zwei Endblöcke.

*Beweis.* Da  $G$  eine Schnittcke besitzt, hat der Baum  $BS(G)$  wenigstens drei Ecken. Nach Satz 2.3 existieren dann mindestens zwei Ecken im Graphen  $BS(G)$ , die aber genau zwei Endblöcken von  $G$  entsprechen.  $\parallel$

**Definition 8.4.** Ein schlichter Graph  $G$  heißt *Blockgraph*, wenn jeder Block in  $G$  vollständig ist.

**Definition 8.5.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Multigraph und  $B_1, B_2, \dots, B_r$  die Blöcke von  $G$ . Wir definieren einen neuen schlichten Graphen  $B(G)$  auf der Eckenmenge  $U = \{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ , wobei zwei Ecken  $B_i$  und  $B_j$  genau dann adjazent in  $B(G)$  sind, wenn  $E(B_i) \cap E(B_j) \neq \emptyset$  gilt.

**Satz 8.7 (Harary [1] 1963).** Ist  $G$  ein zusammenhängender Multigraph, so ist der Graph  $B(G)$  aus Definition 8.5 ein Blockgraph.

*Beweis.* Nach Definition 8.5 ist der Graph  $B(G)$  schlicht.

1. *Schritt:* Wir werden induktiv nach der Länge der Kreise zeigen, daß jeder Kreis  $C$  in  $B(G)$  einen vollständigen Graphen induziert, wobei im Fall  $L(C) = 3$  nichts zu beweisen ist.

Nun sei  $L(C) = 4$  mit  $C = A_1A_2A_3A_4A_1$ , wobei  $A_i$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  ein Block aus  $G$  bedeutet.

Hat  $C$  keine Sehne (man vgl. dazu Definition 9.5), also gilt einerseits  $E(A_1) \cap E(A_3) = \emptyset$  und andererseits  $E(A_2) \cap E(A_4) = \emptyset$  in  $G$ , so ergibt sich nacheinander  $E(A_1) \cap E(A_2) = \{x_1\}$ ,  $E(A_2) \cap E(A_3) = \{x_2\}$  mit  $x_1 \neq x_2$ ,  $E(A_3) \cap E(A_4) = \{x_3\}$  mit  $x_3 \neq x_1, x_2$  und schließlich  $E(A_4) \cap E(A_1) = \{x_4\}$  mit  $x_4 \neq x_1, x_2, x_3$ . Dann besitzt aber auch der Teilgraph  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$  keine Schnittcke, was der Definition des Blockes widerspricht.

Hat  $C$  o.B.d.A. die Sehne  $A_1A_3$ , so folgt analog zu obiger Betrachtung  $E(A_1) \cap E(A_2) \cap E(A_3) = \{x_1\}$  und  $E(A_1) \cap E(A_3) \cap E(A_4) = \{x_2\}$ . Daraus ergibt sich zusammen mit Satz 8.2 i) notwendig  $x_1 = x_2$ , womit  $C$  auch die Sehne  $A_2A_4$  besitzt, also  $C$  einen vollständigen Graphen induziert.

Nun gelte  $L(C) \geq 5$ . Hat  $C$  keine Sehne, so erzeugt man analog zum Fall  $L(C) = 4$  einen Widerspruch. Hat  $C = A_1A_2 \dots A_pA_1$  dagegen eine Sehne  $A_iA_j$  mit  $1 \leq i < j \leq p$  und  $i+2 \leq j$ , so induzieren die beiden Kreise  $C_1 = A_1 \dots A_iA_jA_{j+1} \dots A_pA_1$  und  $C_2 = A_iA_{i+1} \dots A_jA_i$  nach Induktionsvoraussetzung vollständige Graphen. Existiert nun eine Ecke  $A_s \in E(C_1)$  und eine Ecke  $A_t \in E(C_2)$ , so daß  $A_s$  und  $A_t$  nicht adjazent sind, so induziert der Kreis  $A_sA_iA_tA_jA_s$  der Länge 4 keinen vollständigen Graphen. Dieser Widerspruch beendet den Beweis von Schritt 1.

2. *Schritt:* Ist  $D$  ein Block von  $B(G)$ , mit  $|E(D)| \geq 3$ , so liegen nach Satz 8.4 je zwei Ecken von  $D$  auf einem gemeinsamen Kreis, womit diese beiden Ecken nach dem ersten Schritt adjazent sind. Das bedeutet, daß je zwei Ecken eines Blockes von  $B(G)$  untereinander adjazent sind, also jeder Block vollständig und damit  $B(G)$  ein Blockgraph ist.  $\parallel$

**Bemerkung 8.2.** Jeder nicht triviale Baum ist ein Blockgraph, wobei jeder Block ein  $K_2$  ist.

**Definition 8.6.** Ein Block  $G$  heißt *eckenkritisch*, wenn für jede Ecke  $x \in E(G)$  der Graph  $G - x$  kein Block ist.

Ein Block  $G$  heißt *kantenkritisch*, wenn für jede Kante  $k \in K(G)$  der Graph  $G - k$  kein Block ist.

**Beispiel 8.2.** In der Skizze ist der Block  $G_1$  kantenkritisch aber nicht eckenkritisch, während der Block  $G_2$  eckenkritisch aber nicht kantenkritisch ist.



Die beiden Graphen  $G_1$  und  $G_2$  besitzen Ecken vom Grad 2. In den nächsten beiden Sätzen wollen wir zeigen, daß dies für alle kritischen, schlichten Blöcke der Fall ist.

**Satz 8.8 (Lick [1] 1969).** Jeder eckenkritische, schlichte Block der Ordnung  $n(G) \geq 4$  besitzt eine Ecke vom Grad 2.

*Beweis.* Ist  $G$  ein schlichter, eckenkritischer Block mit  $n(G) \geq 4$ , so existiert zu jeder Ecke  $x$  eine Ecke  $y$  in  $G - x$ , so daß  $G - \{x, y\}$  nicht zusammenhängend ist. Unter allen Paaren von Ecken  $x, y$  mit dieser Eigenschaft wählen wir ein Paar  $u, v$ , für welches die Ordnung der kleinsten Komponente von  $G - \{u, v\}$  minimal ist. Ist  $G_1$  die kleinste Komponente von  $G - \{u, v\}$ , so sei  $G_2$  die Vereinigung der verbleibenden Komponenten. Im folgenden zeigen wir  $n(G_1) = n_1 = 1$ , womit die einzige Ecke aus  $G_1$  nur die beiden Nachbarn  $u$  und  $v$  in  $G$  hat und damit vom Grad 2 ist.

Angenommen, es ist  $n_1 \geq 2$ . Da wir  $G$  als Block vorausgesetzt haben, ist der Teilgraph  $H = G[E(G_1) \cup \{u, v\}]$  zusammenhängend. Wählt man für  $a_1 \in E(G_1)$  eine Ecke  $a_2$  aus  $G - a_1$ , so daß  $G - \{a_1, a_2\}$  nicht zusammenhängend ist, so unterscheiden wir zwei Fälle.

1. *Fall:*  $a_2 \in E(H)$ . Da die beiden Graphen  $G[E(G_2) \cup \{u\}]$  und  $G[E(G_2) \cup \{v\}]$  zusammenhängend sind, und mindestens einer von beiden zu  $G - \{a_1, a_2\}$  gehört, gibt es in  $G - \{a_1, a_2\}$  eine Komponente von kleinerer Ordnung als  $n_1$ , was einen Widerspruch zur Wahl von  $G_1$  bedeutet.

2. *Fall:*  $a_2 \in E(G_2)$ . Da  $G - a_2$  zusammenhängend ist, hat  $a_1$  in jeder Komponente von  $G - \{a_1, a_2\}$  einen Nachbarn. Nach Konstruktion gilt  $N(a_1, G) \subseteq E(H)$ , womit  $H$  Ecken aus jeder Komponente von  $G - \{a_1, a_2\}$  besitzt.

Nun zeigen wir, daß  $H - a_1$  in genau zwei Komponenten  $H_u$  und  $H_v$  mit  $u \in E(H_u)$  und  $v \in E(H_v)$  zerfällt. Denn wäre  $H - a_1$  zusammenhängend, so gäbe es zwischen je zwei Ecken von  $H - a_1$  einen Weg in  $H - a_1$ , der  $a_2$  nicht enthält. Damit gäbe es aber Wege zwischen den Komponenten von  $G - \{a_1, a_2\}$ , die weder  $a_1$  noch  $a_2$  enthalten, was natürlich nicht möglich ist. Da  $G$  ein Block ist, überlegt man sich mit Hilfe von Satz 8.4, daß es in  $G$  für jedes  $x \in E(H)$  zwei eckendisjunkte (mit Ausnahme der Ecke  $x$ ) Wege  $W_{xu}$  bzw.  $W_{xv}$  von  $x$  nach  $u$  bzw. von  $x$  nach  $v$  gibt, die  $a_2$  nicht enthalten. Daher gibt es in  $H - a_1$  für jede Ecke einen Weg nach  $u$  oder nach  $v$ . Da  $H - a_1$  nicht zusammenhängend ist, zerfällt  $H - a_1$  in die beiden gewünschten Komponenten  $H_u$  und  $H_v$ .

Sind  $H_u$  und  $H_v$  triviale Graphen, so sind wir fertig. Ist aber o.B.d.A.  $|E(H_u)| \geq 2$ , so gibt es in  $H_u$  eine Ecke  $x \neq u$ , und in  $G$  führt jeder Weg von  $x$  nach  $a_2$  über die Ecke  $u$  oder

die Ecke  $v$ . Daher führt in  $G - u$  jeder Weg von  $x$  nach  $a_2$  über  $v$  und damit notwendig über  $a_1$ . Das bedeutet, daß  $G - \{a_1, u\}$  nicht zusammenhängend ist, und die Komponente  $H_x$  von  $G - \{a_1, u\}$ , die  $x$  enthält, ein Teilgraph von  $H_u - u$  sein muß. Daraus folgt  $n(H_x) < n(G_1)$ , was der minimalen Ordnung von  $G_1$  widerspricht.  $\parallel$

**Satz 8.9 (Dirac [3] 1967, Plummer [1] 1968).** Jeder kantenkritische, schlichte Block  $G$  mit  $n(G) \geq 4$  besitzt eine Ecke vom Grad zwei.

*Beweis.* Es sei  $G$  ein schlichter, kantenkritischer Block mit  $n(G) \geq 4$ , der keine Ecke vom Grad 2 besitzt. Dann ist  $G$  nach Satz 8.8 nicht eckenkritisch und besitzt daher eine Ecke  $x$ , so daß  $G - x$  wieder ein Block ist. Ist die Kante  $k$  inzident mit  $x$ , so besitzt  $G - k$  nach Voraussetzung eine Schnittecke  $u$ , die natürlich von  $x$  verschieden ist. Da  $G - u$  zusammenhängend ist aber  $(G - u) - k$  nicht, muß  $k$  eine Brücke von  $G - u$  sein. Weiter ergibt sich aus dem Zusammenhang von  $G - \{x, u\}$ , daß  $k$  eine Endkante und  $x$  eine Endecke von  $G - u$  ist. Daher hat die Ecke  $x$  den Grad 1 in  $G - u$  und den Grad 2 in  $G$ , womit wir einen Widerspruch erzielt haben.  $\parallel$

Die genaue geschichtliche Entwicklung dieses Abschnittes bis 1936 findet der interessierte Leser in dem Buch von König [3] auf den Seiten 224 – 231. Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Sätze 8.8 und 8.9 findet man z.B. bei Dirac [3] 1967, Plummer [1] 1968, Halin [1] 1969 und Mader [1], [2] 1971.

## 8.2 Line-Graphen

**Definition 8.7.** Gegeben sei ein schlichter Graph  $G$ . Der neue schlichte Graph  $\mathcal{L}(G) = (E(\mathcal{L}(G)), K(\mathcal{L}(G)))$  mit  $E(\mathcal{L}(G)) = K(G)$  und

$$K(\mathcal{L}(G)) = \{\{k, l\} | k, l \in K(G) \text{ und } l \neq k \text{ sind inzident in } G\}$$

heißt *Line-Graph* oder *Kantengraph* von  $G$ .

**Bemerkung 8.3.** Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $k = xy \in K(G)$ , so gilt

$$d(k, \mathcal{L}(G)) = d(x, G) + d(y, G) - 2.$$

Ein schlichter Graph  $G$  ohne isolierte Ecken ist genau dann zusammenhängend, wenn sein Line-Graph  $\mathcal{L}(G)$  zusammenhängend ist.

Jede Brücke eines schlichten Graphen  $G$ , die keine Endkante ist, ist eine Schnittecke von  $\mathcal{L}(G)$  und umgekehrt.

**Satz 8.10.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $m$  Kanten, so besitzt  $\mathcal{L}(G)$  natürlich  $m$  Ecken, und es gilt

$$|K(\mathcal{L}(G))| = \frac{1}{2} \sum_{x \in E(G)} d(x, G)^2 - m.$$

*Beweis.* Eine Ecke  $x$  von  $G$  liefert  $\frac{1}{2}d(x, G)(d(x, G) - 1)$  Kanten in  $\mathcal{L}(G)$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |K(\mathcal{L}(G))| &= \frac{1}{2} \sum_{x \in E(G)} d(x, G)(d(x, G) - 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in E(G)} d(x, G)^2 - \frac{1}{2} \sum_{x \in E(G)} d(x, G) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in E(G)} d(x, G)^2 - m. \end{aligned} \quad \parallel$$

**Satz 8.11.** Ein schlichter und zusammenhängender Graph  $G$  ist genau dann isomorph zu seinem Line-Graphen, wenn er ein Kreis ist.

*Beweis.* Ist  $G$  ein Kreis, so ist leicht zu sehen, daß  $G \cong \mathcal{L}(G)$  gilt. Nun gelte umgekehrt  $G \cong \mathcal{L}(G)$ . Dann ist  $n = |E(G)| = |E(\mathcal{L}(G))| = m$ , also  $\mu(G) = m - n + 1 = 1$ , womit  $G$  nach Satz 2.8 genau einen Kreis  $C$  besitzt. Mit  $\mathcal{L}(C)$  bezeichnen wir das isomorphe Bild von  $C$  in  $\mathcal{L}(G)$ . Nun nehmen wir an, daß eine Ecke  $x \in E(C)$  existiert mit  $d(x, G) > 2$ . Es sei  $k$  eine zu  $x$  inzidente Kante mit  $k \notin K(C)$ . Dann ist  $k$  eine Ecke von  $\mathcal{L}(G)$ , die nicht zum Kreis  $\mathcal{L}(C)$  gehört aber zu zwei Ecken des Kreises  $\mathcal{L}(C)$  adjazent ist. Damit haben wir in  $\mathcal{L}(G)$  einen weiteren Kreis gefunden, was aber nicht möglich ist, da auch  $\mathcal{L}(G)$  nur einen Kreis enthält.  $\parallel$

Sind zwei schlichte Graphen  $G$  und  $G'$  isomorph, so sind natürlich auch ihre Line-Graphen  $\mathcal{L}(G)$  und  $\mathcal{L}(G')$  isomorph. Im Jahre 1932 zeigte Whitney [2], daß auch die Umkehrung fast immer richtig ist.

**Satz 8.12 (Whitney [2] 1932).** Es seien  $G$  und  $G'$  zwei schlichte und zusammenhängende Graphen mit isomorphen Line-Graphen. Dann sind auch  $G$  und  $G'$  isomorph, es sei denn, der eine ist der  $K_3$  und der andere der  $K_{1,3}$ .

Der wohl einfachste Beweis des Satzes von Whitney geht auf Jung [1] 1966 zurück. Dieser Beweis befindet sich auch in dem Lehrbuch von Harary [2] auf Seite 72 und in dem Übersichtsartikel "Line graphs and line digraphs" von Hemminger und Beineke [1] aus dem Jahre 1978.

**Definition 8.8.** Ein Graph  $G$  heißt *Line-Graph*, wenn ein schlichter Graph  $H$  existiert mit  $\mathcal{L}(H) \cong G$ .

Zunächst wollen wir die bipartiten Line-Graphen charakterisieren.

**Satz 8.13.** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und bipartiter Graph. Der Graph  $G$  ist genau dann der Line-Graph eines Graphen  $H$ , also  $G \cong \mathcal{L}(H)$ , wenn  $G$  ein Kreis gerader Länge oder ein Weg ist.

*Beweis.* Ist  $G$  ein Kreis gerader Länge, so folgt aus Satz 8.11 sofort  $G \cong \mathcal{L}(G)$ , womit wir in diesem Fall  $H = G$  wählen können. Ist  $G$  ein Weg der Länge  $p \geq 0$  und  $W$  ein Weg der Länge  $p + 1$ , so gilt  $G \cong \mathcal{L}(W)$ , also  $H = W$ .

Nun gelte  $G \cong \mathcal{L}(H)$ . Gibt es in  $H$  eine Ecke  $x$  mit  $d(x, H) \geq 3$ , so besitzt  $\mathcal{L}(H)$  ein Dreieck, womit  $\mathcal{L}(H)$  nicht bipartit ist. Daher muß  $H$  ein Kreis oder ein Weg sein. Da nach Satz 8.11  $H$  kein Kreis ungerader Länge sein kann, ist der Satz bewiesen.  $\parallel$

Eine erste vollständige Charakterisierung der Line-Graphen stammt von Krausz [1] aus dem Jahre 1943.



**Satz 8.14 (Krausz [1] 1943).** Ein schlichter Graph  $G$  ist genau dann ein Line-Graph, wenn sich  $G$  in kantendisjunkte vollständige Teilgraphen zerlegen läßt, so daß jede Ecke von  $G$  zu höchstens zwei dieser Teilgraphen gehört.

*Beweis.* Es gebe einen schlichten Graphen  $H$  ohne isolierte Ecken mit  $\mathcal{L}(H) \cong G$ . Ist  $x \in E(H)$ , so induziert diese Ecke zusammen mit allen zu  $x$  inzidenten Kanten einen vollständigen Teilgraphen von  $\mathcal{L}(H)$ , und jede Kante von  $\mathcal{L}(H)$  liegt in genau einem solchen Teilgraphen. Da jede Kante von  $H$  mit genau zwei Ecken aus  $H$  inzidiert, gehört keine Ecke von  $\mathcal{L}(H)$  zu mehr als zwei dieser Teilgraphen.

Nun sei  $S_1, S_2, \dots, S_q$  eine zulässige Zerlegung von  $G$  in vollständige Teilgraphen. Wir geben einen Graphen  $H$  an, dessen Line-Graph isomorph zu  $G$  ist. Es sei  $U = \{x \mid x \in E(S_i) \text{ für genau ein } i = 1, 2, \dots, q\}$  und  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_q\}$ . Nun setzen wir  $E(H) = S \cup U$ ,

$$\begin{aligned} K_1(H) &= \{S_i S_j \mid E(S_i) \cap E(S_j) \neq \emptyset, i \neq j\}, \\ K_2(H) &= \{x S_i \mid x \in U \text{ und } x \in E(S_i)\}, \\ K(H) &= K_1(H) \cup K_2(H). \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines Induktionsbeweises nach der Kantenzahl  $m = m(G)$  wollen wir zeigen, daß  $\mathcal{L}(H) \cong G$  gilt. Ist  $m(G) = 1$ , also  $G = K_2$ , so ist  $H$  ein Weg der Länge 2. Nun sei  $m \geq 2$ .

1. *Fall:* Gibt es eine Ecke  $x \in E(S_1)$ , die nur zu  $S_1$  gehört, so setzen wir  $G' = G - x$ .

Ist  $x$  eine Ecke von  $G$ , so gelte o.B.d.A.  $E(S_1) = \{x, u\}$  mit  $u \in E(S_2)$ . Dann ist  $S_2, S_3, \dots, S_q$  eine zulässige Zerlegung von  $G'$ , womit nach Induktionsvoraussetzung obige Vorschrift einen Graphen  $H'$  liefert mit  $\mathcal{L}(H') \cong G'$ . Weiter gilt nach Voraussetzung  $u \in E(H')$  und die Kante  $u S_2$  gehört zu  $H'$ . Nun entstehe  $H$  aus  $H'$  durch Hinzufügen einer Ecke  $x'$  und einer Endkante  $x = ux'$ . Es gilt  $\mathcal{L}(H) \cong G$  und die Konstruktion von  $H$  durch die Ecken  $S_2, u$  und  $x'$  stimmt mit der obigen Konstruktion durch die Ecken  $S_2, S_1$  und  $x$  überein.

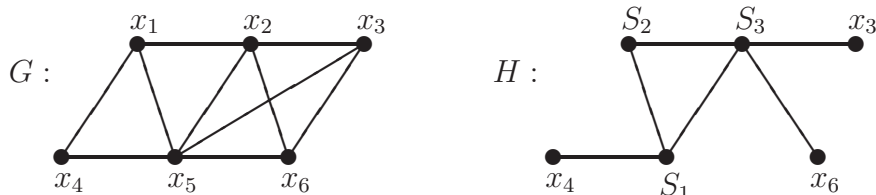
Ist  $x$  keine Ecke, so setze man  $S'_1 = S_1 - x$ . Dann ist  $S'_1, S_2, \dots, S_q$  eine zulässige Zerlegung von  $G'$  und obige Vorschrift liefert einen Graphen  $H'$  mit  $\mathcal{L}(H') \cong G'$ . Der gesuchte Graph  $H$  entsteht aus  $H'$  durch Hinzufügen einer Ecke  $x'$  und der Kante  $x = x' S'_1$ . Die Konstruktion durch die Ecken  $S'_1$  und  $x'$  entspricht der ursprünglichen Konstruktion durch die Ecken  $S_1$  und  $x$ .

2. *Fall:* Alle Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_r$  von  $S_1$  gehören zu genau zwei vollständigen Teilgraphen, also  $x_i \in E(S_i^*)$  für  $i = 1, 2, \dots, r$  mit  $S_i^* \neq S_j^*$  für  $i \neq j$ . Setzt man  $G' = G - K(S_1)$ , so ist  $S_2, S_3, \dots, S_q$  eine zulässige Zerlegung von  $G'$ , und die Ecken  $x_i$  gehören nur zu  $S_i^*$ . Die obige Vorschrift liefert einen Graphen  $H'$  mit  $\mathcal{L}(H') \cong G'$ , der unter anderem die Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_r, S_1^*, S_2^*, \dots, S_r^*$  und die Kanten  $x_1 S_1^*, x_2 S_2^*, \dots, x_r S_r^*$  enthält. Der Graph  $H$  entstehe aus  $H'$  durch verschmelzen der Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_r$  zu einer Ecke  $x$ . Nun gilt  $\mathcal{L}(H) \cong G$ , und die Ecke  $x$  entspricht in obiger Konstruktion der Ecke  $S_1$ . ||

Nach einer weiteren interessanten Charakterisierung der Line-Graphen durch Rooij und Wilf [1] 1965, gelang dann Beineke [1] 1968 und [2] 1970 eine sehr wichtige Charakterisierung dieser Graphenklasse durch 9 verbotene induzierte Teilgraphen (man vgl. dazu auch Harary [2], S. 74). Šoltés [1] reduzierte 1994 die Anzahl der verbotenen induzierten Teilgraphen auf 7, falls der Graph mindestens 9 Ecken besitzt.

**Beispiel 8.3.** Der links skizzierte Graph  $G$  ist nach dem Satz von Krausz ein Line-Graph, denn er besitzt durch  $S_1 = G[\{x_1, x_4, x_5\}]$ ,  $S_2 = G[\{x_1, x_2\}]$  und  $S_3 = G[\{x_2, x_3, x_5, x_6\}]$

eine zulässige Zerlegung in vollständige Teilgraphen. Mit Hilfe der im Beweis von Satz 8.14 angegebenen Konstruktion ergibt sich der rechts skizzierte Graph  $H$  mit  $\mathcal{L}(H) \cong G$ .



**Folgerung 8.3.** i) Jeder Line-Graph  $G$  ist klauenfrei.

ii) Jeder zusammenhängende Line-Graph gerader Ordnung besitzt einen 1-Faktor.

*Beweis.* i) Angenommen,  $G$  besitzt einen  $K_{1,3}$  als induzierten Teilgraphen. Zerlegt man  $G$  in kantendisjunkte vollständige Teilgraphen, so gehört jede Kante des  $K_{1,3}$  notwendig zu einem anderen solchen Teilgraphen. Damit liegt das Zentrum des  $K_{1,3}$  in drei solchen vollständigen Teilgraphen, womit wir einen Widerspruch zum Satz von Krausz erzielt haben.

Teil ii) ergibt sich sofort aus i) und Satz 6.1. ||

Mehr Informationen über klauenfreie Graphen befinden sich in dem interessanten Übersichtsartikel “Claw-free graphs – a survey” von Faudree, Flandrin und Ryjáček [1] aus dem Jahre 1997.

**Satz 8.15 (Chartrand (Man vgl. Harary [2], S. 78)).** Ein schlichter Graph  $G$  ist genau dann der Line-Graph eines Baumes  $T$ , wenn  $G$  ein Blockgraph ist, bei dem jede Schnittcke zu genau zwei Blöcken von  $G$  gehört.

*Beweis.* Ist  $G \cong \mathcal{L}(T)$ , so gilt  $G \cong B(T)$  (man vgl. Definition 8.5), denn die Kanten und Blöcke eines Baumes entsprechen sich in eindeutiger Weise. Nach Satz 8.7 ist dann  $G$  ein Blockgraph. Jede Schnittcke von  $\mathcal{L}(T)$  entspricht einer Brücke von  $T$ , die keine Endkante ist, und liegt daher in genau zwei Blöcken von  $\mathcal{L}(T)$ .

Nun sei umgekehrt  $G$  ein Blockgraph, bei dem jede Schnittcke in genau zwei Blöcken liegt. Da jeder Block eines Blockgraphen vollständig ist, gibt es nach dem Satz von Krausz (Satz 8.14) einen schlichten Graphen  $H$  ohne isolierte Ecken mit  $G \cong \mathcal{L}(H)$ . Ist  $G = K_3$ , so können wir  $H = K_{1,3}$  wählen. Ist  $G$  ein anderer Graph, so ist  $H$  natürlich zusammenhängend, und wir werden zeigen, daß  $H$  ein Baum ist. Nehmen wir an, daß  $H$  einen Kreis besitzt. Wenn  $H$  selbst ein Kreis ist, so gilt  $\mathcal{L}(H) \cong H \cong G$ . Aber der einzige Kreis, der ein Blockgraph ist, ist der  $K_3$ , den wir schon ausgeschlossen haben. Daher besitzt  $H$  einen kürzesten Kreis  $C = (x_1, k_1, x_2, \dots, x_p, k_p, x_1)$  mit  $p \geq 3$  und eine Kante  $k$ , die mit genau einer Ecke des Kreises, sagen wir mit  $x_1$ , inzidiert. Man überlegt sich leicht, daß die Ecken  $k$  und  $k_2$  in  $\mathcal{L}(H)$  auf einem Kreis liegen. Damit gehören  $k$  und  $k_2$  zu einem Block  $D$  von  $G$  (man vgl. Aufgabe 8.3), der nach Voraussetzung vollständig ist. Da die Kanten  $k$  und  $k_2$  in  $H$  nicht inzidieren, sind sie als Ecken in  $\mathcal{L}(H) \cong G$  nicht adjazent. Das ist ein Widerspruch dazu, daß der Block  $D$  vollständig ist. ||

**Satz 8.16.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph.

i) Ist  $G$  Eulersch, so ist  $\mathcal{L}(G)$  sowohl Eulersch als auch Hamiltonsch.

ii) Ist  $G$  Hamiltonsch, so ist  $\mathcal{L}(G)$  Hamiltonsch.



*Beweis.* i) Nach Bemerkung 8.3 ist der Eckengrad jeder Ecke von  $\mathcal{L}(G)$  gerade, womit  $\mathcal{L}(G)$  Eulersch ist.

Ist  $(x_1, k_1, x_2, k_2, \dots, x_{m-1}, k_{m-1}, x_m, k_m, x_1)$  eine Eulertour des Graphen  $G$ , so ist natürlich  $(k_1, k_2, \dots, k_m, k_1)$  ein Hamiltonkreis von  $\mathcal{L}(G)$ .

ii) Es sei  $(x_1, k_1, x_2, k_2, \dots, x_{n-1}, k_{n-1}, x_n, k_n, x_1)$  ein Hamiltonkreis von  $G$ . In  $\mathcal{L}(G)$  beginne man mit einer Kante  $k \neq k_1, k_n$  von  $G$ , die mit  $x_1$  inzidiert (falls eine solche Kante existiert) und durchlaufe nacheinander alle zu  $x_1$  inzidenten Kanten mit Ausnahme von  $k_1$  und  $k_n$ . Danach gehe man zu  $k_1$  und durchlaufe alle noch nicht benutzten Kanten, die mit  $x_2$  inzidieren, außer  $k_2$ . Dann gehe man zu  $k_2$  usw.  $\parallel$

**Bemerkung 8.4.** Der Graph  $G = K_{1,3}$  mit  $\mathcal{L}(G) \cong K_3$  zeigt, daß sich die Aussagen von Satz 8.16 nicht umkehren lassen.

Es gibt effiziente Algorithmen, die entscheiden, ob ein vorgegebener schlichter Graph  $G$  ein Line-Graph ist, und sie liefern gegebenenfalls einen Graphen  $H$  mit  $\mathcal{L}(H) \cong G$ . Dazu vgl. man z.B. Roussopoulos [1] 1973, Lehot [1] 1974, Syslo [1] 1982 und Simić [1] 1991.

Das Konzept der Line-Graphen wurde 1989 von Broersma und Hoede [1] verallgemeinert (man vgl. dazu auch den Artikel von Li und Lin [1] aus dem Jahre 1993).

## 8.3 Graphenoperationen

In diesem Abschnitt stellen wir einige Graphenoperationen vor, die sich häufig als nützlich erwiesen haben.

**Definition 8.9.** Es sei  $G$  ein Graph. Ist  $q$  eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir mit  $qG$  die disjunkte Vereinigung von  $q$  Exemplaren des Graphen  $G$ .

Es sei  $\mathcal{H} = \{H_x | x \in E(G)\}$  eine Familie von nicht leeren Graphen, die durch die Ecken von  $G$  indiziert ist. Der *Koronagraph*  $G \circ \mathcal{H}$  von  $G$  und  $\mathcal{H}$  besteht aus der disjunkten Vereinigung von  $G$  und den  $n(G)$  Graphen  $H_x, x \in E(G)$ , zusammen mit den zusätzlichen Kanten, die jede Ecke  $x$  aus  $G$  jeweils mit allen Ecken aus  $H_x$  verbinden. Sind alle Graphen der Familie  $\mathcal{H}$  isomorph zu einem Graphen  $H$ , so schreiben wir  $G \circ H$  an Stelle von  $G \circ \mathcal{H}$ .

Die Beweise der folgenden drei Sätze über Koronagraphen bleiben als Übungsaufgaben für den Leser.

**Satz 8.17.** Der Koronagraph  $G \circ \mathcal{H}$  eines Graphen  $G$  und einer Familie  $\mathcal{H} = \{H_x | x \in E(G)\}$  von Graphen ist genau dann ein Baum, wenn  $G$  ein Baum ist, und alle  $H_x$  Nullgraphen sind.

**Satz 8.18.** Der Koronagraph  $G \circ \mathcal{H}$  eines Graphen  $G$  und einer Familie  $\mathcal{H} = \{H_x | x \in E(G)\}$  von Graphen ist genau dann Hamiltonsch, wenn  $G \cong K_1$ , und der einzige verbleibende Graph  $H$  aus der Familie  $\mathcal{H}$  semi-Hamiltonsch ist mit  $|E(H)| \geq 2$ .

**Satz 8.19.** Der Koronagraph  $G \circ \mathcal{H}$  eines Graphen  $G$  und einer Familie  $\mathcal{H} = \{H_x | x \in E(G)\}$  von Graphen ist genau dann Eulersch, wenn  $G$  Eulersch ist, und die Eckengrade  $d(a, H_x)$  für alle  $x \in E(G)$  und alle  $a \in E(H_x)$  ungerade sind.

**Definition 8.10.** Der *Potenzgraph*  $G^p$  mit  $p \in \mathbb{N}$  eines schlichten Graphen  $G$  besteht aus der Eckenmenge  $E(G)$ , und zwei verschiedene Ecken  $a$  und  $b$  sind genau dann adjazent in  $G^p$ , wenn  $d_G(a, b) \leq p$  gilt.

Ist  $T$  der Baum, der aus dem  $K_{1,3}$  durch zweifaches unterteilen jeder Kante entsteht, so

sieht man leicht, daß  $T^2$  nicht Hamiltonsch ist. Die Frage nach der kleinsten natürlichen Zahl  $p$  mit der Eigenschaft, daß für jeden schlichten und zusammenhängenden Graphen  $G$  der Ordnung  $n(G) \geq 3$ , der Potenzgraph  $G^p$  Hamiltonsch ist, wurde 1960 durch Sekanina [1] beantwortet.

**Satz 8.20 (Sekanina [1] 1960).** Sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $n(G) \geq 3$ . Dann existiert zu jeder Kante  $k \in K(G)$  ein Hamiltonkreis  $C_k$  in  $G^3$ , der diese Kante enthält.

*Beweis.* Man wähle in  $G$  ein Gerüst  $T_{G,k}$ , das die Kante  $k$  enthält. Besitzt  $T_{G,k}^3$  einen Hamiltonkreis  $C_k$ , so ist  $C_k$  natürlich auch ein Hamiltonkreis von  $G^3$ . Nun beweisen wir mittels vollständiger Induktion nach  $n$ , daß jeder Baum  $T$  der Ordnung  $n \geq 3$  in  $T^3$  einen Hamiltonkreis  $C_k$  enthält, wobei  $k$  eine beliebige aber fest gewählte Kante des Baumes  $T$  ist. Für  $n = 3$  gilt die Behauptung, da  $T^3 \cong K_3$ . Sei nun  $T$  ein Baum der Ordnung  $n = n(T) > 3$  und  $k \in K(T)$ .

Falls  $k = a_1a_2$  keine Endkante von  $T$  ist, so besteht der Teilgraph  $T' = T - k$  aus genau zwei Baumkomponenten  $T_1$  und  $T_2$ , die jeweils mindestens eine zu  $k$  inzidente Kante  $k_i = a_i b_i$  mit  $i = 1, 2$  enthalten. Falls  $n(T_i) = 2$  für ein  $i = 1, 2$ , so ist  $T_i$  ein  $a_i$  und  $b_i$  verbindender Hamiltonweg  $H_i$ . Andernfalls folgt aus der Induktionsvoraussetzung die Existenz eines  $a_i$  und  $b_i$  verbindenden Hamiltonweges  $H_i$  in  $T_i^3 \subseteq T^3$  für  $i = 1, 2$ . Wegen  $d_T(b_1, b_2) = 3$  existiert in  $T^3$  die Kante  $k^* = b_1b_2$ . Die beiden Hamiltonwege  $H_1$  und  $H_2$  bilden zusammen mit den Kanten  $k$  und  $k^*$  einen Hamiltonkreis  $C_k$  in  $T^3$ .

Falls  $k = uv$  eine Endkante von  $T$  ist, die mit der Ecke  $u$  und der Kante  $k' = vw$  inzidiert, so betrachten wir den Baum  $H = T - \{u\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung existiert in  $H^3 \subseteq T^3$  ein Hamiltonweg, der die Ecken  $v$  und  $w$  verbindet. Wegen  $d_T(u, w) = 2$  läßt sich  $H$  zu einem Hamiltonkreis  $C_k$  des Graphen  $T^3$  erweitern. ||

Obwohl die Aussage von Satz 8.20 für  $G^2$  nicht gilt, vermuteten Nash-Williams und Plummer unabhängig voneinander, daß  $G^2$  Hamiltonsch ist, falls  $G$  ein zusammenhängender Block der Ordnung  $n(G) \geq 3$  ist. Diese schwierige Vermutung wurde 1974 von Fleischner [1] bewiesen. Viel einfacher läßt sich das nächste Resultat von Sumner [1] zeigen.

**Satz 8.21 (Sumner [1] 1974).** Ist  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph gerader Ordnung, so besitzt  $G^2$  ein perfektes Matching.

*Beweis.* Es sei  $T_G$  ein Gerüst des Graphen  $G$ . Falls  $T_G^2$  ein perfektes Matching besitzt, so trifft das auch für  $G^2$  zu. Ist  $T$  ein Baum der Ordnung  $2n$ , so beweisen wir mittels vollständiger Induktion nach  $n$ , daß  $T^2$  ein perfektes Matching besitzt. Da es für  $n = 1$  nichts zu beweisen gibt, sei  $T$  ein Baum der Ordnung  $2n > 2$ . Falls in  $T$  Ecken  $u$  und  $v$  mit  $d_T(u, v) = 2$  existieren, so ist  $H = T - \{u, v\}$  wieder ein Baum gerader Ordnung. Falls solche Ecken nicht existieren, so gilt für eine Ecke  $u$  mit  $e(u) = \text{dm}(T)$ , daß auch  $H = T - \{u, v\}$  ein Baum ist, wenn  $v$  die zu  $u$  adjazente Ecke bedeutet. In beiden Fällen besitzt  $H^2$  nach Induktionsvoraussetzung ein perfektes Matching  $M'$ , das gleichzeitig ein Matching von  $T^2$  ist. Fügt man die Kante  $k = uv \in K(T^2)$  zu  $M'$  hinzu, so erhält man ein perfektes Matching von  $T^2$ . ||

**Definition 8.11.** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei schlichte und disjunkte Graphen. Alle folgenden Operationen mit den zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  ergeben einen Graphen, dessen Eckenmenge das kartesische Produkt  $E(G_1) \times E(G_2)$  ist.

Zwei Ecken  $(a, u)$  und  $(b, v)$  des *kartesischen Produktes*  $G_1 \times G_2$  sind adjazent, wenn  $[a = b$  und  $u$  adjazent zu  $v]$  oder  $[u = v$  und  $a$  adjazent zu  $b]$ .

Zwei Ecken  $(a, u)$  und  $(b, v)$  des *lexikographischen Produktes*  $G_1[G_2]$  sind adjazent, wenn  $[a$  adjazent zu  $b]$  oder  $[a = b$  und  $u$  adjazent zu  $v]$ .  $G_1[G_2]$  nennt man auch *Komposition* der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ .

Zwei Ecken  $(a, u)$  und  $(b, v)$  der *Konjunktion*  $G_1 \wedge G_2$  sind adjazent, wenn  $[a$  adjazent zu  $b]$  und  $[u$  adjazent zu  $v]$ .

Zwei Ecken  $(a, u)$  und  $(b, v)$  der *Disjunktion*  $G_1 \vee G_2$  sind adjazent, wenn  $[a$  adjazent zu  $b]$  oder  $[u$  adjazent zu  $v]$ .

**Satz 8.22.** Sind  $G_1$  und  $G_2$  zwei schlichte, disjunkte und bipartite Graphen, so ist  $G_1 \times G_2$  ein bipartiter Graph.

*Beweis.* Sind  $E_1, E'_1$  und  $E_2, E'_2$  Bipartitionen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ , so ist

$$(E_1 \times E_2) \cup (E'_1 \times E'_2), \quad (E'_1 \times E_2) \cup (E_1 \times E'_2)$$

eine Bipartition von  $G_1 \times G_2$ . ||

**Satz 8.23.** Es seien  $W_p$  und  $W_q$  disjunkte Wege der positiven Längen  $p$  und  $q$ . Das kartesische Produkt  $G = W_p \times W_q$  ist genau dann Hamiltonsch, wenn  $p$  oder  $q$  ungerade ist.

*Beweis.* Ist  $p$  oder  $q$  ungerade, so ist es nicht schwer, einen Hamiltonkreis in  $G$  zu finden.

Nach Satz 8.22 ist  $G$  ein bipartiter Graph. Ist  $p = 2i$  und  $q = 2j$ , so ist  $|E(G)| = (2i + 1)(2j + 1)$  ungerade, womit  $G$  nach Folgerung 4.6 kein Hamiltonscher Graph sein kann. ||

**Satz 8.24.** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei schlichte Graphen mit  $|E(G_1)| = n_1$ ,  $|E(G_2)| = n_2$ ,  $|K(G_1)| = m_1$  und  $|K(G_2)| = m_2$ . Für die in Definition 7.3 und Definition 8.11 gegebenen Graphen lassen sich die Anzahl der Ecken und Kanten berechnen. Die Ergebnisse fassen wir in einer Tabelle zusammen.

Operation		Eckenzahl	Kantenzahl
Summe	$G_1 + G_2$	$n_1 + n_2$	$m_1 + m_2 + n_1 n_2$
kart. Produkt	$G_1 \times G_2$	$n_1 n_2$	$n_1 m_2 + n_2 m_1$
Komposition	$G_1[G_2]$	$n_1 n_2$	$n_1 m_2 + n_2^2 m_1$
Konjunktion	$G_1 \wedge G_2$	$n_1 n_2$	$2m_1 m_2$
Disjunktion	$G_1 \vee G_2$	$n_1 n_2$	$n_1^2 m_2 + n_2^2 m_1 - 2m_1 m_2$

*Beweis.* Bei diesen Operationen gibt es für die Anzahl der Ecken nichts zu beweisen. Bei der Summe ist auch die Formel für die Anzahl der Kanten sofort einzusehen.

Es seien  $(x_i, y_j)$  die Ecken der anderen vier Graphen mit  $1 \leq i \leq n_1$  und  $1 \leq j \leq n_2$ . Dann gilt

$$d((x_i, y_j), G_1 \times G_2) = d(x_i, G_1) + d(y_j, G_2).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |K(G_1 \times G_2)| &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq j \leq n_2}} (d(x_i, G_1) + d(y_j, G_2)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n_2} (d(G_1) + n_1 d(y_j, G_2)) \\ &= m_1 n_2 + n_1 m_2. \end{aligned}$$

Für das lexikographische Produkt erhält man die Anzahl der Kanten aus

$$d((x_i, y_j), G_1[G_2]) = n_2 d(x_i, G_1) + d(y_j, G_2).$$

Für die Konjunktion und Disjunktion berechnet man die Anzahl der Kanten aus

$$d((x_i, x_j), G_1 \wedge G_2) = d(x_i, G_1) \cdot d(y_j, G_2),$$

$$d((x_i, y_j), G_1 \vee G_2) = n_2 d(x_i, G_1) + n_1 d(y_j, G_2) - d((x_i, x_j), G_1 \wedge G_2). \quad \parallel$$

## 8.4 Aufgaben

**Aufgabe 8.1.** Man gebe einen schlichten Block  $G$  von minimaler Ordnung an, der nicht Hamiltonsch ist, aber einen Kreis besitzt.

**Aufgabe 8.2.** Man bestimme die maximale Anzahl von Schnittecken in einem Multigraphen der Ordnung  $n$ .

**Aufgabe 8.3.** Ist  $G$  ein Multigraph, so zeige man, daß jeder Kreis in einem Block liegt.

**Aufgabe 8.4.** Es seien  $B_1, B_2, \dots, B_p$  die Blöcke des Multigraphen  $G$ .

i) Man zeige

$$n(G) = \kappa(G) - p + \sum_{i=1}^p |E(B_i)|.$$

ii) Es sei  $s(B_i)$  die Anzahl der Schnittecken von  $G$  im Block  $B_i$ . Für die Anzahl  $s(G)$  der Schnittecken von  $G$  zeige man

$$s(G) = \kappa(G) - p + \sum_{i=1}^p s(B_i).$$

**Aufgabe 8.5.** Es sei  $G$  ein Multigraph und  $b(x)$  die Anzahl der Blöcke von  $G$ , in der die Ecke  $x$  liegt. Für die Anzahl  $b(G)$  der Blöcke von  $G$  zeige man

$$b(G) = \kappa(G) + \sum_{x \in E(G)} (b(x) - 1).$$

**Aufgabe 8.6.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer, schlichter und zusammenhängender Kaktusgraph ohne Brücken. Man zeige, daß  $G$  einen  $[1, 2]$ -Faktor besitzt.

**Aufgabe 8.7.** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Kaktusgraph ohne Ecken mit den Kreisen  $H_1, H_2, \dots, H_p$  ( $p \geq 2$ ). Weiter sei  $(\cup_{i=1}^p E(H_i)) - E(H_j) = A_j$  für  $j = 1, 2, \dots, p$ . Ist der Abstand  $d(E(H_j), A_j)$  ungerade für alle  $j = 1, 2, \dots, p$ , so beweise man  $|S| \leq |N(S, G)|$  für alle  $S \subseteq E(G)$ .

**Aufgabe 8.8.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer selbstkomplementärer Graph ohne Ecken. Man beweise, daß  $G$  ein Block ist.

**Aufgabe 8.9.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit einer Schnittecke. Ist  $n(G) = n$  und  $\delta(G) = \delta$ , so zeige man

$$\nu(G) \leq \nu(K_{\delta+1}) + \nu(K_{n-\delta}).$$

*Hinweis:* Für  $p \geq i \geq 2$  beweise man die Ungleichung

$$\nu(K_p) + \nu(K_i) < \nu(K_{p+1}) + \nu(K_{i-1}).$$

**Aufgabe 8.10.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer, zusammenhängender und schlichter Graph ohne Kreise gerader Länge. Man zeige, daß jeder Block von  $G$  ein  $K_2$  oder ein Kreis ungerader Länge ist.

**Aufgabe 8.11.** Es sei  $G$  ein  $(p - 1)$ -regulärer, schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $2p$  mit  $p \geq 3$ . Man zeige, daß  $G$  ein Block ist.

**Aufgabe 8.12.** Es sei  $G$  ein schlichter zusammenhängender Graph mit der Eigenschaft, daß jede Kante von  $G$  zu einem perfekten Matching gehört. Man zeige, daß  $G$  ein Block ist.

**Aufgabe 8.13.** a) Welche vollständigen Graphen sind Line-Graphen?

b) Es sei  $k$  eine Kante des  $K_n$ . Ist  $G = K_n - k$  ein Line-Graph? Wenn ja, so gebe man einen Graphen  $H$  mit  $\mathcal{L}(H) = G$  an.

**Aufgabe 8.14.** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph. Man bestimme eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $\mathcal{L}(G)$  regulär ist. Man gebe Beispiele nicht regulärer Graphen an (Bäume und Graphen die Kreise enthalten), die reguläre Line-Graphen besitzen.

**Aufgabe 8.15.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph. Weiter besitze  $G$  einen geschlossenen Kantenzug  $C$ , so daß jede Kante, die nicht zu  $C$  gehört, mit einer Kante aus  $C$  inzidiert. Man zeige daß  $\mathcal{L}(G)$  Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 8.16.** Man gebe einen zusammenhängenden Graphen  $G$  an, so daß  $\mathcal{L}(G)$  nicht Eulersch aber  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(G))$  Eulersch ist.

**Aufgabe 8.17.** Man beweise Satz 8.17.

**Aufgabe 8.18.** Man beweise Satz 8.18.

**Aufgabe 8.19.** Man beweise Satz 8.19.

**Aufgabe 8.20.** Sei  $T$  der Baum, der aus dem  $K_{1,3}$  durch zweifaches unterteilen jeder Kante entsteht. Man zeige, daß  $T^2$  nicht Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 8.21.** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $n(G) \geq 3$ . Man zeige, daß  $G^2$  ein Block ist.

**Aufgabe 8.22.** Es sei  $W_p$  ein Weg der positiven Länge  $p$  und  $C_q$  ein Kreis der Länge  $q \geq 2$ . Man zeige, daß das kartesische Produkt  $W_p \times C_q$  Hamiltonsch ist.

**Aufgabe 8.23.** Man fülle die Lücken im Beweis von Satz 8.24.

**Aufgabe 8.24.** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Kaktusgraph, der ein Line-Graph ist. Man zeige:

- i)  $\Delta(G) \leq 4$ ,
- ii) Ist  $G$  kein Kreis, so gilt  $|E(C)| = 3$  für jeden Kreis  $C$  von  $G$ .

# Kapitel 9

## Unabhängige Mengen und Cliques

### 9.1 Unabhängige Mengen

**Definition 9.1.** Es sei  $G$  ein Multigraph.

- i) Eine Eckenmenge  $I$  von  $G$  heißt *unabhängig* in  $G$ , wenn keine zwei Ecken aus  $I$  adjazent sind. Ist  $I$  eine unabhängige Eckenmenge in  $G$ , und gibt es keine unabhängige Eckenmenge  $I'$  in  $G$  mit  $|I'| > |I|$ , so heißt  $I$  *maximale unabhängige Eckenmenge* in  $G$  und  $|I| = \alpha = \alpha(G)$  *Eckenunabhängigkeitszahl* oder *Unabhängigkeitszahl* von  $G$ .
- ii) Eine Eckenmenge  $T$  von  $G$  heißt *Eckenüberdeckung* oder *Überdeckung* von  $G$ , wenn jede Kante des Graphen mit mindestens einer Ecke aus  $T$  inzidiert. Ist  $T$  eine Überdeckung von  $G$ , und gibt es keine Überdeckung  $T'$  von  $G$  mit  $|T'| < |T|$ , so heißt  $T$  *minimale Überdeckung* und  $|T| = \beta = \beta(G)$  *Eckenüberdeckungsanzahl* oder *Überdeckungsanzahl* von  $G$ .
- iii) Eine Kantenmenge  $M$  von  $G$  heißt *unabhängig* in  $G$ , wenn  $M$  ein Matching ist. Ist  $M$  ein maximales Matching in  $G$ , so nennen wir  $|M| = \alpha_0 = \alpha_0(G)$  *Kantenunabhängigkeitsanzahl* von  $G$ .
- iv) Eine Kantenmenge  $L$  von  $G$  heißt *Kantenüberdeckung* von  $G$ , wenn jede Ecke des Graphen mit mindestens einer Kante aus  $L$  inzidiert. Ist  $L$  eine Kantenüberdeckung von  $G$ , und gibt es keine Kantenüberdeckung  $L'$  von  $G$  mit  $|L'| < |L|$ , so heißt  $L$  *minimale Kantenüberdeckung* und  $|L| = \beta_0 = \beta_0(G)$  *Kantenüberdeckungsanzahl* von  $G$ .

**Satz 9.1 (Gallai [1] 1959).** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt:

- i) Eine Eckenmenge  $I$  ist genau dann unabhängig in  $G$ , wenn die Eckenmenge  $E(G) - I$  eine Überdeckung von  $G$  ist.
- ii) Es ist  $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$ .

*Beweis.* i) Eine Menge  $I$  ist genau dann unabhängig, wenn keine Kante beide Endpunkte in  $I$  hat. Dies ist gleichbedeutend damit, daß alle Kanten mindestens einen Endpunkt in  $E(G) - I$  haben, was wiederum äquivalent dazu ist, daß  $E(G) - I$  eine Überdeckung ist.

ii) Aus i) folgt, daß  $I$  genau dann eine maximale unabhängige Eckenmenge ist, wenn  $E(G) - I$  eine minimale Überdeckung ist, woraus sich ii) sofort ergibt. ||

**Satz 9.2.** Es sei  $G$  ein Multigraph.

- i) Es gilt  $\alpha_0(G) \leq \beta(G)$ .



- ii) Ist  $M$  ein Matching und  $T$  eine Überdeckung von  $G$  mit  $|M| = |T|$ , so gilt  $\alpha_0(G) = |M| = |T| = \beta(G)$ .

*Beweis.* i) Ist  $M^*$  ein maximales Matching und  $T^*$  eine minimale Überdeckung, so liegt in  $T^*$  mindestens ein Endpunkt jeder Kante von  $M^*$ , womit  $\alpha_0(G) = |M^*| \leq |T^*| = \beta(G)$  gilt.

- ii) Aus der Voraussetzung und i) erhält man

$$|T| = |M| \leq \alpha_0(G) \leq \beta(G) \leq |T|,$$

womit ii) bewiesen ist. ||

**Satz 9.3 (König [2] 1931).** Ist  $G$  ein bipartiter Graph, so gilt

$$\beta(G) = \alpha_0(G) \leq \frac{1}{2}|E(G)|.$$

*Beweis.* Es sei  $A, B$  eine Bipartition und  $M$  ein maximales Matching von  $G$ . Wählt man eine Menge  $T \subseteq A$  mit

$$|T| - |N(T, G)| = \max_{S \subseteq A} \{|S| - |N(S, G)|\},$$

so gilt nach dem Satz von König-Ore (Satz 6.8)  $|T| - |N(T, G)| = |A| - |M|$ . Man überlegt sich leicht, daß  $W = (A - T) \cup N(T, G)$  eine Überdeckung von  $G$  ist. Daher liefert Satz 9.2

$$\alpha_0(G) \leq \beta(G) \leq |W| = |A| - |T| + |N(T, G)| = |M| = \alpha_0(G),$$

woraus sich unmittelbar  $\alpha_0(G) = \beta(G)$  ergibt. ||

**Bemerkung 9.1.** Für beliebige Graphen ist Satz 9.3 nicht richtig, denn z.B. gilt für den Kreis  $C_3$  der Länge drei  $\alpha_0(C_3) = 1$  und  $\beta(C_3) = 2$ .

**Satz 9.4 (Gallai [1] 1959).** Ist  $G$  ein Multigraph ohne isolierte Ecken, so gilt

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n(G).$$

*Beweis.* Es sei  $M$  ein maximales Matching von  $G$  und  $U$  die Eckenmenge, die nicht mit  $M$  inzidiert. Da  $G$  keine isolierten Ecken besitzt und  $M$  maximal ist, existiert eine Menge  $J$  von  $|U|$  Kanten, so daß jede Ecke von  $U$  mit genau einer Kante aus  $J$  inzidiert. Nach Konstruktion ist  $M \cup J$  eine Kantenüberdeckung, womit

$$\beta_0 \leq |M \cup J| = \alpha_0 + (n - 2\alpha_0) = n - \alpha_0,$$

also  $\alpha_0 + \beta_0 \leq n$  gilt.

Nun sei  $L$  eine minimale Kantenüberdeckung von  $G$  und  $M$  ein maximales Matching von  $H = G[L]$ . Ist  $U$  die Eckenmenge von  $H$ , die in  $H$  nicht mit  $M$  inzidiert, so ist  $H[U]$  ein Nullgraph, da  $M$  maximal gewählt war. Daher existiert zu jeder Ecke aus  $U$  mindestens eine Kante aus  $L - M$ , die zu dieser Ecke inzident ist. Daraus erhält man

$$|L| - |M| = |L - M| \geq |U| = n - 2|M|,$$

also  $|M| + |L| \geq n$ . Da  $M$  auch ein Matching von  $G$  ist, folgt damit die umgekehrte Ungleichung  $\alpha_0 + \beta_0 \geq |M| + |L| \geq n$ . ||



**Folgerung 9.1.** Es gilt  $\alpha(G) \leq \beta_0(G)$  für jeden Multigraphen  $G$  ohne isolierte Ecken.

*Beweis.* Aus Satz 9.2 i) folgt  $\alpha_0(G) \leq \beta(G)$  und damit aus den Sätzen 9.1 und 9.4

$$\alpha(G) = n(G) - \beta(G) \leq n(G) - \alpha_0(G) = \beta_0(G). \quad \parallel$$

Aus den Sätzen 9.1, 9.3 und 9.4 ergibt sich sofort

**Folgerung 9.2.** Ist  $G$  ein bipartiter Graph ohne isolierte Ecken, so gilt  $\alpha(G) = \beta_0(G)$ .

**Satz 9.5.** Für jeden schlichten Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) \geq 1$  gilt

$$\alpha(G) \leq \frac{\Delta(G)n(G)}{\Delta(G) + \delta(G)}.$$

*Beweis.* Ist  $I$  eine maximale unabhängige Eckenmenge von  $G$  und  $\bar{I} = E(G) - I$ , so gelten die folgenden beiden Ungleichungen

$$m_G(I, \bar{I}) = \sum_{x \in I} d(x, G) \geq \alpha(G)\delta(G),$$

$$m_G(I, \bar{I}) \leq (n(G) - \alpha(G))\Delta(G),$$

woraus sich die gewünschte Abschätzung sofort ergibt. ||

**Satz 9.6 (Wei [1] 1980).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\alpha(G) \geq \sum_{x \in E(G)} \frac{1}{d(x, G) + 1}.$$

*Beweis.* Man wähle eine Ecke  $x_1 \in E(G)$  mit  $d(x_1, G) = \delta(G)$  und setze  $G_2 = G - N[x_1, G]$ . Ist  $G_2$  nicht leer, so wähle man  $x_2 \in E(G_2)$  mit  $d(x_2, G) = \min\{d(x, G) | x \in E(G_2)\}$  und setze  $G_3 = G_2 - N[x_2, G]$  usw. Ist  $G_{r+1}$  der leere Graph aber,  $E(G_r) \neq \emptyset$ , so ist nach Konstruktion  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  eine unabhängige Eckenmenge in  $G$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq r = \sum_{i=1}^r 1 = \sum_{i=1}^r \left( \sum_{x \in N[x_i, G]} \frac{1}{d(x_i, G) + 1} \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^r \left( \sum_{x \in N[x_i, G_i]} \frac{1}{d(x_i, G) + 1} \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^r \left( \sum_{x \in N[x_i, G_i]} \frac{1}{d(x, G) + 1} \right) = \sum_{x \in E(G)} \frac{1}{d(x, G) + 1}. \quad \parallel \end{aligned}$$

**Satz 9.7 (Unabhängigkeitslemma, Berge [4] 1981).** Es sei  $G$  ein Multigraph und  $I$  eine unabhängige Eckenmenge von  $G$ . Die Menge  $I$  ist genau dann maximal, wenn für alle unabhängigen Eckenmengen  $J \subseteq E(G) - I$  gilt:

$$|N(J, G) \cap I| \geq |J| \quad (9.1)$$

*Beweis.* Es sei  $I$  maximal. Annahme, im Komplement von  $I$  existiert eine unabhängige Eckenmenge  $S$  mit  $|N(S, G) \cap I| < |S|$ . Dann ist aber  $I' = (I - (N(S, G) \cap I)) \cup S$  eine unabhängige Menge mit  $|I'| > |I|$ , was einen Widerspruch zur Maximalität von  $I$  bedeutet.

Umgekehrt setzen wir nun voraus, daß  $I$  die Bedingung (9.1) erfüllt. Ist  $I$  nicht maximal, so existiert eine unabhängige Eckenmenge  $I'$  mit  $|I' - I| > |I - I'|$ . Daraus folgt für die unabhängige Menge  $I' - I$

$$|N(I' - I, G) \cap I| \leq |I - I'| < |I' - I|,$$

was ein Widerspruch zu (9.1) ist. ||

Das Unabhängigkeitslemma findet man auch in dem Buch von Berge [6] auf Seite 272.

**Definition 9.2.** Ist  $G$  ein Graph und sind  $A$  und  $B$  zwei disjunkte Teilmengen aus  $E(G)$ , so bezeichnen wir mit  $G[A, B]$  den bipartiten Graphen, der aus der Eckenmenge  $A \cup B$  und denjenigen Kanten von  $G$  besteht, die mit einer Ecke aus  $A$  und einer Ecke aus  $B$  inzidieren.

**Folgerung 9.3 (Berge [4] 1981).** Ist  $G$  ein Multigraph und  $I$  eine unabhängige Eckenmenge in  $G$ , so sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

- i) Die Menge  $I$  ist maximal unabhängig.
- ii) Für alle unabhängigen Eckenmengen  $J \subseteq E(G) - I$  besitzt der bipartite Graph  $G[I, J]$  ein Matching, das mit jeder Ecke aus  $J$  inzidiert.

*Beweis.* Es sei  $I$  maximal unabhängig,  $J \subseteq E(G) - I$  unabhängig und  $H = G[I, J]$ . Aus (9.1) folgt dann für alle  $S \subseteq J$

$$|N(S, H)| = |N(S, G) \cap I| \geq |S|,$$

womit  $H$  nach dem Satz von König-Hall (Satz 6.7) ein Matching besitzt, das mit allen Ecken von  $J$  inzidiert.

Gilt ii), so ergibt sich analog aus (9.1) und dem Satz von König-Hall, daß  $I$  maximal unabhängig ist. ||

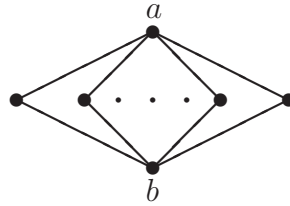
Mit Hilfe von Matchingalgorithmen kann man sich in Line-Graphen maximale unabhängige Eckenmengen verschaffen. Denn in einem schlichten Graphen  $G$  ist  $M \subseteq K(G)$  genau dann ein Matching, wenn  $M$  eine unabhängige Eckenmenge in  $\mathcal{L}(G)$  ist, womit  $\alpha(\mathcal{L}(G)) = \alpha_0(G)$  gilt. Die Beobachtung, daß in einem schlichten Graphen  $G$  ohne isolierte Ecken ein Matching  $M \subseteq K(G)$  genau dann perfekt ist, wenn im Line-Graphen

$$|N(x, \mathcal{L}(G)) \cap M| \geq 2 \text{ für alle } x \notin M$$

gilt, gibt Anlaß zu folgender Definition, die man bei Croitoru und Suditu [1] 1983 findet.

**Definition 9.3.** Es sei  $G$  ein Multigraph und  $I$  eine unabhängige Eckenmenge.  $I$  heißt *perfekt unabhängig* in  $G$ , falls  $|N(x, G) \cap I| \geq 2$  für alle  $x \notin I$  gilt.

**Bemerkung 9.2.** Es gibt Graphen, die keine perfekt unabhängigen Eckenmengen besitzen, z.B. Kreise ungerader Länge oder Wege ungerader Länge. Außerdem muß eine perfekt unabhängige Menge nicht notwendig maximal sein. Man vergleiche dazu den skizzierten Graphen  $G$  mit der perfekt unabhängigen Menge  $\{a, b\}$  und der maximal unabhängigen Menge  $E(G) - \{a, b\}$ .



**Satz 9.8 (Volkmann [4] 1991).** Ist  $G$  ein klauenfreier Multigraph, so ist jede perfekt unabhängige Menge auch maximal unabhängig.

*Beweis.* Ist  $I$  perfekt unabhängig in  $G$  und  $J \subseteq E(G) - I$  unabhängig in  $G$ , so ist  $m_G(J, I) \geq 2|J|$ . Da  $G$  klauenfrei ist folgt daher

$$2|J| \leq m_G(J, I) = m_G(J, I \cap N(J, G)) \leq 2|I \cap N(J, G)|,$$

woraus sich  $|J| \leq |I \cap N(J, G)|$  ergibt. Wegen des Unabhängigkeitslemmas von Berge (Satz 9.7) ist  $I$  dann notwendig maximal. ||

In den Jahren 1967 bzw. 1985 befaßten sich Harary und Plummer [1] bzw. Hopkins und Staton [1] mit Graphen, die genau eine maximale unabhängige Eckenmenge besitzen. Ist  $G$  ein Graph und  $r$  eine natürliche Zahl mit  $r \leq \alpha = \alpha(G)$ , so besitzt  $G$  mindestens  $\binom{\alpha}{r}$  unabhängige Eckenmengen der Kardinalität  $r$ , denn alle  $r$ -elementigen Teilmengen einer maximalen unabhängigen Eckenmenge sind unabhängig. Die Graphen mit genau einer maximalen unabhängigen Menge lassen sich dadurch weiter klassifizieren, daß man nach dem kleinsten  $p$  sucht, so daß für alle  $r$  mit  $p \leq r \leq \alpha$  genau  $\binom{\alpha}{r}$  unabhängige Eckenmengen der Kardinalität  $r$  existieren. Diese Vorbetrachtungen führen zu folgender

**Definition 9.4.** Es sei  $G$  ein Multigraph,  $I \subseteq E(G)$  eine unabhängige Eckenmenge und  $p \in \mathbf{N}_0$ . Die Eckenmenge  $I$  heißt *p-fach unabhängig* in  $G$ , wenn für alle unabhängigen Eckenmengen  $I' \subseteq E(G)$ , die die Bedingung  $|I'| \geq |I| - p + 1$  erfüllen,  $I' \subseteq I$  gilt.

Eine 0-fach unabhängige Eckenmenge  $I$  liegt offensichtlich genau dann vor, wenn  $I$  eine maximale unabhängige Eckenmenge ist, und  $I$  ist genau dann 1-fach unabhängig, wenn  $I$  die einzige maximale unabhängige Eckenmenge ist. Ist  $I$   $p$ -fach unabhängig, so ist  $I$  auch  $r$ -fach unabhängig für alle  $0 \leq r \leq p$ . Analog zum Unabhängigkeitslemma wollen wir nun die  $p$ -fach unabhängigen Eckenmengen charakterisieren.

**Satz 9.9 (Siemes, Topp, Volkmann [1] 1994).** Es sei  $G$  ein Multigraph,  $I \subseteq E(G)$  eine unabhängige Eckenmenge und  $p \in \mathbf{N}_0$ . Die Menge  $I$  ist genau dann  $p$ -fach unabhängig, wenn für alle nicht leeren unabhängigen Mengen  $J \subseteq E(G) - I$  gilt:

$$|N(J, G) \cap I| - |J| \geq p \tag{9.2}$$

*Beweis.* Zunächst sei  $I$  eine  $p$ -fach unabhängige Eckenmenge in  $G$  und  $J$  eine unabhängige Eckenmenge in  $E(G) - I$ . Dann ist auch die Eckenmenge  $I' = (I - N(J, G)) \cup J$  unabhängig mit

$$|I| - |I'| = |I| - (|I| - |N(J, G) \cap I| + |J|) = |N(J, G) \cap I| - |J|.$$

Ist  $J$  nicht leer, so ist  $I'$  keine Teilmenge von  $I$ . Daraus ergibt sich (9.2) wie folgt:

$$|N(J, G) \cap I| - |J| = |I| - |I'| \geq p$$

Nun sei umgekehrt (9.2) für alle nicht leeren unabhängigen Mengen  $J \subseteq E(G) - I$  erfüllt. Angenommen, es gibt eine unabhängige Eckenmenge  $I'$  mit  $|I| - |I'| \leq p - 1$ , die keine Teilmenge von  $I$  ist. Dann ist  $I' - I \subseteq E(G) - I$  eine nicht leere unabhängige Menge mit  $N(I' - I, G) \cap I \subseteq I - I'$ . Aus (9.2) folgt daher mit  $J = I' - I$

$$|I| - |I'| = |I - I'| - |I' - I| \geq |N(I' - I, G) \cap I| - |I' - I| \geq p,$$

was einen Widerspruch zu  $|I| - |I'| \leq p - 1$  bedeutet. ||

**Folgerung 9.4.** Eine 1-fach unabhängige Eckenmenge  $I$  ist notwendig perfekt, denn für alle Ecken  $x \in E(G) - I$  folgt aus (9.2) die Abschätzung  $|N(x, G) \cap I| - |\{x\}| \geq 1$  und damit  $|N(x, G) \cap I| \geq 2$ .

**Beispiel 9.1.** Es sei  $G$  ein Multigraph, und jede Ecke  $x$  aus  $G$ , die keine Endecke ist, sei zu mindestens  $p+1$  Endecken adjazent. Dann ist  $I = \Gamma(G)$  natürlich eine maximale unabhängige Eckenmenge von  $G$ . Ist  $J \subseteq E(G) - I$  eine nicht leere unabhängige Eckenmenge, so gilt

$$|N(J, G) \cap I| - |J| \geq (p+1)|J| - |J| \geq p,$$

womit  $I$  nach Satz 9.9 eine  $p$ -fach unabhängige Eckenmenge ist.

Weitere Informationen über  $p$ -fach unabhängige Eckenmengen findet man in dem Artikel von Siemes, Topp und Volkmann [1].

## 9.2 Bestimmung minimaler Überdeckungen

Wegen Satz 9.1 ist die Suche nach maximalen unabhängigen Eckenmengen gleichbedeutend mit der Bestimmung minimaler Überdeckungen. Zur Bestimmung minimaler Überdeckungen ist kein polynomialer Algorithmus bekannt, denn dies ist ein NP-vollständiges Problem (man vgl. Aho, Hopcroft und Ullman [1] 1983). Daher wollen wir für einige spezielle Graphen Methoden entwickeln, mit denen man sich in polynomialer Zeit minimale Überdeckungen verschaffen kann.

**Satz 9.10 (Reduktionssatz, Volkmann [3] 1990).** Es sei  $G$  ein Multigraph und  $H$  ein von Ecken induzierter Teilgraph von  $G$ , der eine maximale unabhängige Eckenmenge  $I$  besitzt, so daß die Ecken von  $I$  nur zu Ecken aus  $H$  adjazent sind. Ist  $T'$  eine minimale Eckenüberdeckung von  $G' = G - E(H)$ , so ist  $T = T' \cup (E(H) - I)$  eine minimale Eckenüberdeckung von  $G$ .

*Beweis.* Nach Satz 9.1 ist  $E(H) - I$  eine minimale Überdeckung von  $H$ . Da  $I$  nur zu Ecken aus  $H$  adjazent ist, inzidieren alle Kanten, die von  $E(H)$  nach  $E(G')$  führen, mit  $E(H) - I$ . Daher ist  $T$  eine Überdeckung von  $G$ .

Ist  $T^*$  eine beliebige Überdeckung von  $G$ , so ist  $T^* \cap E(G')$  eine Überdeckung von  $G'$  und  $T^* \cap E(H)$  eine Überdeckung von  $H$ . Da  $T'$  bzw.  $E(H) - I$  eine minimale Überdeckung von  $G'$  bzw. von  $H$  ist, folgt  $|T^* \cap E(G')| \geq |T'|$  und  $|T^* \cap E(H)| \geq |E(H) - I|$ , woraus sich  $|T^*| \geq |T|$  ergibt. Insgesamt haben wir gezeigt, daß  $T$  eine minimale Überdeckung von  $G$  ist. ||

Aus diesem Reduktionssatz ergeben sich einige interessante Folgerungen. Die Bekannteste dürfte ein Ergebnis von Daykin und Ng [1] aus dem Jahre 1966 sein.

**Folgerung 9.5 (Daykin, Ng [1] 1966).** Besitzt der Graph  $G$  eine Edecke, und entsteht bei jedem Reduktionsschritt wieder ein Graph mit einer Edecke, so erhält man mit Hilfe des Reduktionssatzes sehr schnell eine minimale Überdeckung. Denn ist  $a$  eine Edecke und  $x$  die Nachbarecke, so wende man den Reduktionssatz auf den von diesen beiden Ecken induzierten Graphen  $H = K_2$  und  $I = \{a\}$  an. Unsere Voraussetzungen sind z.B. dann erfüllt, wenn  $G$  ein Wald ist, oder wenn jeder Kreis mit einer Endkante inzidiert.

**Folgerung 9.6.** Liegt die Situation aus Folgerung 9.5 vor, und sind  $e_1, e_2, \dots, e_q$  die Ecken aus jedem Reduktionsschritt und  $a_1, a_2, \dots, a_q$  die zugehörigen adjazenten Ecken, so ist  $T(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$  natürlich eine minimale Überdeckung von  $G$  und  $M(G) = \{a_1e_1, a_2e_2, \dots, a_qe_q\}$  ein Matching von  $G$ , daß die Gleichung  $|M(G)| = |T(G)|$  erfüllt. Somit ist  $M(G)$  nach Satz 9.2 ii) ein maximales Matching. Daher erhalten wir in diesem Fall direkt und sehr schnell gleichzeitig eine minimale Überdeckung und ein maximales Matching von  $G$ .

**Folgerung 9.7 (Algorithmus für Blockgraphen).** Sei  $G$  ein Blockgraph. Ist  $B$  ein Endblock von  $G$ , so existiert eine Ecke  $a \in E(B)$ , die nur zu Ecken aus  $B$  adjazent ist. Daher läßt sich der Reduktionssatz auf  $G$  mit  $H = B$  und  $I = \{a\}$  anwenden. Aus der Tatsache, daß  $G - E(H)$  wieder ein Blockgraph ist, ergibt sich daher ein schneller Algorithmus für minimale Überdeckungen in Blockgraphen.

**Definition 9.5.** Es sei  $C = x_0x_1 \dots x_r x_0$  ein Kreis eines schlichten Graphen  $G$ . Ist  $x_i x_j \in K(G)$  mit  $1 < |i - j| < r$ , so heißt die Kante  $x_i x_j$  *Sehne* oder *Diagonale* des Kreises  $C$ . Einen schlichten Graphen  $G$  nennt man *trianguliert* oder *chordal*, wenn jeder Kreis mit mindestens 4 Ecken eine Sehne besitzt, d.h.  $G$  enthält keinen Kreis  $C_p$  mit  $p \geq 4$  als induzierten Teilgraphen.

**Bemerkung 9.3.** Jeder induzierte Teilgraph eines triangulierten Graphen ist wieder ein triangulierter Graph.

Auch für die Klasse der triangulierten Graphen, die die Blockgraphen umfaßt, ist ein polynomialer Algorithmus zur Bestimmung der Eckenüberdeckungsanzahl bekannt (man vgl. z.B. Golumbic [1]).

## 9.3 Perfekte Graphen

**Definition 9.6.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph. Einen vollständigen Teilgraphen  $H$  von  $G$  nennt man *Clique*. Eine Clique  $H$  von  $G$  heißt *gesättigt*, wenn keine Clique  $H'$  von  $G$  existiert mit  $E(H) \subseteq E(H')$  und  $E(H) \neq E(H')$ . Falls eine Ecke  $s \in E(G)$  in genau einer gesättigten Clique  $H$  von  $G$  enthalten ist, also  $N[s, G] = E(H)$  gilt, so bezeichnet man  $s$  als *simpliziale Ecke* in  $G$  und nennt dann  $H$  *Simplex* von  $G$ .

Eine Clique maximaler Ordnung  $p$  von  $G$  heißt *maximale Clique*, und  $p = \omega(G)$  ist die *Cliquenzahl* von  $G$ .

Sind  $H_1, H_2, \dots, H_q$  Cliques von  $G$  mit  $\bigcup_{i=1}^q E(H_i) = E(G)$  und  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$  für  $1 \leq i < j \leq q$ , so nennen wir  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_q\}$  eine *Cliquenzerlegung* von  $G$ . Die minimale Anzahl der Cliques, in die man  $G$  zerlegen kann, ist die *Cliquenzerlegungsanzahl*  $\theta(G)$ .

**Bemerkung 9.4.** Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $H$  eine maximale Clique von  $G$ , so ist  $E(H)$  in  $\overline{G}$  eine maximale unabhängige Eckenmenge und umgekehrt, also  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ . Ist  $\mathcal{H}$  eine

Cliquenzerlegung von  $G$ , so ist  $\mathcal{H}$  in  $\overline{G}$  eine Zerlegung von  $E(\overline{G})$  in disjunkte unabhängige Eckenmengen von  $\overline{G}$  und umgekehrt. Bezeichnen wir die minimale Anzahl disjunkter unabhängiger Eckenmengen, in die man die Eckenmenge eines Graphen  $G$  zerlegen kann, mit  $\chi = \chi(G)$  (man vgl. Definition 12.1 der chromatischen Zahl  $\chi(G)$  und Bemerkung 12.2), so gilt  $\theta(G) = \chi(\overline{G})$ .

**Satz 9.11.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph.

- i) Es gilt  $\alpha(G) \leq \theta(G)$ .
- ii) Es gilt  $\omega(G) \leq \chi(G)$ .
- iii) Ist  $I_0$  eine unabhängige Eckenmenge und  $\mathcal{H}_0$  eine Cliquenzerlegung von  $G$  mit  $|I_0| = |\mathcal{H}_0|$ , so ist  $I_0$  maximal und  $\mathcal{H}_0$  minimal.

*Beweis.* i) Für jede unabhängige Menge  $I$  und jede Cliquenzerlegung  $\mathcal{H} = (H_1, H_2, \dots, H_q)$  gilt  $|I \cap E(H_i)| \leq 1$  für  $i = 1, 2, \dots, q$ , woraus das gewünschte Resultat folgt.

ii) Ungleichung i) angewandt auf das Komplement  $\overline{G}$  liefert gemeinsam mit Bemerkung 9.4 die behauptete Ungleichung.

iii) Aus i) ergibt sich

$$|I_0| \leq \alpha(G) \leq \theta(G) \leq |\mathcal{H}_0| = |I_0|,$$

womit auch iii) bewiesen ist. ||

**Definition 9.7.** Ein schlichter Graph  $G$  wird *perfekt* genannt, wenn  $\chi(H) = \omega(H)$  für jeden induzierten Teilgraphen  $H$  von  $G$  gilt. Ist ein schlichter Graph  $G$  nicht perfekt, so heißt  $G$  *minimal imperfekt*, wenn  $G - v$  für alle  $v \in E(G)$  perfekt ist.

**Bemerkung 9.5.** Ist  $G$  ein minimal imperfekter Graph, so gilt  $\chi(H) = \omega(H)$  für jeden induzierten Teilgraphen  $H \neq G$  und daher wegen Satz 9.11 ii) dann  $\chi(G) \geq \omega(G) + 1$ .

Das Konzept der perfekten Graphen wurde 1960 von Berge [3] entwickelt, der gleichzeitig die Vermutung aussprach, daß ein Graph  $G$  genau dann perfekt ist, wenn sein Komplement  $\overline{G}$  perfekt ist. Diese als *Perfect Graph Conjecture* bekannt gewordene Vermutung wurde 1972 durch Lovász [2] bewiesen (man vgl. auch Lovász [5]), der damit das *Perfect Graph Theorem* schuf. Beim Beweis des Perfect Graph Theorems folgen wir einer Idee von Gasparian [1].

**Satz 9.12 (Lovász [2] 1972).** Ist  $G$  ein minimal imperfekter Graph, so gilt die Identität  $n(G) = \alpha(G)\omega(G) + 1$ .

*Beweis* (Gasparian [1] 1996). Ist  $v$  eine beliebige Ecke von  $G$ , so erhält man

$$n(G) = n(G - v) + 1 \leq \alpha(G - v)\chi(G - v) + 1 = \alpha(G - v)\omega(G - v) + 1 \leq \alpha(G)\omega(G) + 1.$$

Für den Beweis der umgekehrten Ungleichung verwenden wir auch die Abkürzungen  $\alpha(G) = \alpha$ ,  $\omega(G) = \omega$  und  $n(G) = n$ . Ist  $S$  eine beliebige unabhängige Eckenmenge von  $G$ , so ergibt sich aus Bemerkung 9.5  $\omega(G - S) = \chi(G - S) \geq \chi(G) - 1 \geq \omega(G)$  und daher

$$\omega(G - S) = \chi(G - S) = \omega(G). \quad (9.3)$$

Wählen wir eine maximale unabhängige Eckenmenge  $S_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$  von  $G$ , so gibt es wegen (9.3) mit  $S = \{a_i\}$  eine Zerlegung von  $E(G - a_i)$  in  $\omega$  unabhängige Eckenmengen

$$S_{(i-1)\omega+1}, S_{(i-1)\omega+2}, \dots, S_{i\omega}.$$



für alle  $i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$ . Damit haben wir insgesamt  $\alpha\omega + 1$  unabhängige Eckenmengen  $S_0, S_1, \dots, S_{\alpha\omega}$  definiert. Nun seien  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{\alpha\omega}$  Cliques der Ordnung  $\omega$  in  $G - S_i$  für  $0 \leq i \leq \alpha\omega$ , die wegen (9.3) tatsächlich existieren.

Ist  $E(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , so sei  $A$  die  $(\alpha\omega + 1) \times n$ -Matrix mit den Zeilenvektoren  $\underline{a}_i$ , die die Einträge 1 haben falls  $v_j \in S_i$  und 0 sonst, und  $B$  sei die  $n \times (\alpha\omega + 1)$ -Matrix mit den Spaltenvektoren  $\underline{b}_i$ , die die Einträge 1 haben falls  $v_j \in Q_i$  und 0 sonst für  $1 \leq j \leq n$  und  $0 \leq i \leq \alpha\omega$ .

Ist  $Q$  eine beliebige Clique der Ordnung  $\omega$  von  $G$ , so zeigen wir nun, daß  $E(Q) \cap S_i = \emptyset$  für genau ein  $i \in \{0, 1, \dots, \alpha\omega\}$  gilt. Ist  $E(Q) \cap S_0 = \emptyset$ , so folgt aus (9.3) sofort  $|E(Q) \cap S_i| = 1$  für alle  $1 \leq i \leq \alpha\omega$ . Ist  $E(Q) \cap S_0 \neq \emptyset$ , also  $E(Q) \cap S_0 = \{a_p\}$  für ein  $p \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$ , so ergibt sich  $E(Q) \cap S_i = \emptyset$  für genau ein  $i$  mit  $(p-1)\omega + 1 \leq i \leq p\omega$ . Da nun die Ecken aus  $S_0 - a_p$  nicht zu  $Q$  gehören können, erkennt man, daß  $|E(Q) \cap S_j| = 1$  für alle  $j \neq i$  mit  $0 \leq j \leq \alpha\omega$  gelten muß.

Da  $Q_i$  und  $S_i$  nach Definition eckendisjunkt sind, ergibt sich sofort  $\underline{a}_i \cdot \underline{b}_i = 0$  und daher nach obigen Überlegungen  $\underline{a}_i \cdot \underline{b}_j = 1$  für  $i \neq j$ . Dies impliziert

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt ohne große Mühe, daß die rechte Matrix regulär ist und damit den Rang  $r(AB) = \alpha\omega + 1$  besitzt. Daraus ergibt

$$\alpha\omega + 1 = r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq r(A) \leq \min\{n, \alpha\omega + 1\}$$

und damit die gewünschte Ungleichung  $\alpha\omega + 1 \leq n$ . ||

**Folgerung 9.8.** Ein schlichter Graph ist genau dann perfekt, wenn  $n(H) \leq \alpha(H)\omega(H)$  für jeden induzierten Teilgraphen  $H$  von  $G$  gilt.

*Beweis.* Ist  $G$  perfekt, so folgt für jeden induzierten Teilgraphen  $H$  die gewünschte Ungleichung  $n(H) \leq \alpha(H)\chi(H) = \alpha(H)\omega(H)$ .

Gilt umgekehrt  $n(H) \leq \alpha(H)\omega(H)$  für jeden induzierten Teilgraphen  $H$  von  $G$ , so muß  $G$  wegen Satz 9.12 perfekt sein. ||

**Satz 9.13 (Perfect Graph Theorem, Lovász [2] 1972).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so ist  $G$  genau dann perfekt, wenn  $\overline{G}$  perfekt ist.

*Beweis.* Aufgrund der Identität  $\overline{\overline{G}} = G$  genügt es zu zeigen, daß aus der Perfektheit von  $G$  die von  $\overline{G}$  folgt.

Ist  $H$  ein induzierter Teilgraph von  $\overline{G}$ , so gilt  $\alpha(H) = \omega(\overline{H})$  und  $\omega(H) = \alpha(\overline{H})$ . Da  $\overline{H}$  auch ein induzierter Teilgraph von  $G$  ist, ergibt sich aus Folgerung 9.8  $n(\overline{H}) \leq \alpha(\overline{H})\omega(\overline{H})$  und damit sofort  $n(H) = n(\overline{H}) \leq \omega(H)\alpha(H)$ . Nochmals Folgerung 9.8 angewandt, liefert die Perfektheit von  $\overline{G}$ . ||

Wegen  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$  und  $\theta(G) = \chi(\overline{G})$  ergibt sich aus Satz 9.13 unmittelbar das nächste Resultat.



**Folgerung 9.9.** Ein schlichter Graph ist genau dann perfekt, wenn  $\alpha(H) = \theta(H)$  für jeden induzierten Teilgraphen  $H$  gilt.

**Satz 9.14.** Jeder schlichte und bipartite Graph  $G$  ist perfekt.

*Beweis.* Wegen der Tatsache, daß jeder induzierte Teilgraph eines bipartiten Graphen wieder bipartit ist, genügt es wegen Folgerung 9.9  $\alpha(G) = \theta(G)$  nachzuweisen.

Da  $G$  bipartit ist, besitzt jede Clique von  $G$  höchstens zwei Ecken. Besteht nun eine minimale Cliquerzerlegung  $\mathcal{H}_0$  von  $G$  aus  $r$  Cliques der Ordnung zwei und  $s$  Cliques der Ordnung eins, so ist  $\theta(G) = r + s$  und  $2r + s = n(G)$ . Da  $\mathcal{H}_0$  minimal ist, bilden die Kanten aus  $\mathcal{H}_0$  ein maximales Matching von  $G$ , womit  $r = \alpha_0(G)$  gilt. Daher folgt mit dem Satz von König (Satz 9.3)  $r = \beta(G)$ . Beachten wir noch Satz 9.1 ii), so ergibt sich insgesamt

$$\theta(G) = n(G) - r = n(G) - \beta(G) = \alpha(G). \quad \parallel$$

**Hilfssatz 9.1.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $H \neq G$  ein Simplex von  $G$ . Dann gilt

$$\theta(G - E(H)) = \theta(G) - 1.$$

*Beweis.* Es sei  $s \in E(H)$  eine simpliziale Ecke und  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_q\}$  eine minimale Cliquerzerlegung von  $G$ . Es gelte o.B.d.A.  $s \in E(H_1)$ . Da  $H$  gesättigt ist und damit  $N[s, G] = E(H)$  gilt, folgt notwendig  $E(H_1) \subseteq E(H)$ . Setzen wir  $G' = G - E(H)$  und  $H'_i = H_i \cap G'$  für alle  $i = 2, 3, \dots, q$ , so ist  $\mathcal{H}' = \{H'_2, H'_3, \dots, H'_q\}$  eine Cliquerzerlegung von  $G'$ , womit wir  $\theta(G - E(H)) \leq \theta(G) - 1$  gezeigt haben. Da die umgekehrte Ungleichung  $\theta(G - E(H)) \geq \theta(G) - 1$  leicht einzusehen ist, haben wir den Hilfssatz bewiesen.  $\parallel$

Im Jahre 1958 bewiesen Hajnál und Surányi [1], daß die triangulierten Graphen perfekt sind. Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir einige Eigenschaften triangulierter Graphen, die wir zunächst vorstellen wollen. Die Hilfssätze 9.2 und 9.3 stammen von Duchet [1], Folgerung 9.10 von Preissmann [1] und der Charakterisierungssatz 9.15 von Frank und Kas (man vgl. dazu Frank [1]).

**Hilfssatz 9.2 (Duchet [1] 1984).** Es sei  $G$  ein triangulierter Graph und  $a, b$  zwei nicht adjazente Nachbarn der Ecke  $u$ . Ist der Weg  $W = x_1x_2 \dots x_{p-1}x_p$  ein induzierter Teilgraph von  $G$  mit  $a = x_1$  und  $b = x_p$ , der die Ecke  $u$  nicht enthält, so sind alle Ecken des Weges  $W$  Nachbarn von  $u$ .

*Beweis.* Angenommen, es existiert eine Ecke  $x_i \in E(W)$ , die kein Nachbar von  $u$  ist. Dann sei  $j \in \{2, 3, \dots, p-1\}$  der kleinste Index mit dieser Eigenschaft und  $l \in \{j+1, j+2, \dots, p\}$  der kleinste Index mit  $x_l \in N(u, G)$ . Nun ist  $ux_{j-1}x_j \dots x_lu$  ein induzierter Kreis der Länge größer als drei in  $G$ , was der Voraussetzung widerspricht, daß  $G$  trianguliert ist.  $\parallel$

**Hilfssatz 9.3 (Duchet [1] 1984).** Es sei  $G$  ein triangulierter Graph und  $H$  eine gesättigte Clique von  $G$ . Ist  $Q$  ein zusammenhängender induzierter Teilgraph von  $G - E(H)$ , so existiert in  $H$  eine Ecke  $s$  mit  $N(s, G) \cap E(Q) = \emptyset$ .

*Beweis.* Da  $H$  eine gesättigte Clique in  $G$  ist, gibt es eine Ecke  $x$  in  $Q$  und eine Ecke  $y$  in  $H$ , die nicht adjazent sind. Nun sei  $R$  ein induzierter Teilgraph von  $Q$  maximaler Ordnung mit der Eigenschaft, daß  $R$  zusammenhängend ist und eine Ecke  $s \in E(H)$  existiert mit  $N(s, G) \cap E(R) = \emptyset$ . Ist  $R \neq Q$ , so gibt es in  $Q - E(R)$  eine Ecke  $a$  mit  $a \in N(E(R), G)$ . Aus der Maximalität von  $|E(R)|$  folgt  $a \in N(s, G)$ . Da  $H$  eine gesättigte Clique ist, existiert

in  $H$  eine Ecke  $b \neq s$ , die zu  $a$  nicht adjazent ist. Die Wahl von  $R$  und  $a$  zeigt aber, daß  $b$  einen Nachbarn in  $R$  besitzt. Daher können wir einen kürzesten Weg  $W = y_1 y_2 \dots y_{q-1} y_q$  von  $a = y_1$  nach  $b = y_q$  wählen, der zusätzlich die Bedingung  $y_i \in E(R)$  für  $i = 2, 3, \dots, q-1$  erfüllt. Dann ist  $W$  ein induzierter Teilgraph von  $G$ , der die Ecke  $s$  nicht enthält. Neben  $a$  ist aber auch  $b$  ein Nachbar von  $s$ , womit uns Hilfssatz 9.2 den Widerspruch  $y_2 \in N(s, G)$  liefert.  $\parallel$

Als unmittelbare Folgerung aus dem Hilfssatz 9.3 ergibt sich ein neueres Ergebnis von Preissmann [1].

**Folgerung 9.10 (Preissmann [1] 1990).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender und triangulierter Graph und  $H$  eine gesättigte Clique von  $G$ . Dann ist der Graph  $G - E(H)$  nicht zusammenhängend, oder  $H$  ist ein Simplex von  $G$ .

**Satz 9.15 (Frank-Kas, Frank [1] 1975).** Ein schlichter Graph  $G$  ist genau dann trianguliert, wenn jeder induzierte Teilgraph von  $G$  entweder eine Clique ist oder zwei nicht adjazente simpliziale Ecken enthält.

*Beweis.* Ist  $G$  nicht trianguliert, so besitzt  $G$  einen Kreis  $C_p$  mit  $p \geq 4$  als induzierten Teilgraphen. Dieser induzierte Teilgraph ist weder eine Clique noch enthält er eine simpliziale Ecke.

Für die Umkehrung sei  $G$  ein triangulierter Graph, und wir nehmen an, daß  $G$  einen induzierten (und damit triangulierten) Teilgraphen  $G^*$  enthält, der weder eine Clique ist noch zwei nicht adjazente simpliziale Ecken enthält. Unter allen induzierten Teilgraphen mit diesen Eigenschaften sei  $G^*$  von minimaler Ordnung. Dann existieren in  $G^*$  mindestens zwei verschiedene gesättigte Cliques  $H_1$  und  $H_2$ . Wegen unserer Annahme enthält mindestens eine der beiden Cliques  $H_1$  oder  $H_2$ , sagen wir  $H_1$ , keine simpliziale Ecke von  $G^*$ . Daher ist  $G^* - E(H_1)$  nach Folgerung 9.10 nicht zusammenhängend. Sind  $G_1$  und  $G_2$  zwei Zusammenhangskomponenten von  $G^* - E(H_1)$ , so sind die durch  $E(G_1) \cup E(H_1)$  bzw.  $E(G_2) \cup E(H_1)$  induzierten Teilgraphen  $G_1^*$  bzw.  $G_2^*$  trianguliert und keine Cliques. Aufgrund der Minimalität von  $|E(G^*)|$  enthalten  $G_1^*$  und  $G_2^*$  jeweils zwei nicht adjazente simpliziale Ecken. Dabei liegt mindestens eine simpliziale Ecke  $s_i$  von  $G_i^*$  in  $G_i$  für  $i = 1, 2$ . Da  $G_1$  und  $G_2$  Zusammenhangskomponenten von  $G^* - E(H_1)$  sind, folgt, daß  $s_1$  und  $s_2$  auch zwei nicht adjazente simpliziale Ecken von  $G^*$  sind. Mit diesem Widerspruch ist der Satz vollständig bewiesen.  $\parallel$

**Satz 9.16 (Hajnál, Surányi [1] 1958).** Jeder schlichte und triangulierter Graph  $G$  ist perfekt.

*Beweis.* Da jeder induzierte Teilgraph eines triangulierten Graphen wieder trianguliert ist, genügt es wegen Folgerung 9.9  $\alpha(G) = \theta(G)$  nachzuweisen.

Nach Satz 9.11 i) gilt für jeden schlichten Graphen  $F$  die Ungleichung  $\alpha(F) \leq \theta(F)$ . Ist die Aussage des Satzes nicht richtig, so sei  $G^*$  ein triangulierter Graph minimaler Ordnung mit  $\alpha(G^*) < \theta(G^*)$ . Nach Satz 9.15 besitzt  $G^*$  eine simpliziale Ecke  $s$ . Damit ist  $s$  in einem Simplex  $H$  von  $G^*$  enthalten, und nach Hilfssatz 9.1 gilt dann einerseits  $\theta(G^* - E(H)) = \theta(G^*) - 1$ . Andererseits folgt aus dem Reduktionssatz (Satz 9.10) sofort  $\alpha(G^* - E(H)) = \alpha(G^*) - 1$ . Insgesamt erhalten wir daraus  $\alpha(G^* - E(H)) < \theta(G^* - E(H))$ , was der Minimalität von  $|E(G^*)|$  widerspricht.  $\parallel$

**Definition 9.8.** Wir nennen einen Graphen  $P_4$ -frei, falls er keinen Weg der Länge drei als induzierten Teilgraphen enthält.

**Satz 9.17 (Seinesche [1] 1974).** Jeder schlichte und  $P_4$ -freie Graph  $G$  ist perfekt.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz o.B.d.A. für zusammenhängende Graphen  $G$ , wobei das Resultat für  $1 \leq n(G) \leq 3$  sofort einzusehen ist. Daher betrachten wir im folgenden nur noch Graphen mit mindestens vier Ecken. Ist  $G$  ein  $P_4$ -freier Graph, so ist sein Komplement  $\overline{G}$  ebenfalls  $P_4$ -frei.

Zunächst zeigen wir, daß das Komplement eines zusammenhängenden  $P_4$ -freien Graphen der Ordnung  $n(G) \geq 4$  nicht zusammenhängend ist. Für  $n(G) = 4$  ist leicht zu sehen, daß diese Aussage richtig ist. Angenommen,  $G^*$  ist ein zusammenhängender  $P_4$ -freier Graph minimaler Ordnung  $n(G^*) \geq 5$ , dessen Komplement  $\overline{G^*}$  zusammenhängend ist. Nach Satz 1.10 existiert in  $G^*$  eine Ecke  $v$ , so daß  $H = G^* - v$  zusammenhängend bleibt. Da  $H$  natürlich auch  $P_4$ -frei ist, kann  $\overline{H}$  nach unserer Annahme nicht zusammenhängend sein, womit  $v$  eine Schnittecke von  $\overline{G^*}$  ist. Da  $G^*$  zusammenhängend ist, existiert in  $\overline{H}$  eine Ecke  $a$  die in  $\overline{G^*}$  den Abstand 2 zur Ecke  $v$  hat. Ist  $b$  ein gemeinsamer Nachbar von  $a$  und  $v$  in  $\overline{G^*}$ , so liegen  $a$  und  $b$  in einer Komponente  $H_1$  von  $\overline{H}$ . Ist  $H_2$  eine weitere Komponente von  $\overline{H}$ , so sei  $c \in E(H_2)$  ein Nachbar von  $v$  in  $\overline{G^*}$ . Nun ist aber der Weg  $abvc$  ein induzierter Teilgraph in  $\overline{G^*}$ , was der Tatsache widerspricht, daß  $\overline{G^*}$  auch  $P_4$ -frei ist.

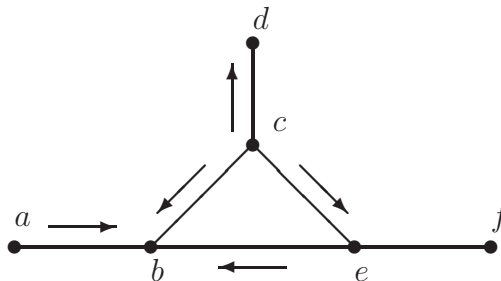
Angenommen,  $G'$  ist ein zusammenhängender  $P_4$ -freier nicht perfekter Graph minimaler Ordnung. Dann ist  $\overline{G'}$  ebenfalls  $P_4$ -frei aber nicht zusammenhängend. Aufgrund der Minimalität des Graphen  $G'$  ist jede Zusammenhangskomponente von  $\overline{G'}$  und somit auch  $\overline{G'}$  perfekt. Nach dem Perfect Graph Theorem von Lovász ist dann  $\overline{\overline{G'}} = G'$  perfekt, was unserer Annahme widerspricht. ||

Eine weitere interessante Klasse perfekter Graphen ist die der transitiv orientierbaren Graphen, die die schlichten bipartiten Graphen enthält.

**Definition 9.9.** Ein schlichter Graph  $G$  heißt *transitiv orientierbar*, falls  $G$  eine Orientierung  $D$  besitzt, die die folgende Bedingung erfüllt:

$$\text{Ist } (x, y) \in B(D) \text{ und } (y, z) \in B(D), \text{ so gilt } (x, z) \in B(D)$$

**Beispiel 9.2.** Der skizzierte Graph  $G$  ist nicht transitiv orientierbar. Denn orientiert man das Dreieck o.B.d.A. in der angegebenen Form, so kann man zwar den Kanten  $ab$  und  $cd$  noch die dargestellte Orientierung geben, aber für die Kante  $ef$  gibt es keine verträgliche Richtung.



**Satz 9.18 (Dilworth [1] 1950).** Jeder transitiv orientierbare Graph  $G$  ist perfekt.

*Beweis.* Jeder induzierte Teilgraph eines transitiv orientierbaren Graphen ist wieder transitiv orientierbar. Daher ist es hinreichend  $\omega(G) = \chi(G)$  für einen beliebigen transitiv orientierbaren Graphen  $G$  zu zeigen.

Nun sei  $D$  eine Orientierung von  $G$ , die der Bedingung aus Definition 9.9 genügt. Ist  $v$  eine Ecke von  $D$  und  $W_v$  ein längster orientierter Weg in  $D$  mit der Anfangsecke  $v$ , so definieren wir eine Gewichtsfunktion  $h : E(D) \rightarrow \mathbf{N}$  durch  $h(v) = |E(W_v)|$ . Nach Definition 9.9 enthält  $D$  keinen orientierten Kreis und der von  $E(W_v)$  induzierte Teilgraph ist ein transitives Turnier der Ordnung  $h(v)$  (man vgl. dazu auch Abschnitt 5.1). Ist  $p = \max \{h(v) | v \in E(G)\}$ , so gibt es in  $D$  ein transitives Turnier der Ordnung  $p$ , womit in  $G$  eine Clique der Ordnung  $p$  existiert. Es gilt sogar  $\omega(G) = p$ , denn gäbe es in  $G$  eine Clique der Ordnung  $p + 1$ , so wäre durch diese in  $D$  ein Turnier der Ordnung  $p + 1$  als Teilgraph definiert. Dieses Turnier enthielte nach Satz 5.1 (Satz von Rédei) einen orientierten Hamiltonschen Weg  $W$  mit einer Startecke  $a$ . Im Widerspruch zu  $h(a) \leq p$  wäre dann aber  $h(a) \geq p + 1$ .

Sind in  $D$  zwei Ecken  $x$  und  $y$  durch einen Bogen  $(x, y)$  verbunden, so ergibt sich aus Definition 9.9 sofort  $h(x) > h(y)$ . Daher bilden alle Ecken vom gleichen Gewicht eine unabhängige Eckenmenge in  $G$ . Damit liefert uns die Gewichtsfunktion  $h$  eine Zerlegung der Eckenmenge  $E(G)$  in  $p$  disjunkte unabhängige Eckenmengen, woraus sich  $\chi(G) \leq p = \omega(G)$  ergibt. Da nach Satz 9.11 ii) auch die umgekehrte Ungleichung  $\omega(G) \leq \chi(G)$  gilt, haben wir die gewünschte Identität  $\omega(G) = \chi(G)$  nachgewiesen. ||

**Bemerkung 9.6.** Für  $p = 2, 3, \dots$  überlegt man sich ohne größere Mühe  $\alpha(C_{2p+1}) = p < p + 1 = \theta(C_{2p+1})$ . Daher ist ein Graph sicher nicht perfekt, wenn er einen Kreis ungerader Länge mit mindestens fünf Ecken als induzierten Teilgraphen enthält. Falls  $\overline{G}$  einen Kreis ungerader Länge ungleich dem Kreis  $C_3$  als induzierten Teilgraphen enthält, so sind nach dem Perfect Graph Theorem von Lovász weder  $\overline{G}$  noch  $G$  perfekt.

Diese Bemerkung ist mit der zweiten Vermutung von Berge [3] verbunden, welche in der Literatur als *Strong Perfect Graph Conjecture* bekannt wurde.

**Vermutung 9.1 (Strong Perfect Graph Conjecture (Berge [3] 1960).** Ein Graph  $G$  ist genau dann perfekt, wenn sowohl  $G$  als auch  $\overline{G}$  keinen Kreis ungerader Länge, der vom  $C_3$  verschieden ist, als induzierten Teilgraphen enthält.

Für einige Spezialklassen, wie z.B. den planaren Graphen bzw. den klauenfreien Graphen, ist diese Vermutung 1973 von Tucker [1] bzw. 1976 von Parthasarathy und Ravindra [1] bewiesen worden.

In der 180 Seiten langen Arbeit mit dem Titel “The strong perfect graph theorem” von M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour und R. Thomas [1] aus dem Jahre 2006 wird diese Vermutung vollständig bewiesen.

Im Sinne von Duchet [1] wurden in diesem Abschnitt die sogenannten klassischen perfekten Graphen untersucht. Damit sind solche Graphenklassen gemeint, bei denen die induzierten Teilgraphen ebenfalls zu der Klasse der Ausgangsgraphen gehören.

Mit den wichtigen algorithmischen Aspekten der perfekten Graphen beschäftigen sich die Bücher “Algorithmic Aspects of Perfect Graphs” von Golumbic [1] und “Effiziente Algorithmen für Perfekte Graphen” von Simon [1]. Im Jahre 2005 entwickelten Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour und Vušković [1] einen Algorithmus der Komplexität  $O(n^9)$ , der entscheidet, ob ein Graph  $G$  oder  $\overline{G}$  einen Kreis ungerader Länge, der vom  $C_3$  verschieden ist, als induzierten Teilgraphen enthält. Damit lösten diese Autoren ein lange offenes Problem.

## 9.4 Der Satz von Turán

In diesem Abschnitt behandeln wir das folgende graphentheoretische Problem. Wieviel Kanten kann ein schlichter Graph  $G$  der Ordnung  $n$  maximal besitzen, wenn er keine Clique der Ordnung  $r + 1$  enthält, also  $\omega(G) \leq r$  gilt?

Liegt ein  $r$ -partiter Graph  $G$  mit der Partition  $E_1, E_2, \dots, E_r$  vor, so gilt sicher  $\omega(G) \leq r$ , denn unter jeweils  $r + 1$  Ecken befinden sich mindestens zwei, die nicht adjazent sind. Daher hat der gesuchte extremale Graph mindestens so viele Kanten wie jeder schlichte,  $r$ -partite Graph der Ordnung  $n$ . Wir zeigen zunächst, daß unter allen diesen  $r$ -partiten Graphen genau einer maximaler Größe existiert, nämlich der vollständige  $r$ -partite Graph mit  $||E_i| - |E_j|| \leq 1$  für alle  $1 \leq i, j \leq r$ .

Daß dieser sogenannte *Turánsche Graph*  $T_r(n)$  wirklich die maximale Anzahl von Kanten enthält, ist leicht einzusehen. Denn nehmen wir einmal an, daß es zwei Eckenmengen  $E_i$  und  $E_j$  gibt mit

$$n_i = |E_i| \geq |E_j| + 2 = n_j + 2.$$

Transformiert man eine Ecke aus  $E_i$  nach  $E_j$  hinüber, so würde sich die Kantenzahl um  $n_i - 1 - n_j \geq 1$  erhöhen.

Für den Turánschen Graphen  $T_r(n)$  gilt  $|E_i| = \lfloor \frac{n+i-1}{r} \rfloor$  für  $i = 1, 2, \dots, r$ . Denn ist  $n = sr + t$  mit  $s, t \in \mathbf{N}_0$  und  $t < r$ , so gilt

$$\sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{n+i-1}{r} \right\rfloor = sr + \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{t+i-1}{r} \right\rfloor = sr + t.$$

Ferner erkennt man  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor = |E_1| \leq |E_2| \leq \dots \leq |E_r| = \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor + 1$ , womit für alle  $1 \leq i, j \leq r$  die Bedingung  $||E_i| - |E_j|| \leq 1$  erfüllt ist.

Der Satz von Turán gibt eine Antwort auf die oben gestellte Frage und zeigt, daß die schlichten Graphen  $G$  mit maximaler Kantenzahl und  $\omega(G) \leq r$  genau die Turánschen Graphen  $T_r(n)$  sind. Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir folgendes Resultat von Erdős.

**Satz 9.19 (Erdős [3] 1970).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$ . Ist  $\omega(G) \leq r$ , so existiert ein vollständiger  $r$ -partiter Graph  $H$  mit  $E(H) = E(G) = E$ , so daß für jede Ecke  $x \in E$  gilt:

$$d(x, G) \leq d(x, H) \tag{9.4}$$

Ist  $G$  kein vollständiger  $r$ -partiter Graph, so existiert mindestens eine Ecke  $x$ , für die in (9.4) nicht die Gleichheit steht.

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $r$ . Für  $r = 1$  ist der Satz richtig, da  $G$  dann ein Nullgraph ist. Es sei nun  $r \geq 2$  und  $G$  ein schlichter Graph mit  $\omega(G) \leq r$ . Wir wählen eine Ecke  $a$  maximalen Grades  $\Delta = \Delta(G)$  und setzen  $G_1 = G[N(a, G)]$ . Da  $G$  keine Clique der Ordnung  $r + 1$  enthält, besitzt  $G_1$  keine Clique der Ordnung  $r$ . Daher können wir nach Induktionsvoraussetzung  $G_1$  durch einen vollständigen  $(r - 1)$ -partiten Graphen  $H_1$  ersetzen, so daß  $d(x, G_1) \leq d(x, H_1)$  für alle  $x \in E_1 = E(G_1) = N(a, G)$  gilt. Setzen wir  $E_2 = E - E_1$  und bezeichnen mit  $H_2$  den Nullgraphen, der aus der Eckenmenge  $E_2$  besteht, so definieren wir  $H$  durch  $H = H_1 + H_2$ .

Nach Konstruktion ist  $H$  ein  $r$ -partiter Graph mit  $E(H) = E(G)$ . Weiter gilt für  $x \in E_2$

$$d(x, H) = |E_1| = d(a, G) = \Delta \geq d(x, G)$$

und für  $x \in E_1$

$$d(x, H) = d(x, H_1) + |E_2| \geq d(x, G_1) + |E_2| \geq d(x, G), \quad (9.5)$$

womit (9.4) bewiesen ist.

Ist  $d(x, G) = d(x, H)$  für alle  $x \in E$ , so folgt aus (9.5) sofort  $d(x, H_1) = d(x, G_1)$  für alle  $x \in E_1$ , woraus wir zusammen mit dem Handschlaglemma  $m(G) = m(H)$  und  $m(G_1) = m(H_1)$  erhalten. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann  $G_1$  ein vollständiger  $(r-1)$ -partiter Graph. Weiter folgt aus  $d(x, G) = d(x, G_1) + |E_2|$  sofort  $m_G(E_1, E_2) = |E_1||E_2|$ , woraus wir

$$m_G(E_1, E_2) = |E_1||E_2| = m_H(E_1, E_2)$$

erhalten. Insgesamt ergibt sich schließlich

$$m(G[E_2]) = m(H[E_2]) = 0,$$

womit auch  $G$  ein vollständiger  $r$ -partiter Graph ist. ||

**Satz 9.20 (Turán [1] 1941).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit der Cliquenzahl  $\omega(G) \leq r$ , so gilt

$$m(G) \leq m(T_r(n)). \quad (9.6)$$

Es gilt genau dann  $m(G) = m(T_r(n))$ , wenn  $G$  isomorph zum Turánschen Graphen  $T_r(n)$  ist.

*Beweis.* Nach Satz 9.19 gibt es einen vollständigen  $r$ -partiten Graphen  $H$ , der (9.4) erfüllt. Dann liefert das Handschlaglemma sofort  $m(G) \leq m(H)$ , woraus zusammen mit unserer Vorbetrachtung die Ungleichung (9.6) folgt.

Gilt nun  $m(G) = m(T_r(n))$ , so liefert Satz 9.19  $d(x, G) = d(x, H)$  für alle  $x \in E$ . Denn aus  $d(v, G) < d(v, H)$  für ein  $v \in E$  folgt mit (9.4) und der Vorbetrachtung der Widerspruch

$$m(T_r(n)) = m(G) < m(H) \leq m(T_r(n)).$$

Damit ist  $G$  nach Satz 9.19 ein vollständiger  $r$ -partiter Graph, der dann wegen der Vorbetrachtung notwendig isomorph zum Turánschen Graphen  $T_r(n)$  sein muß.

Ist  $G$  isomorph zu  $T_r(n)$ , so gilt in (9.6) natürlich die Gleichheit. ||

Setzen wir  $T_{n,r} = \overline{T}_r(n)$ , so besteht dieser Graph aus  $r$  disjunkten vollständigen Graphen der Ordnung  $\lfloor \frac{n+i-1}{r} \rfloor$  für  $i = 1, 2, \dots, r$ . Benutzen wir Bemerkung 9.4, so können wir Satz 9.20 auf folgende komplementäre Form bringen.

**Satz 9.21 (Turán [1] 1941).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit  $\alpha(G) \leq r$ , so gilt

$$m(G) \geq m(T_{n,r}). \quad (9.7)$$

Es gilt genau dann  $m(G) = m(T_{n,r})$ , wenn  $G$  isomorph zum *Turánschen Graphen*  $T_{n,r}$  ist.

Wir wollen nun die Kantenzahl des Turánschen Graphen  $T_r(n)$  nach oben abschätzen.

**Satz 9.22.** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit  $\omega(G) \leq r$ , so gilt

$$m(G) \leq m(T_r(n)) \leq \frac{r-1}{2r} n^2. \quad (9.8)$$



*Beweis.* Aus Satz 9.20 folgt  $m(G) \leq m(T_r(n))$ , womit wir nur noch die zweite Ungleichung in (9.8) nachweisen müssen.

Es sei  $n = sr + t$  mit  $0 \leq t \leq r - 1$ . Nach Konstruktion besteht dann der Turánsche Graph  $T_r(n)$  aus  $t$  Partitions Mengen mit  $s + 1$  Ecken und  $r - t$  Partitions Mengen mit  $s$  Ecken. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} 2m(T_r(n)) &= (n - s)s(r - t) + (n - (s + 1))t(s + 1) \\ &= nrs - rs^2 + nt - 2ts - t \\ &= nr \frac{n - t}{r} - r \frac{(n - t)^2}{r^2} + nt - 2t \frac{n - t}{r} - t \\ &= n^2 - \frac{1}{r}(n - t)^2 - \frac{1}{r}(2tn - 2t^2) - t \\ &= \frac{1}{r}(t^2 + rn^2 - rt - n^2) := \frac{1}{r}g(t). \end{aligned}$$

Da die Funktion  $g$  eine Parabel ist und  $0 \leq t \leq r - 1$  gilt, erhalten wir

$$2m(T_r(n)) \leq \frac{1}{r} \max\{g(0), g(r - 1)\}.$$

Wegen  $g(0) = (r - 1)n^2$  und  $g(r - 1) = (r - 1)(n^2 - 1)$  folgt insgesamt die gewünschte Abschätzung

$$2m(T_r(n)) \leq \frac{r - 1}{r} n^2. \quad \parallel$$

Mit dem Satz von Turán begann ein Zweig der Graphentheorie, den man heute *extremale Graphentheorie* nennt.

## 9.5 Aufgaben

**Aufgabe 9.1.** Es sei  $k$  eine Kante des  $K_n$ . Für  $n \geq 3$  bestimme man die Überdeckungszahl von  $K_n - k$ .

**Aufgabe 9.2.** Man bestimme die Überdeckungszahl für einen vollständigen  $p$ -partiten Graphen.

**Aufgabe 9.3.** Für jeden schlichten Graphen  $G$  beweise man die Ungleichung  $\beta(G) \geq \delta(G)$ .

**Aufgabe 9.4.** Ist  $G$  ein zusammenhängender, bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ , so gebe man Beispiele mit  $\alpha(G) > \max\{|A|, |B|\}$  an.

**Aufgabe 9.5.** Man zeige, daß ein Multigraph  $G$  genau dann bipartit ist, wenn  $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}n(H)$  für jeden Teilgraphen  $H$  von  $G$  gilt.

**Aufgabe 9.6.** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei disjunkte schlichte Graphen und  $I_i \subseteq E(G_i)$  unabhängige Eckenmengen ( $i = 1, 2$ ). Man zeige:

- i)  $I_1 \times I_2$  ist eine unabhängige Eckenmenge in  $G_1 \vee G_2$ .
- ii)  $I_1 \times E(G_2)$  und  $E(G_1) \times I_2$  sind unabhängige Eckenmengen in  $G_1 \wedge G_2$ .

**Aufgabe 9.7.** i) Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $m(G) > \frac{1}{4}n(G)^2$ , so zeige man, daß  $G$  ein Dreieck besitzt.

- ii) Man gebe einen schlichten Graphen  $G$  ohne Dreiecke an, für den  $m(G) = \frac{1}{4}n(G)^2$  gilt.



**Aufgabe 9.8.** Es sei  $\mathcal{H}_n$  die Klasse aller schlichten Graphen  $H$  der Ordnung  $n(H) = n$ , die keinen Weg der Länge 3 enthalten.

- i) Welche Struktur haben die Komponenten? Man zeige  $\mu(H) \leq \kappa(H)$ . Ist  $n$  nicht durch 3 teilbar, so beweise man  $\mu(H) \leq \kappa(H) - 1$ .
- ii) Ist  $n$  durch 3 teilbar, so setze man  $r_n = n$  und in den anderen Fällen  $r_n = n - 1$ . Zu jedem  $n \in \mathbf{N}$  gebe man einen Graphen  $H_n \in \mathcal{H}_n$  mit  $m(H_n) = r_n$  an.
- iii) Ist  $H \in \mathcal{H}_n$ , so zeige man  $m(H) \leq r_n$ .

**Aufgabe 9.9.** Ist  $G$  ein schlichter Kaktusgraph, so beweise man die Ungleichung  $\mu(G) \leq \alpha_0(G)$ .

**Aufgabe 9.10.** Es sei  $G$  ein schlichter Kaktusgraph.

- i) Besitzt  $G$  einen Kreis  $C$  der Länge  $L(C) \geq 4$ , so beweise man die Ungleichung  $\mu(G) < \alpha_0(G)$ .
- ii) Besitzt  $G$  eine Brücke, so zeige man  $\mu(G) < \alpha_0(G)$ .

**Aufgabe 9.11.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer schlichter Kaktusgraph. Man zeige, daß genau dann  $\mu(G) = \alpha_0(G)$  gilt, wenn alle Blöcke von  $G$  Dreiecke sind.

**Aufgabe 9.12.** Ist  $G$  ein nicht trivialer schlichter Kaktusgraph, so zeige man  $\mu(G) < \beta(G)$ .

**Aufgabe 9.13.** Ein Graph  $G$  mit  $E(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  heißt *Intervallgraph*, wenn eine Menge von reellen Intervallen  $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  existiert, so daß die Ecken  $i$  und  $j$  genau dann adjazent in  $G$  sind, wenn  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$  gilt. Zeigen Sie, daß jeder Intervallgraph  $G$  trianguliert und dessen Komplement transitiv orientierbar ist.

**Aufgabe 9.14.** Es sei  $G$  ein triangulierter Hamiltonscher Graph. Man zeige, daß  $G$  Eckenpanzyklisch ist.

**Aufgabe 9.15.** Ist  $G$  ein nicht trivialer triangulierter Block, so zeige man  $m(G) \geq 2n(G) - 3$ .

**Aufgabe 9.16.** Es sei  $G$  ein nicht trivialer Baum. Ist  $T$  eine Teilmenge der Eckenmenge von  $G$  mit  $\Gamma(G) \subseteq T$ , so zeige man, daß  $T$  keine minimale Überdeckung von  $G$  ist.

**Aufgabe 9.17.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$ . Man beweise:

- i)  $\theta(G) + \omega(G) \leq n + 1$ .
- ii)  $\alpha(G) + \alpha(\overline{G}) \leq n + 1$ .
- iii)  $\omega(G) + \omega(\overline{G}) \leq n + 1$ .
- iv)  $\alpha(G) \cdot \alpha(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{n^2 + 2n}{4} \right\rceil$ .

# Kapitel 10

## Dominanz und Irredundanz

### 10.1 Abschätzungen der Dominanzzahl

**Definition 10.1.** Ist  $G$  ein Graph, so heißt eine Teilmenge  $D \subseteq E(G)$  *Dominanzmenge* von  $G$  oder *dominant* in  $G$ , wenn  $N[D, G] = E(G)$  gilt. Eine Dominanzmenge  $D$  von  $G$  heißt *minimale Dominanzmenge* von  $G$ , wenn es keine Dominanzmenge  $D'$  von  $G$  gibt mit  $|D'| < |D|$ . Ist  $D$  eine minimale Dominanzmenge von  $G$ , so nennt man  $|D| = \gamma = \gamma(G)$  *Dominanzzahl* von  $G$ .

**Satz 10.1.** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt:

- i) Ist  $S$  eine maximale unabhängige Eckenmenge in  $G$ , so ist  $S$  dominant in  $G$ . Daraus folgt  $\gamma(G) \leq \alpha(G)$ .

Besitzt  $G$  zusätzlich keine isolierten Ecken, so gilt weiter:

- ii) Ist  $T$  eine Überdeckung von  $G$ , so ist  $T$  dominant in  $G$ . Damit ergibt sich  $\gamma(G) \leq \beta(G)$ .
- iii) Ist  $S$  eine unabhängige Eckenmenge in  $G$ , so ist  $\bar{S} = E(G) - S$  dominant in  $G$ .
- iv) (Ore [5] 1962) Es ist  $2\gamma(G) \leq n(G)$ .

*Beweis.* i) Es sei  $S$  eine maximale unabhängige Eckenmenge. Wäre  $S$  keine Dominanzmenge von  $G$ , so gäbe es eine Ecke  $a$  mit  $a \notin N[S, G]$ , womit  $S \cup \{a\}$  eine unabhängige Eckenmenge wäre. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $S$ .

ii) Es sei  $T$  eine Überdeckung. Wir wollen zeigen, daß  $N(T) \cup T = E(G)$  gilt. Da  $G$  keine isolierten Ecken und keine Schlingen besitzt, gibt es zu jeder Ecke  $x \in E(G) - T$  eine Kante  $k = xy$  mit  $y \neq x$ . Nach Voraussetzung muß die Kante  $k$  mit einer Ecke aus  $T$  inzidieren. Daraus folgt  $y \in T$ , also  $x \in N(T)$ , womit  $T$  eine Dominanzmenge ist.

iii) Ist  $S$  eine unabhängige Eckenmenge, so ist  $\bar{S}$  nach Satz 9.1 i) eine Überdeckung und damit wegen ii) eine Dominanzmenge.

- iv) Aus i), ii) und Satz 9.1 ii) folgt sofort die Ungleichung von Ore

$$2\gamma(G) = \gamma(G) + \gamma(G) \leq \alpha(G) + \beta(G) = n(G). \quad \parallel$$

Wegen  $2\alpha_0 \leq n$  wird die Ungleichung  $2\gamma \leq n$  von Ore durch die nächste Abschätzung verallgemeinert.

**Satz 10.2 (Cockayne [2] 1978).** Ist  $G$  ein Multigraph ohne isolierte Ecken, so gilt  $\gamma(G) \leq \alpha_0(G)$ .

*Beweis.* Es sei  $T$  ein Waldfaktor von  $G$  ohne isolierte Ecken. Da  $T$  bipartit ist und keine isolierten Ecken besitzt, ergibt sich aus Satz 10.1 ii) und dem Satz von König (Satz 9.3)

$$\gamma(G) \leq \gamma(T) \leq \beta(T) = \alpha_0(T) \leq \alpha_0(G). \quad \parallel$$

Folgende Abschätzung der Dominanzzahl von Payan [1] verbessert die Ungleichung von Ore für  $\delta \geq 3$ .

**Satz 10.3 (Payan [1] 1975).** Ist  $G$  ein schlichter Graph ohne isolierte Ecken, so gilt

$$2\gamma(G) \leq n(G) + 2 - \delta(G).$$

*Beweis.* Es sei  $x \in E(G)$  mit  $d(x) = \delta = \delta(G)$ ,  $B' = E(G) - N[x]$ ,  $I$  die Menge der isolierten Ecken von  $G[B']$  und  $B = B' - I$ . Ist  $A$  eine minimale Dominanzmenge von  $G[B]$ , so gilt nach der Ungleichung von Ore (Satz 10.1)  $|A| \leq \frac{|B|}{2}$ , da  $G[B]$  keine isolierten Ecken besitzt. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

1. *Fall:* Es sei  $I = \emptyset$ . Dann ist  $A \cup \{x\}$  eine Dominanzmenge von  $G$  und daher

$$\gamma(G) \leq |A| + 1 \leq \frac{|B|}{2} + 1 = \frac{n - \delta - 1}{2} + 1 = \frac{n + 1 - \delta}{2}.$$

2. *Fall:* Es sei  $I \neq \emptyset$ . Wählt man eine beliebige Ecke  $y \in N(x)$ , so ist  $A \cup \{x, y\}$  eine Dominanzmenge von  $G$  und daher

$$\gamma(G) \leq \frac{|B|}{2} + 2 = \frac{n - |I| - \delta - 1}{2} + 2 \leq \frac{n - \delta - 2}{2} + 2 = \frac{n + 2 - \delta}{2}.$$

Da wir in beiden Fällen die gewünschte Ungleichung erhalten haben, ist der Satz von Payan bewiesen. ||

Für den Fall  $\delta(G) \geq 2$  gaben McCuaig und Shepherd [1] 1989 folgende Verschärfung der Ungleichung von Ore, die wir hier ohne Beweis und ohne explizite Angabe der Ausnahmegraben – zu denen die Kreise der Länge 4 und 7 gehören – erwähnen wollen.

**Satz 10.4 (McCuaig, Shepherd [1] 1989).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph mit  $\delta(G) \geq 2$ , und gehört  $G$  nicht zu einer Familie von sieben Ausnahmegraben, so gilt

$$\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n(G).$$

Ist  $\delta(G) \geq 3$ , so hat Reed [1] gezeigt, daß man Satz 10.4 weiter verbessern kann. Auch dieses Ergebnis geben wir ohne Beweis an.

**Satz 10.5 (Reed [1] 1996).** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 3$ , so gilt

$$\gamma(G) \leq \frac{3}{8}n(G).$$

Für schlichte und 3-reguläre Graphen  $G$  vermutete Reed [1] sogar die bessere Schranke  $\gamma(G) \leq n(G)/3$ . Diese Vermutung wurde 2005 durch Kostochka und Stodolsky [1] widerlegt, denn sie konstruierten einen zusammenhängenden, schlichten und 3-regulären Graphen  $H$  der Ordnung 60 mit  $\gamma(H) = 21$ .

Nun wollen wir eine Abschätzung der Dominanzzahl herleiten, aus der das Ergebnis von Payan (Satz 10.3) sofort folgt.

**Hilfssatz 10.1 (Flach, Volkmann [2] 1990).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph ohne isolierte Ecken,  $E_0 \subseteq E(G)$  und  $G_0 = G[E_0]$ . Ist  $I_0$  die Menge der isolierten Ecken von  $G - E_0$  und  $G_1 = G[E_0 \cup I_0]$ , so gilt

$$2\gamma(G) \leq n(G) - |E_0| + 2\gamma(G_1) - |I_0|. \quad (10.1)$$

*Beweis.* Es gilt natürlich

$$2\gamma(G) \leq 2\gamma(G_1) + 2\gamma(G - (E_0 \cup I_0)).$$

Da der Teilgraph  $G - (E_0 \cup I_0)$  keine isolierten Ecken besitzt, ergibt sich aus Satz 10.1 iv)

$$2\gamma(G - (E_0 \cup I_0)) \leq n(G) - |E_0| - |I_0|.$$

Die beiden letzten Ungleichungen liefern uns sofort die gewünschte Abschätzung (10.1).  $\parallel$

In vielen Fällen berechnet sich  $\gamma(G_0)$  leichter als  $\gamma(G_1)$ . Daher leiten wir nun eine allgemeine Abschätzung für  $\gamma(G_1) - \gamma(G_0)$  her.

**Hilfssatz 10.2 (Flach, Volkmann [2] 1990).** Setzen wir  $\delta = \delta(G)$ , so gilt mit den Voraussetzungen aus Hilfssatz 10.1

$$\gamma(G_1) - \gamma(G_0) \leq \frac{1}{2} \left( |I_0| + \left\lceil \frac{|N(I_0)|}{\delta} \right\rceil \right). \quad (10.2)$$

*Beweis.* Es sei  $D_0 \subseteq E_0$  eine minimale Dominanzmenge von  $G_0$ , also es gelte  $|D_0| = \gamma(G_0)$ . Nun suchen wir nach einer "kleinen" Teilmenge  $D' \subseteq N(I_0) \subseteq E_0$  mit  $I_0 \subseteq N(D')$ . Haben wir eine solche Teilmenge  $D'$  gefunden, so ist  $D_0 \cup D'$  eine Dominanzmenge von  $G_1$ , also  $\gamma(G_1) \leq |D_0| + |D'|$  und damit

$$\gamma(G_1) - \gamma(G_0) \leq |D'|. \quad (10.3)$$

Im Fall  $I_0 = \emptyset$  gilt natürlich  $G_1 = G_0$  und damit  $\gamma(G_1) - \gamma(G_0) = 0$ , also (10.2). Daher sei im folgenden  $I_0 \neq \emptyset$ .

Wir setzen  $k = \lfloor \frac{|N(I_0)|}{\delta} \rfloor$ , d.h. wir wählen die ganze Zahl  $k$  so, daß  $k\delta \leq |N(I_0)| < (k+1)\delta$  gilt. Weiter sei

$$|I_0| = 2s + t,$$

wobei die Zahlen  $s, t \in \mathbf{N}_0$  durch die folgenden Bedingungen eindeutig festgelegt werden.

- a) Im Fall  $|I_0| \leq k$  setze man  $s = 0$  und  $t = |I_0|$ .
- b) Im Fall  $|I_0| > k$  setze man  $t = k - 1$ , wenn  $|I_0| - k$  ungerade und  $t = k$ , wenn  $|I_0| - k$  gerade ist. Damit gilt dann

$$s = \left\lceil \frac{|I_0| - k}{2} \right\rceil = \frac{|I_0| - t}{2}.$$

Ist  $s > 0$ , so wähle man eine Menge  $I_1 \subseteq I_0$  mit  $|I_1| = k + 1$ . Dann sind mindestens  $\delta(k + 1) > |N(I_0)|$  Kanten inzident mit Ecken aus  $I_1$ . Daher gibt es zwei verschiedene Ecken  $b_1, b_2$  aus  $I_1$ , die zu einer Ecke  $a_1$  aus  $N(I_0)$  adjazent sind. Ist  $s > 1$ , so wiederholen wir diese Überlegung und wählen eine Menge  $I_2 \subseteq I_0 - \{b_1, b_2\}$  mit  $|I_2| = k + 1$ . (Wegen  $|I_0 - \{b_1, b_2\}| = 2(s - 1) + t \geq k + 1$  ist das möglich.) Wir finden zwei neue Ecken  $b_3, b_4$  aus  $I_2$ , die zu einer Ecke  $a_2$  aus  $N(I_0)$  adjazent sind. Wiederholt man diesen Prozeß  $s$  mal, so findet man  $2s$  paarweise verschiedene

Ecken  $b_1, b_2, \dots, b_{2s}$  aus  $I_0$  und Ecken  $a_1, a_2, \dots, a_s$  aus  $N(I_0)$  mit  $b_{2i-1}, b_{2i} \in N(a_i)$  für  $i = 1, 2, \dots, s$ . Für die verbleibenden  $t$  Ecken  $b_{2s+1}, b_{2s+2}, \dots, b_{2s+t}$  aus  $I_0$  wählen wir beliebige adjazente Ecken  $a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_{s+t}$  aus  $N(I_0)$ . (Die Ecken  $a_1, a_2, \dots, a_{s+t}$  müssen keineswegs verschieden sein.) Setzen wir nun  $D' = \{a_1, a_2, \dots, a_{s+t}\}$  so gilt aber  $I_0 \subseteq N(D')$  und

$$\begin{aligned} |D'| &\leq s + t = \frac{|I_0| - t}{2} + t = \frac{1}{2}(|I_0| + t) \\ &\leq \frac{1}{2}(|I_0| + k) = \frac{1}{2} \left( |I_0| + \left\lfloor \frac{|N(I_0)|}{\delta} \right\rfloor \right). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Aus den beiden Ungleichungen (10.3) und (10.4) erhält man die Abschätzung (10.2).  $\parallel$

**Satz 10.6 (Flach, Volkmann [2] 1990).** Ist  $G$  ein schlichter Graph ohne isolierte Ecken,  $\delta = \delta(G)$ ,  $\Delta = \Delta(G)$ ,  $n = n(G)$  und  $A \subseteq E(G)$ , so gilt

$$2\gamma(G) \leq n + |A| - (\delta - 1) \frac{|N(A) - A|}{\delta}, \quad (10.5)$$

$$2\gamma(G) \leq n + 1 - (\delta - 1) \frac{\Delta}{\delta}. \quad (10.6)$$

*Beweis.* Aus (10.1) und (10.2) folgt

$$2\gamma(G) \leq n - |E_0| + 2\gamma(G_0) + \left\lfloor \frac{|N(I_0)|}{\delta} \right\rfloor.$$

Wählt man in dieser Ungleichung speziell  $E_0 = N[A]$ , so gilt  $\gamma(G_0) \leq |A|$  und  $N(I_0) \subseteq N(A) - A$ , und es ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\gamma(G) &\leq n - |N(A) \cup A| + 2|A| + \frac{|N(A) - A|}{\delta} \\ &= n + |A| - |N(A) - A| + \frac{|N(A) - A|}{\delta}, \end{aligned}$$

womit (10.5) bewiesen ist. Wählt man in (10.5) wiederum speziell  $A = \{a\}$  mit  $d(a, G) = \Delta$ , so gilt  $|N(a) - \{a\}| = d(a, G) = \Delta$  und daher (10.6).  $\parallel$

Für schlichte Graphen  $G$  ohne isolierte Ecken folgt aus (10.6)

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{(\delta-1)\Delta}{2\delta} \right\rfloor. \quad (10.7)$$

An Hand von Beispielen wollen wir zeigen, daß es Graphen beliebig hoher Ordnung gibt, für die in (10.7) die Gleichheit gilt, womit (10.7) und damit (10.6) in diesem Sinne bestmöglich sind.

**Beispiel 10.1 (Volkmann [4] 1991).** Es sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $G$  ein Graph der Ordnung  $n = p^2 + p$  mit der Eckenmenge  $E(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_{p^2}, a_1, a_2, \dots, a_p\}$ . Der von der Eckenmenge  $\{x_1, x_2, \dots, x_{p^2}\}$  induzierte Teilgraph sei vollständig, und für alle  $i = 1, 2, \dots, p$  seien die Ecken  $a_i$  nur zu den Ecken  $x_{(i-1)p+1}, \dots, x_{ip}$  adjazent. Für diesen Graphen gilt  $\delta = p$ ,  $\Delta = p^2$  und  $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  ist eine minimale Dominanzmenge. Daraus folgt  $\gamma(G) = p$ , und durch Einsetzen der anderen Größen ergibt sich auf der rechten Seite von (10.7) ebenfalls  $p$ .

Als schöne Anwendung von Satz 10.6 wollen wir eine Abschätzung der Dominanzzahl herleiten, die vom Durchmesser abhängt.

**Satz 10.7 (Volkman [8] 1996).** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung  $n = n(G)$  und dem Minimalgrad  $\delta = \delta(G) \geq 3$ . Ist  $d = \text{dm}(G)$  der Durchmesser von  $G$ , so gilt

$$2\gamma(G) \leq n - (\delta - 2)(1 + \lfloor d/3 \rfloor) \leq n - \frac{d}{3}(\delta - 2).$$

*Beweis.* Es sei  $d = 3t + r$  mit  $0 \leq r \leq 2$  und  $d_G(x_0, x_d) = d$ . Ist  $W = x_0x_1 \dots x_d$  ein Weg der Länge  $d$ , so setze man  $A = \{x_0, x_3, \dots, x_{3t}\}$ . Damit ergibt sich  $|A| = 1 + \lfloor d/3 \rfloor$ ,  $N(A) \cap A = \emptyset$  und

$$|N(A) - A| = |N(A)| = \left| \bigcup_{i=0}^t N(x_{3i}) \right| = \sum_{i=0}^t |N(x_{3i})| \geq \delta |A|.$$

Mit dieser Menge  $A$  folgt aus (10.5)

$$\begin{aligned} 2\gamma(G) &\leq n + |A| - (\delta - 1) \frac{|N(A) - A|}{\delta} \\ &\leq n + |A| - (\delta - 1)|A| = n - (\delta - 2)|A| \\ &= n - (\delta - 2)(1 + \lfloor d/3 \rfloor) \leq n - \frac{d}{3}(\delta - 2). \quad \parallel \end{aligned}$$

Jaeger und Payan [1] 1972 und Payan [1] 1975 gaben einige Abschätzungen der Dominanzzahl im Zusammenhang mit dem Komplementärgraphen. Zwei dieser Ergebnisse wollen wir jetzt vorstellen.

**Satz 10.8 (Payan [1] 1975).** Ist  $G$  ein schlichter Graph,  $\delta = \delta(G)$ ,  $\Delta = \Delta(G)$  und  $n = n(G) \geq 2$ , so gilt

$$\gamma(\overline{G}) \leq \frac{\delta(\Delta - 1)}{n - 1} + 2. \quad (10.8)$$

*Beweis.* Zunächst setzen wir  $E = E(G) = E(\overline{G})$ ,  $N(x) = N(x, G)$  und  $N[x] = N[x, G]$ . Ist  $u$  eine Ecke mit  $d(u, G) = \delta$  und  $x \in N(u)$ , so ist  $\{x\} \cup (N[u] \cap N(x))$  eine Dominanzmenge von  $\overline{G}$ , womit

$$\gamma(\overline{G}) \leq 1 + |N[u] \cap N(x)|$$

für alle  $x \in N(u)$  gilt. Daraus ergibt sich zusammen mit

$$\Delta \geq |N(x) \cap N[u]| + |N(x) \cap (E - N[u])|$$

für alle  $x \in N(u)$  die Abschätzung

$$|N(x) \cap (E - N[u])| \leq \Delta + 1 - \gamma(\overline{G}). \quad (10.9)$$

Wenn  $y \in E - N[u]$  gilt, dann ist auch  $\{u\} \cup \{y\} \cup (N(u) \cap N(y))$  eine Dominanzmenge von  $\overline{G}$ . Daraus folgt für alle  $y \in E - N[u]$

$$\gamma(\overline{G}) - 2 \leq |N(u) \cap N(y)|. \quad (10.10)$$

Aus der Identität

$$\begin{aligned} m_G(N(u), E - N[u]) &= \sum_{x \in N(u)} |N(x) \cap (E - N[u])| \\ &= \sum_{y \in E - N[u]} |N(y) \cap N(u)| \end{aligned}$$

erhält man wegen  $|N(u)| = \delta$  zusammen mit (10.9) und (10.10)

$$(\gamma(\overline{G}) - 2)(n - \delta - 1) \leq \delta(\Delta + 1 - \gamma(\overline{G}))$$

und daraus die gewünschte Ungleichung (10.8). ||

Beachtet man für einen schlichten Graphen  $G$  die beiden Identitäten  $\delta(G) = n(G) - 1 - \Delta(\overline{G})$  und  $\Delta(G) = n(G) - 1 - \delta(\overline{G})$ , so erhält man aus Satz 10.8 sofort

**Folgerung 10.1.** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\gamma(G) \leq \frac{(n(G) - 1 - \Delta(G))(n(G) - 2 - \delta(G))}{n(G) - 1} + 2.$$

**Satz 10.9 (Jaeger, Payan [1] 1972).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 2$ , so gilt

- i)  $3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$ ,
- ii)  $2 \leq \gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}) \leq n$ .

*Beweis.* Ist  $\gamma(G) = 1$  oder  $\gamma(\overline{G}) = 1$ , so folgt  $\gamma(\overline{G}) \geq 2$  oder  $\gamma(G) \geq 2$ . Daraus ergeben sich sofort die unteren Schranken in i) und ii).

Als nächstes beweisen wir die obere Schranke in i). Besitzt  $G$  eine isolierte Ecke, so gilt  $\gamma(\overline{G}) = 1$  und  $\gamma(G) \leq n$  und daher  $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$ . Besitzt  $\overline{G}$  eine isolierte Ecke, so verläuft der Beweis analog. Im verbleibenden Fall, daß weder  $G$  noch  $\overline{G}$  eine isolierte Ecke enthält, folgt aus der Ungleichung von Ore  $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n/2 + n/2 = n$ .

Abschließend beweisen wir die obere Schranke in ii). Ist  $\gamma(G) = 1$ , so ist diese Schranke sicherlich richtig. Sei nun  $\gamma(G) = p \geq 2$ . Ist  $X_i \subseteq E(G)$ , so bedeute im folgenden  $h(X_i)$  die Anzahl der Ecken in  $X_i$ , die mit allen anderen Ecken aus  $X_i$  adjazent sind. Ist  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  eine minimale Dominanzmenge von  $G$ , so wählen wir eine Partition  $E_1, E_2, \dots, E_p \subset E(G)$  von  $G$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Es gilt  $a_i \in E_i$  und  $a_i$  ist zu allen Ecken aus  $E_i$  adjazent für  $i = 1, 2, \dots, p$ .
- (b) Es gilt  $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p = E(G)$  und  $E_i \cap E_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .
- (c) Die Summe  $h(E_1) + h(E_2) + \dots + h(E_p)$  ist maximal.

Wir werden nun zeigen, daß  $E_i$  für jedes  $1 \leq i \leq p$  eine Dominanzmenge von  $\overline{G}$  ist. Angenommen,  $E_s$  ist keine Dominanzmenge von  $\overline{G}$ . Dann existiert ein  $t \neq s$  und eine Ecke  $x \in E_t$ , die in  $\overline{G}$  zu keiner Ecke aus  $E_s$  adjazent ist. Dann ist aber  $x$  in  $G$  zu jeder Ecke aus  $E_s$  adjazent. Im Fall  $x = a_t$  gelangen wir zu dem Widerspruch, daß schon  $D - \{a_s\}$  eine Dominanzmenge von  $G$  ist. Sei nun  $x \in E_t - a_t$ . Ist  $x$  in  $G$  zu allen Ecken aus  $E_t$  adjazent, so ist  $(D - \{a_s, a_t\}) \cup \{x\}$  eine Dominanzmenge von  $G$ , was natürlich nicht möglich ist. Insgesamt haben wir die Situation, daß  $x$  in  $G$  zu allen Ecken aus  $E_s$  aber nicht zu allen Ecken aus  $E_t$  adjazent ist.

Setzen wir  $E'_t = E_t - \{x\}$ ,  $E'_s = E_s \cup \{x\}$  und  $E'_i = E_i$  für  $i \neq s, t$ , so gelangen wir zu einer Partition  $E'_1, E'_2, \dots, E'_p$  von  $G$ , die auch (a) und (b) erfüllt, aber es gilt  $h(E'_1) + h(E'_2) + \dots + h(E'_p) > h(E_1) + h(E_2) + \dots + h(E_p)$ . Dieser Widerspruch zu (c) zeigt, daß  $E_i$  für jedes  $1 \leq i \leq p$  tatsächlich eine Dominanzmenge von  $\overline{G}$  ist, und wir erhalten schließlich

$$n = \sum_{i=1}^p |E_i| \geq \gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}).$$

||



Besitzt weder  $G$  noch  $\overline{G}$  eine isolierte Ecke, so konnten Joseph und Arumugam [1] 1995 die obere Schranke für  $\gamma(G) + \gamma(\overline{G})$  erheblich verbessern.

**Satz 10.10 (Joseph, Arumugam [1] 1995).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 2$ . Hat weder  $G$  noch  $\overline{G}$  eine isolierte Ecke, so gilt

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \frac{n+4}{2}.$$

*Beweis.* Da weder  $G$  noch  $\overline{G}$  eine isolierte Ecke besitzt, folgt aus der Ungleichung von Ore  $\gamma(G) \leq n/2$  und  $\gamma(\overline{G}) \leq n/2$ . Ist  $\gamma(G) = 2$  oder  $\gamma(\overline{G}) = 2$ , so ergibt sich sofort die gewünschte Ungleichung.

Ist  $\gamma(G) \geq 4$  und  $\gamma(\overline{G}) \geq 4$ , so folgt aus Satz 10.9 ii)  $\gamma(G) \leq n/\gamma(\overline{G}) \leq n/4$  und  $\gamma(\overline{G}) \leq n/\gamma(G) \leq n/4$ , also  $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n/2$ .

Im verbleibenden Fall gelte o.B.d.A.  $\gamma(G) = 3$ . Wegen  $3 = \gamma(G) \leq n/2$ , ergibt sich  $n \geq 6$ . Aus Satz 10.9. ii) folgt  $\gamma(\overline{G}) \leq n/\gamma(G) = n/3$  und daher

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq 3 + \frac{n}{3} \leq 2 + \frac{n}{2}. \quad \parallel$$

Im Fall, daß  $\delta(G), \delta(\overline{G}) \geq 2$  gilt, konnten Dunbar, Haynes und Hedetniemi [1] 2005 die bessere Schranke  $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq 2n(G)/5 + 3$  nachweisen. Setzt man sogar  $\delta(G), \delta(\overline{G}) \geq 7$  voraus, so bewiesen Hellwig und Volkmann [6] die Schranke  $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n(G)/3 + 2$ .

**Definition 10.2.** Es sei  $G$  ein Graph und  $C$  ein Kreis minimaler Länge  $L(C)$  von  $G$ . Dann heißt  $t = t(G) = L(C)$  *Tailenweite* von  $G$ . Ist  $G$  ein Wald, so setzt man  $t(G) = \infty$ .

**Satz 10.11 (Brigham, Dutton [1] 1989).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit  $\delta(G) \geq 2$  und Tailenweite  $t \geq 5$ , so gilt

$$\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{3n-t}{6} \right\rceil.$$

*Beweis.* Ist  $C$  ein Kreis der Länge  $L(C) = t$ , so sei  $G' = G - E(C)$ . Wegen der Voraussetzung  $t \geq 5$ , hat jede Ecke aus  $G'$  höchstens einen Nachbarn auf dem Kreis  $C$ . Daraus ergibt sich  $\delta(G') \geq \delta(G) - 1 \geq 1$ , womit nach der Ungleichung von Ore  $\gamma(G') \leq \lfloor \frac{n-t}{2} \rfloor$  gilt. Beachtet man die einfache Abschätzung  $\gamma(C) \leq \lceil \frac{t}{3} \rceil$ , so folgt insgesamt

$$\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n-t}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{3n-t}{6} \right\rceil. \quad \parallel$$

Für Kreise gilt in Satz 10.11 die Gleichheit. In zwei neueren Arbeiten hat Volkmann [20, 21] Satz 10.11 von Brigham und Dutton verbessert.

Ohne Beweis notieren wir noch eine klassische Abschätzungen der Dominanzzahl von Vizing [2].

**Satz 10.12 (Vizing [2] 1965).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\gamma(G) \leq n(G) + 1 - \sqrt{2m(G) + 1}.$$

Vizings Ungleichung wurde 1994 von Fulman [1] verschärft.

## 10.2 Graphenparameter im Vergleich

Ist  $G$  ein Multigraph, so haben wir in Satz 10.1  $\gamma(G) \leq \alpha(G)$  gezeigt und, falls  $G$  keine isolierten Ecken besitzt,  $\gamma(G) \leq \beta(G)$  nachgewiesen. Nun fragten Szamkolowicz [1] 1970 bzw. Laskar und Walikar [1] 1981 nach Graphenklassen, die  $\gamma(G) = \alpha(G)$  bzw.  $\gamma(G) = \beta(G)$  erfüllen.

Im Zusammenhang mit dem zweiten Problem ist die folgende Beobachtung, die ich zusammen mit meinem Schüler Dr. Ulrich Teschner gemacht habe, sehr nützlich.

**Satz 10.13 (Teschner, Volkmann (siehe [8]) 1996).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph mit  $\gamma(G) = \beta(G)$ , so gilt  $\delta(G) \leq 2$ .

*Beweis.* Angenommen, es gilt  $\delta(G) \geq 3$ . Ist  $T$  eine minimale Überdeckung von  $G$ , so ist  $T$  nach Satz 10.1 ii) eine Dominanzmenge und wegen  $\gamma(G) = \beta(G) = |T|$  sogar eine minimale Dominanzmenge von  $G$ . Da  $E(G) - T$  nach Satz 9.1 i) eine unabhängige Eckenmenge ist, gilt  $N(x, G) \subseteq T$  für alle  $x \in E(G) - T$ , und aus  $\delta(G) \geq 3$  folgt zusätzlich  $|N(x, G)| \geq 3$ . Wählen wir drei Ecken  $u, v, w \in N(a, G)$  für ein  $a \in E(G) - T$ , so erkennt man ohne Mühe, daß schon  $(T \cup \{a\}) - \{u, v\}$  eine Dominanzmenge von  $G$  ist, womit wir einen Widerspruch erzeugt haben. ||

**Bemerkung 10.1.** Ist  $C_n$  ein Kreis der Länge  $n \geq 3$ , so überlegt man sich leicht, daß  $\gamma(C_n) = \beta(C_n)$  genau dann gilt, wenn  $n = 4$  ist (man vgl. Aufgabe 10.7).

**Folgerung 10.2 (Volkmann [5] 1994).** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und  $r$ -regulärer ( $r > 0$ ) Graph. Es gilt genau dann  $\gamma(G) = \beta(G)$ , wenn  $G = K_2$  oder  $G = C_4$ .

*Beweis.* Ist  $G = K_2$  oder  $G = C_4$ , so gilt natürlich  $\gamma(G) = \beta(G)$ .

Die Umkehrung erkennt man sofort für  $r = 1$  und wegen Bemerkung 10.1 auch für  $r = 2$ . Da nach Satz 10.13 der Fall  $r \geq 3$  nicht möglich ist, haben wir Folgerung 10.2 vollständig bewiesen. ||

Ermutigt durch Satz 10.13, habe ich zusammen mit meinem Schüler Prof. Dr. Bert Randerath [2] 1998 alle schlichten Graphen  $G$  mit  $\gamma(G) = \beta(G)$  charakterisiert. Wir wollen hier nur den Fall  $\delta(G) = 2$  vorstellen, denn der Fall  $\delta(G) = 1$  ist lang und kompliziert.

**Hilfssatz 10.3 (Randerath, Volkmann [2] 1998).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender, schlichter Graph mit  $\gamma(G) = \beta(G)$  und  $\delta(G) = 2$ . Dann ist  $G$  bipartit, und die kleinere Partitionsmenge ist sowohl eine minimale Dominanzmenge als auch eine minimale Überdeckung von  $G$ .

*Beweis.* Ist  $T$  eine minimale Überdeckung von  $G$ , so ist  $\bar{T} = E(G) - T$  eine unabhängige Eckenmenge, und nach Voraussetzung ist  $T$  auch eine minimale Dominanzmenge. Angenommen, der von  $T$  induzierte Teilgraph  $G[T]$  enthält eine Kante  $uv$ . Dann folgt aber aus  $\delta(G) = 2$ , daß schon  $T - u$  eine Dominanzmenge ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß  $G$  die Bipartition  $T$  und  $\bar{T}$  mit  $|T| \leq |\bar{T}|$  besitzt, womit der Hilfssatz bewiesen ist. ||

**Hilfssatz 10.4 (Randerath, Volkmann [2] 1998).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender, schlichter und bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ , so daß  $\gamma(G) = \beta(G)$  und  $\delta(G) = 2$  gilt. Ist  $|A| \leq |B|$ , so existieren zu jedem Eckenpaar  $x, y \in A$  vom Abstand 2 mindestens zwei gemeinsame Nachbarn von  $x$  und  $y$  vom Grad 2.

*Beweis.* Es seien  $x, y \in A$  zwei Ecken vom Abstand 2 und  $b \in B$  ein gemeinsamer Nachbar. Da  $(A - \{x, y\}) \cup \{b\}$  nach Hilfssatz 10.3 keine Dominanzmenge von  $G$  ist und  $\delta(G) = 2$  gilt, existiert eine Ecke  $u \neq b$  in  $B$  mit  $N(u, G) = \{x, y\}$ . Ist  $d(b, G) = 2$ , so sind wir fertig. Ist aber  $d(b, G) \geq 3$ , so ist auch  $(A - \{x, y\}) \cup \{u\}$  nach Hilfssatz 10.3 keine Dominanzmenge von  $G$ , und daher existiert eine weitere Ecke  $v \neq u$  in  $B$  mit  $N(v, G) = \{x, y\}$ .  $\parallel$

Nun kommen wir zu der angekündigten Charakterisierung der Graphen  $G$  mit  $\delta(G) = 2$ , die  $\gamma(G) = \beta(G)$  erfüllen.

**Satz 10.14 (Randerath, Volkmann [2] 1998).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender und schlichter Graph mit  $\delta(G) = 2$ . Dann gilt  $\gamma(G) = \beta(G)$  genau dann, wenn  $G$  bipartit ist und zu jedem Eckenpaar  $x, y$  vom Abstand 2 in der kleineren Partitionsmenge mindestens zwei gemeinsame Nachbarn von  $x$  und  $y$  vom Grad 2 existieren.

*Beweis.* Ist  $\gamma(G) = \beta(G)$ , so ist  $G$  nach Hilfssatz 10.3 bipartit, und das gewünschte Resultat folgt aus Hilfssatz 10.4.

Umgekehrt sei nun  $G$  bipartit mit der Bipartition  $A, B$ , so daß o.B.d.A.  $|A| \leq |B|$  gilt. Nach Voraussetzung existieren zu jedem Eckenpaar  $x, y \in A$  vom Abstand 2 mindestens zwei gemeinsame Nachbarn von  $x$  und  $y$  vom Grad 2. Natürlich ist  $A$  eine Überdeckung und eine Dominanzmenge von  $G$ . Angenommen,  $A$  ist keine minimale Dominanzmenge. Dann wählen wir eine minimale Dominanzmenge  $D$  von  $G$ , so daß  $D \cap A = A'$  größtmöglich ist. Setzen wir  $A'' = A - A'$  und  $B' = D \cap B$ , so folgt  $1 \leq |B'| < |A''|$ . Die Maximalität von  $|A'|$  zeigt  $|N(b, G) \cap A''| \geq 2$  für alle  $b \in B'$ . Ist  $b \in B'$ , so seien  $a_1, a_2$  zwei verschiedene Ecken aus  $N(b, G) \cap A''$ . Da  $a_1$  und  $a_2$  den Abstand 2 besitzen, gibt es nach Voraussetzung zwei gemeinsame Nachbarn  $b_1$  und  $b_2$  in  $B$  vom Grad 2. Da  $b_1$  und  $b_2$  sogar zu  $B'$  gehören, ist aber  $(D - \{b_1, b_2\}) \cup \{a_1, a_2\}$  auch eine minimale Dominanzmenge, was der Maximalität von  $|A'|$  widerspricht. Daher ist  $A$  eine minimale Dominanzmenge. Da nach Satz 10.1 ii) jede Überdeckung auch eine Dominanzmenge ist, ist  $A$  gleichzeitig eine minimale Überdeckung und damit  $\gamma(G) = \beta(G) = |A|$ .  $\parallel$

Payan und Xuong [1] sowie Fink, Jacobson, Kinch und Roberts [1] haben alle schlichten Graphen  $G$  ohne isolierte Ecken charakterisiert, für die in der Ungleichung von Ore die Gleichheit steht, also  $2\gamma(G) = n(G)$  gilt. Zusammen mit Herrn B. Randerath habe ich einen neuen und kürzeren Beweis dieses Resultats entwickelt, der auf eine interessante Beobachtung von Bollobás und Cockayne [1] zurückgreift.

**Hilfssatz 10.5 (Bollobás, Cockayne [1] 1979).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph ohne isolierte Ecken und  $D$  eine minimale Dominanzmenge, so daß  $m(G[D])$  maximal ist. Dann existiert zu jeder Ecke  $x \in D$  eine Nachbarecke  $p(x)$  in  $(E(G) - D) - N(D - \{x\}, G)$  (ein sogenannter *äußerer privater Nachbar*  $p(x)$  von  $x$  bzgl.  $D$  in  $E(G) - D$ ).

*Beweis.* Angenommen, es existiert in  $D$  eine Ecke  $a$  mit der Eigenschaft  $(N(a, G) \cap (E(G) - D)) - N(D - \{a\}, G) = \emptyset$ . Aufgrund der Minimalität von  $D$  ist  $a$  dann eine isolierte Ecke von  $G[D]$ . Da  $G$  aber keine isolierten Ecken enthält, existiert eine Ecke  $b \in N(a, G) \cap (E(G) - D)$ . Damit ist  $D' = (D - \{a\}) \cup \{b\}$  ebenfalls eine minimale Dominanzmenge von  $G$  mit  $m(G[D']) > m(G[D])$ , was unserer Voraussetzung widerspricht.  $\parallel$

**Satz 10.15 (Payan, Xuong [1] 1982, Fink, Jacobson, Kinch, Roberts[1]1985).** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $2q$ . Es gilt genau dann

$\gamma(G) = q$ , wenn  $G = C_4$  oder  $G = H \circ K_1$  ist, wobei  $H$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $q$  bedeutet.

*Beweis.* Ist  $G = C_4$  oder  $G = H \circ K_1$ , so gilt  $\gamma(G) = q$ .

Sei nun  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $2q$  mit  $\gamma(G) = q$ . Ist  $q = 1$ , so gilt  $G = K_2 = K_1 \circ K_1$ , und ist  $q = 2$ , so gilt  $G = K_2 \circ K_1$  oder  $G = C_4$ . Im Fall  $q \geq 3$  wählen wir eine minimale Dominanzmenge  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ , so daß  $m(G[D])$  maximal ausfällt. Ist  $F = \{p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_q)\}$  die Menge der äußeren privaten Nachbarn in  $E(G) - D$  aus Hilfssatz 10.5, so gilt  $E(G) = D \cup F$  und  $a_i$  ist nicht adjazent zu  $p(a_j)$  für  $i \neq j$ . Angenommen, in  $G[F]$  existiert eine Kante  $k$ , und es gelte o.B.d.A.  $k = p(a_1)p(a_2)$ . Sind  $a_1$  und  $a_2$  Ecken von  $G$ , so ist  $D' = \{p(a_1), p(a_2), a_3, \dots, a_q\}$  eine minimale Dominanzmenge mit  $m(G[D']) > m(G[D])$ , was der Maximalität von  $m(G[D])$  widerspricht. Daher ist  $a_1$  oder  $a_2$  zu einer Ecke  $a_i$  adjazent. Ist  $i \geq 3$  und o.B.d.A.  $a_1$  adjazent zu  $a_i$ , so ist  $D'' = (D - \{a_1, a_2\}) \cup \{p(a_2)\}$  im Widerspruch zu  $\gamma(G) = q$  eine Dominanzmenge. Das bedeutet aber, daß  $a_1$  und  $a_2$  adjazent sind. Wegen des Zusammenhangs von  $G$  und der Voraussetzung  $q \geq 3$  ist dann o.B.d.A.  $p(a_1)$  zu einer Ecke  $p(a_j)$  mit  $j \geq 3$  adjazent. Nun ist  $D^* = (D - \{a_1, a_j\}) \cup \{p(a_j)\}$  eine Dominanzmenge in  $G$  mit  $|D^*| < |D|$ , was der Minimalität von  $|D|$  widerspricht. Insgesamt haben wir nachgewiesen, daß  $G[F]$  ein Nullgraph ist,  $H = G[D]$  zusammenhängend sein muß und  $G = H \circ K_1$  gilt.  $\parallel$

**Bemerkung 10.2.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $2q$  ohne isolierte Ecken mit  $\gamma(G) = q$ . Dann gilt nach Satz 10.1 i), ii) und Satz 9.1 ii) von Gallai sogar  $\gamma(G) = \alpha(G) = \beta(G) = q$ .

Unabhängig voneinander haben 1998 Randerath und Volkmann [2] sowie 2000 Xu, Cockayne, Haynes, Hedetniemi und Zhou [1] alle schlichten Graphen ungerader Ordnung  $n$  mit  $2\gamma = n - 1$  charakterisiert.

Als erste Anwendung von Satz 10.15 wollen wir eine Verschärfung von Satz 10.3 herleiten, die Payan [1] ohne Beweis angegeben hat.

**Satz 10.16 (Payan [1] 1975).** Ist  $G$  ein zusammenhängender, schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 1$ , der nicht isomorph zum Komplement eines 1-regulären Graphen ist, so gilt

$$2\gamma(G) \leq n(G) + 1 - \delta(G). \tag{10.11}$$

*Beweis* (Volkmann [23] 2006). Ist  $\delta(G) = 1$ , so folgt die gewünschte Ungleichung aus dem Satz von Ore (Satz 10.1).

Nun sei  $\delta = \delta(G) \geq 2$ ,  $\gamma = \gamma(G)$ ,  $n = n(G)$  und  $x \in E(G)$  mit  $d(x) = \delta$ . Weiter sei  $I$  die Menge der isolierten Ecken im Teilgraphen  $G - N[x]$  und  $B = G - (N[x] \cup I)$ .

Ist  $I = \emptyset$ , so ergibt sich die gewünschte Schranke aus dem Satz von Ore wie folgt:

$$\gamma \leq 1 + \frac{|E(B)|}{2} = \frac{2 + n - \delta - 1}{2} = \frac{n + 1 - \delta}{2}.$$

Ist  $|I| \geq 1$ , so dominiert  $\{x, y\}$  alle Ecken der Eckenmenge  $N[x] \cup I$  für jedes  $y \in N(x)$ .

Ist  $|I| \geq 2$ , so ergibt sich die gewünschte Schranke wieder aus dem Satz von Ore wie folgt:

$$\gamma \leq 2 + \frac{|E(B)|}{2} = \frac{4 + n - \delta - 1 - |I|}{2} \leq \frac{n + 1 - \delta}{2}.$$

Nun diskutieren wir den Fall  $|I| = 1$ . Ist  $B = \emptyset$ , so gilt  $\delta = n - 2$ . Im Fall  $\Delta(G) = n - 1$  gilt  $\gamma = 1$  und (10.11) ist bewiesen. Im verbleibenden Fall  $\Delta(G) = \delta = n - 2$ , ist  $G$  isomorph zum Komplement eines 1-regulären Graphen.

Ist  $B \neq \emptyset$  und  $\gamma(B) \leq (|E(B)| - 1)/2$ , so gilt

$$\gamma \leq 2 + \frac{|E(B)| - 1}{2} = \frac{4 + n - \delta - 2 - 1}{2} = \frac{n + 1 - \delta}{2}$$

und die gewünschte Ungleichung (10.11) ist bewiesen.

Wegen des Satzes von Ore verbleibt der Fall  $B \neq \emptyset$  und  $\gamma(B) = |E(B)|/2$ . Wendet man nun Satz 10.15 an, so erkennt man, daß die Komponenten von  $B$  Kreise der Länge 4 oder Koronagraphen  $H \circ K_1$  sind, wobei  $H$  ein zusammenhängender Graph ist.

Als erstes nehmen wir an, daß der Teilgraph  $B$  eine Komponente  $H \circ K_1$  besitzt mit  $E(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$  und  $\Gamma(H \circ K_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ , so daß  $s \geq 2$  und  $u_i v_i \in K(H \circ K_1)$  für  $i = 1, 2, \dots, s$  gilt. Wegen  $\delta \geq 2$  existiert eine Kante  $y v_1$  in  $G$  mit  $y \in N(x)$ . Daher dominiert  $\{x, y, u_2, u_3, \dots, u_s\}$  die Eckenmenge  $N[x] \cup I \cup E(H \circ K_1)$ . Ist  $R = G - (N[x] \cup I \cup E(H \circ K_1))$ , so liefert der Satz von Ore

$$\gamma \leq s + 1 + \frac{|E(R)|}{2} = \frac{2s + 2 + n - \delta - 2 - 2s}{2} = \frac{n - \delta}{2}$$

und damit die gewünschte Ungleichung (10.11).

Als zweites nehmen wir an, daß  $B$  eine Komponente  $K_1 \circ K_1 = K_2$  mit der Eckenmenge  $\{u, v\}$  besitzt. Dann ist  $u$  adjazent zu  $\delta - 1$  Ecken  $y_1, y_2, \dots, y_{\delta-1} \in N(x)$ . Ist  $y_\delta$  die verbleibende Ecke aus  $N(x)$ , so dominiert  $\{u, y_\delta\}$  die Eckenmenge  $N[x] \cup I \cup \{u, v\}$ , und mit  $R = G - (N[x] \cup I \cup \{u, v\})$  ergibt sich (10.11) wie folgt:

$$\gamma \leq 2 + \frac{|E(R)|}{2} = \frac{4 + n - \delta - 4}{2} = \frac{n - \delta}{2}$$

Als drittes und letztes nehmen wir an, daß  $B$  eine Komponente besitzt, die aus einem Kreis  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$  der Länge 4 besteht. Wegen des Zusammenhangs von  $G$  existiert eine Kante, sagen wir  $y v_1 \in K(G)$ , mit  $y \in N(x)$ . Nun dominiert  $\{x, y, v_3\}$  die Eckenmenge  $N[x] \cup I \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , und mit  $R = G - (N[x] \cup I \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$  ergibt sich (10.11) wie folgt:

$$\gamma \leq 3 + \frac{|E(R)|}{2} = \frac{6 + n - \delta - 6}{2} = \frac{n - \delta}{2}$$

Da wir alle möglichen Fälle diskutiert haben, ist Satz 10.16 vollständig bewiesen. ||

Ohne Beweis notieren wir noch folgende Verschärfung von Satz 10.16, dessen Beweis fürchterlich lang ist.

**Satz 10.17 (Volkman [23] 2006).** Ist  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $n$  mit  $\delta(G) \geq 2$ , so gilt

$$\gamma(G) \leq \frac{n - \delta(G)}{2},$$

außer  $G$  ist ein vollständiger Graph oder  $n - 3 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq n - 2$  oder  $G$  gehört zu einer Familie von 20 weiteren Ausnahmegrphen.

Borowiecki [1] hat 1975 alle Bäume  $T$  mit  $\gamma(T) = \alpha(T)$  bestimmt. Wir wollen hier sogar alle schlichten und bipartiten Graphen mit dieser Eigenschaft charakterisieren.

**Satz 10.18 (Topp, Volkman [1] 1990).** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und bipartiter Graph. Es gilt genau dann  $\gamma(G) = \alpha(G)$ , wenn  $G = K_1$ ,  $G = C_4$  oder  $G = H \circ K_1$  ist, wobei  $H$  ein schlichter, zusammenhängender und bipartiter Graph bedeutet.



*Beweis.* Ist  $G$  einer der drei im Satz angegebenen Graphen, so gilt natürlich  $\gamma(G) = \alpha(G)$ .

Nun sei umgekehrt  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und bipartiter Graph mit  $\gamma(G) = \alpha(G)$  und  $G$  weder der  $K_1$  noch der  $C_4$ . Ist  $E_1, E_2$  eine Bipartition von  $E(G)$ , so ist jede dieser beiden Mengen sowohl unabhängig als auch dominant. Daraus folgt

$$\alpha(G) \geq \max\{|E_1|, |E_2|\} \geq \min\{|E_1|, |E_2|\} \geq \gamma(G),$$

woraus sich  $\gamma(G) = |E_1| = |E_2| = \alpha(G) = q$  und  $n(G) = 2q$  ergibt. Nach Satz 10.15 existiert dann ein schlichter und zusammenhängender Graph  $H$  der Ordnung  $q$ , so daß  $G = H \circ K_1$  gilt. Da  $G$  bipartit ist, muß auch  $H$  diese Eigenschaften besitzen.  $\parallel$

**Folgerung 10.3 (Borowiecki [1] 1975).** Es sei  $T$  ein Baum. Es ist genau dann  $\gamma(T) = \alpha(T)$ , wenn  $T = K_1$  oder  $T = H \circ K_1$  für einen beliebigen Baum  $H$  gilt.

Die Bedingung, daß für einen schlichten Graphen  $G = H \circ K_1$  gilt, ist äquivalent dazu, daß jede Ecke von  $G$  zu genau einem Simplex der Ordnung 2 von  $G$  gehört. In Hinblick auf weitere Graphenklassen für die das erste Charakterisierungsproblem  $\gamma = \alpha$  gelöst werden kann, betrachten wir im folgenden die Klasse der schlichten Graphen, für die jede Ecke zu genau einem Simplex gehört. Diese Graphen  $G$  lassen sich vollständig mittels der Parameter  $\alpha(G)$  und  $\theta(G)$  sowie dem Potenzgraphen  $G^2$  charakterisieren.

**Hilfssatz 10.6.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph. Sind  $S_1, S_2, \dots, S_q$  verschiedene Simplizes von  $G$  mit  $E(G) = \bigcup_{i=1}^q E(S_i)$ , so existiert kein weiterer Simplex in  $G$ .

*Beweis.* Angenommen, es gibt einen weiteren Simplex  $H$  in  $G$ . Wegen  $E(G) = \bigcup_{i=1}^q E(S_i)$  liegt jede Ecke von  $H$  dann in mindestens zwei Simplizes, womit  $H$  aber kein Simplex sein kann.  $\parallel$

**Hilfssatz 10.7.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\gamma(G) = \theta(G)$  und  $\mathcal{H}$  eine minimale Cliquerzerlegung von  $G$ , so ist jede Clique  $H \in \mathcal{H}$  gesättigt.

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_q\}$  eine minimale Cliquerzerlegung von  $G$ . Im Fall  $q = 1$  gibt es nichts zu beweisen. Ist  $q \geq 2$ , so sei o.B.d.A.  $H_q$  nicht gesättigt. Dann existiert eine Ecke  $v \in E(G) - E(H_q)$  mit  $E(H_q) \subseteq N(v, G)$ . Ist nun  $D$  eine Eckenmenge, die  $v$  enthält mit  $|E(H_i) \cap D| = 1$  für  $i = 1, 2, \dots, q-1$  und  $|E(H_q) \cap D| = 0$ , so ist  $D$  aber im Widerspruch zu  $\gamma(G) = q$  eine Dominanzmenge von  $G$  mit  $|D| = q-1$ .  $\parallel$

**Bemerkung 10.3.** Da die abgeschlossene Nachbarschaft  $N[v, G]$  einer beliebigen Ecke  $v$  eines schlichten Graphen  $G$  in  $G^2$  einen vollständigen Teilgraphen induziert, gilt  $\theta(G^2) \leq \gamma(G)$ . Kombiniert man diese Ungleichung mit denen aus den Sätzen 10.1 i) und 9.13 i), so ergibt sich die folgende Ungleichungskette

$$\alpha(G^2) \leq \theta(G^2) \leq \gamma(G) \leq \alpha(G) \leq \theta(G). \quad (10.12)$$

Der nächste Satz liefert eine Charakterisierung der schlichten Graphen  $G$  mit  $\alpha(G^2) = \theta(G)$ .

**Satz 10.19 (Randerath, Volkmann [1] 1997).** Für einen schlichten Graphen  $G$  sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- i) Jede Ecke von  $G$  gehört zu genau einem Simplex von  $G$ .
- ii) Es gilt  $\alpha(G^2) = \alpha(G)$ .

- iii) Es gilt  $\theta(G^2) = \theta(G)$ .
- iv) Es gilt  $\alpha(G^2) = \theta(G^2) = \gamma(G) = \alpha(G) = \theta(G)$ .

*Beweis.* Aus iv) folgen natürlich ii) und auch iii).

Aus i) folgt iv). Aus i) folgt, daß alle Simplizes  $S_1, S_2, \dots, S_q$  von  $G$  eckendisjunkt sind und  $E(G) = \dot{\cup}_{i=1}^q E(S_i)$  gilt, womit  $S_1, S_2, \dots, S_q$  eine Cliquenzersetzung von  $G$  ist, also  $\theta(G) \leq q$  gilt. Nun sei  $S^*$  eine Eckenmenge von  $G$ , welche genau eine simpliziale Ecke aus jedem Simplex von  $G$  enthält. Sind  $v$  und  $w$  zwei verschiedene Ecken aus  $S^*$ , so gilt  $N[v, G] \cap N[w, G] = \emptyset$ , also  $d_G(v, w) > 2$ . Folglich ist die Eckenmenge  $S^*$  in  $G^2$  unabhängig und daher gilt  $\theta(G) \leq q = |S^*| \leq \alpha(G^2)$ . Zusammen mit (10.12) erhält man  $\alpha(G^2) = \theta(G^2) = \gamma(G) = \alpha(G) = \theta(G)$ .

Aus ii) folgt i). Es sei  $I$  eine unabhängige Eckenmenge in  $G^2$  mit  $|I| = \alpha(G^2)$ . Dann gilt  $N[v, G] \cap N[w, G] = \emptyset$  für zwei verschiedene Ecken  $v, w \in I$ . Die Eckenmenge  $I$  ist ebenfalls in  $G$  unabhängig und wegen  $|I| = \alpha(G^2) = \alpha(G)$  eine maximale unabhängige Eckenmenge in  $G$ . Daher ist  $I$  auch eine Dominanzmenge von  $G$ , woraus sich insgesamt  $E(G) = \dot{\cup}_{v \in I} N[v, G]$  ergibt. Nun zeigen wir, daß  $S_v = G[N[v, G]]$  für jedes  $v \in I$  ein Simplex ist. Zunächst einmal ist  $S_v$  eine Clique, denn gibt es in  $S_v$  zwei zueinander nicht adjazente Ecken  $x$  und  $y$ , so ist  $(I - \{v\}) \cup \{x, y\}$  eine unabhängige Eckenmenge in  $G$ , was der Maximalität von  $|I|$  widerspricht. Selbstverständlich ist  $S_v$  eine gesättigte Clique mit der simplizialen Ecke  $v$ . Da es nach Hilfssatz 10.6 keine weiteren Simplizes gibt, liegt jede Ecke von  $G$  in genau einem Simplex  $S_v$ .

Aus iii) folgt i). Ist  $\theta(G^2) = \theta(G)$ , so folgt aus (10.12)  $\gamma(G) = \theta(G) = q$ . Daher existiert nach Hilfssatz 10.7 eine aus gesättigten Cliques bestehende minimale Cliquenzersetzung  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_q\}$ , womit  $E(G) = \dot{\cup}_{i=1}^q E(H_i)$  gilt. Wegen Hilfssatz 10.6 genügt es nachzuweisen, daß jede Clique  $H \in \mathcal{H}$  ein Simplex von  $G$  ist. Im Fall  $q = 1$  ist  $H_1$  ein Simplex. Im Fall  $q \geq 2$  nehmen wir an, daß eine Clique, sagen wir  $H_q$ , kein Simplex von  $G$  ist. Dann ist jede Ecke  $v \in H_q$  adjazent zu einer Ecke  $w \notin H_q$ . Nun haben je zwei Ecken  $x, y$  des induzierten Teilgraphen  $S_i = G[E(H_i) \cup (N(E(H_i), G) \cap E(H_q))]$  für  $i = 1, 2, \dots, q-1$  von  $G$  die Eigenschaft  $d_G(x, y) \leq 2$ , und es gilt  $\dot{\cup}_{i=1}^{q-1} E(S_i) = E(G)$ . Daraus ergibt sich der Widerspruch  $q-1 \geq \theta(G^2) = \theta(G) = q$ , womit der Beweis von Satz 10.19 vollständig ist.  $\parallel$

**Definition 10.3.** Ein Graph heißt  $C_4$ -frei, falls er keinen Kreis der Länge 4 als induzierten Teilgraphen enthält.

**Hilfssatz 10.8.** Es sei  $G$  ein schlichter und  $C_4$ -freier Graph mit einer gesättigten Clique  $H$ . Dann ist  $H$  entweder ein Simplex von  $G$ , oder es existiert eine unabhängige Eckenmenge  $S \subseteq E(G) - E(H)$  mit der Eigenschaft  $E(H) \subseteq N(S, G)$ .

*Beweis.* Ist  $H$  kein Simplex von  $G$ , so gilt  $E(H) \subseteq N(E(G) - E(H), G)$ . Sei nun  $S$  eine Teilmenge von  $E(G) - E(H)$ , so daß  $E(H) \subseteq N(S, G)$  und der durch  $S$  induzierte Teilgraph  $G[S]$  minimale Größe  $m(G[S])$  besitzt. Angenommen,  $G[S]$  enthält eine Kante  $k = ab$ . Aufgrund der Wahl von  $S$  existiert eine Ecke  $u \in (N(a, G) \cap E(H)) - N(b, G)$  und eine Ecke  $v \in (N(b, G) \cap E(H)) - N(a, G)$ . Hieraus folgt, daß die Eckenmenge  $\{a, b, v, u\}$  im Widerspruch zur Voraussetzung in  $G$  einen  $C_4$  induziert. Damit ist  $S$  eine unabhängige Eckenmenge. Da, im Fall, daß  $H$  ein Simplex ist, keine solche unabhängige Eckenmenge existieren kann, ist der Hilfssatz bewiesen.  $\parallel$

Mittels des Satzes 10.19 und der letzten drei Hilfssätze werden wir den nächsten Satz beweisen, der auch aus einem allgemeineren Ergebnis von Dean und Zito [1] aus dem Jahre



1994 gefolgert werden kann.

**Satz 10.20.** Es sei  $G$  ein schlichter und  $C_4$ -freier Graph mit  $\alpha(G) = \theta(G)$ . Es gilt genau dann  $\gamma(G) = \alpha(G)$ , wenn jede Ecke von  $G$  zu genau einem Simplex von  $G$  gehört.

*Beweis.* Falls jede Ecke von  $G$  zu genau einem Simplex von  $G$  gehört, so folgt aus Satz 10.19  $\gamma(G) = \alpha(G)$ .

Gilt umgekehrt  $\gamma(G) = \alpha(G)$ , so ist nach Voraussetzung  $\gamma(G) = \theta(G) = q$ , womit nach Hilfssatz 10.7 eine aus gesättigten Cliques bestehende minimale Cliquerlegung  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_q\}$  existiert. Wegen Hilfssatz 10.6 verbleibt noch zu zeigen, daß jede Clique  $H_i \in \mathcal{H}$  mit  $i = 1, 2, \dots, q$  ein Simplex von  $G$  ist. Angenommen,  $H_q$  ist kein Simplex von  $G$ . Dann gibt es nach Hilfssatz 10.8 eine unabhängige Eckenmenge  $S \subseteq E(G) - E(H_q)$  mit  $E(H_q) \subseteq N(S, G)$ . Daher gilt  $|E(H_i) \cap S| \leq 1$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q-1$ , und es existiert eine Obermenge  $D$  von  $S$  mit  $|E(H_i) \cap D| = 1$  für  $i = 1, 2, \dots, q-1$  und  $|E(H_q) \cap D| = 0$ . Die Eckenmenge  $D$  ist aber im Widerspruch zu  $\gamma(G) = q$  eine Dominanzmenge von  $G$  mit  $|D| = q-1$ . ||

Da jeder triangulierte Graph  $G$  natürlich  $C_4$ -frei ist und nach Satz 9.16 die Bedingung  $\alpha(G) = \theta(G)$  erfüllt, folgt das nächste Resultat unmittelbar aus dem letzten Satz.

**Folgerung 10.4 (Prisner, Topp, Vestergaard [1] 1996).** Ist  $G$  ein schlichter und triangulierter Graph, so gilt genau dann  $\gamma(G) = \alpha(G)$ , wenn jede Ecke von  $G$  zu genau einem Simplex von  $G$  gehört.

Da jeder Blockgraph ein triangulierter Graph ist, ergibt sich aus Folgerung 10.4 eine Charakterisierung der Blockgraphen  $G$ , die  $\gamma(G) = \alpha(G)$  erfüllen.

**Folgerung 10.5 (Topp, Volkmann [1] 1990).** Es sei  $G$  ein Blockgraph und  $B_1, B_2, \dots, B_t$  diejenigen Blöcke von  $G$ , die mindestens eine Ecke besitzen, die keine Schnittecke von  $G$  ist. Es gilt genau dann  $\gamma(G) = \alpha(G)$ , wenn  $E(G)$  aus der disjunkten Vereinigung von  $E(B_1), E(B_2), \dots, E(B_t)$  besteht.

Weitere Ergebnisse über die Dominanzzahl findet man in den Übersichtsartikeln von Cockayne und S. Hedetniemi [2] 1977 sowie Laskar und Walikar [1] 1981, in den Arbeiten von Cockayne, Favaron, Payan und Thomason [1] 1981, Favaron [2] 1986, Finbow, Hartnell und Nowakowski [1] 1988, Harary und Livingston [1] 1986, Topp und Volkmann [2] 1991, Brigham und Dutton [2] 1991, Goddard, Henning und Swart [1] 1992, Bacsò und Tuza [1] 1993, Cockayne und Mynhardt [1] 1993, Volkmann [7], Harary und Haynes [1] 1996 sowie I. Zverovich und V. Zverovich [1] 1995 und in den Dissertationen meiner Schüler Dr. Ulrich Teschner [1] 1995, Prof. Dr. Dieter Rautenbach [1] 1998 und Dr. Miranca Fischermann [1] 2002.

## 10.3 Minimale Dominanzmengen in Blockgraphen

Zur Bestimmung minimaler Dominanzmengen ist kein polynomialer Algorithmus bekannt. Auch dieses Problem ist NP-vollständig. Daher wollen wir für einige spezielle Graphen Verfahren herleiten, mit denen man in polynomialer Zeit minimale Dominanzmengen findet. Dafür ist es günstig, den Begriff der Dominanzmenge etwas allgemeiner zu fassen.

**Definition 10.4.** Es sei  $G$  ein Graph und  $X \subseteq E(G)$ . Eine Menge  $D \subseteq E(G)$  heißt  $X$ -Dominanzmenge von  $G$ , wenn  $X \subseteq N[D, G] = N[D]$  gilt. Eine  $X$ -Dominanzmenge

$D$  heißt *minimale  $X$ -Dominanzmenge* von  $G$ , wenn es keine  $X$ -Dominanzmenge  $D'$  von  $G$  gibt mit  $|D'| < |D|$ . Ist  $D$  eine minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G$ , so wird durch  $|D| = \text{glssymb} : 117$  die  *$X$ -Dominanzzahl* von  $G$  definiert.

**Satz 10.21 (Reduktionssatz, Volkmann [3] 1990).** Es sei  $G$  ein Graph,  $X \subseteq E(G)$ ,  $x \in X$  und  $v \in E(G)$  mit

$$N[N[x, G], G] \cap X \subseteq N[v, G]. \quad (10.13)$$

Ist  $X' = X - N[v, G]$  und  $D'$  eine minimale  $X'$ -Dominanzmenge von  $G$ , so ist  $D' \cup \{v\}$  eine minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G$ .

*Beweis.* Ist  $D_0$  eine beliebige minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G$ , so gilt  $D_0 \cap N[x, G] \neq \emptyset$ . Für jede Ecke  $y \in D_0 \cap N[x, G]$  ist wegen (10.13) auch  $D = (D_0 - \{y\}) \cup \{v\}$  eine minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G$  mit  $v \in D$ . Weiter ist  $D - \{v\}$  eine  $X'$ -Dominanzmenge von  $G$  und  $D' \cup \{v\}$  eine  $X$ -Dominanzmenge von  $G$  mit  $v \notin D'$ . Daraus ergibt sich

$$\gamma(G, X) \leq |D' \cup \{v\}| = \gamma(G, X') + 1 \leq |D - \{v\}| + 1 = \gamma(G, X),$$

womit  $D' \cup \{v\}$  eine minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G$  ist. ||

**Folgerung 10.6.** Ist  $G$  ein Graph und  $X \subseteq E(G)$ , so kann man den Reduktionssatz prinzipiell wie folgt anwenden.

Für alle  $x \in X$  teste man, ob eine Ecke  $v \in E(G)$  existiert, die die Bedingung (10.13) erfüllt. Hat man zwei solche Ecken  $x$  und  $v$  gefunden, so kann man wegen des Reduktionssatzes dieses Verfahren mit der Eckenmenge  $X' = X - N[v, G]$  fortsetzen. Findet man keine zwei Ecken, die (10.13) erfüllen, so läßt sich der Reduktionssatz nicht weiter anwenden.

Sowohl für praktische Verfahren als auch für theoretische Untersuchungen ist häufig folgende Beobachtung sehr nützlich.

**Hilfssatz 10.9 (Volkmann [3] 1990).** Es sei  $G$  ein Graph,  $X \subseteq E(G)$  und  $Y = E(G) - X$ . Ist  $y \in Y$  mit

$$|N(y, G) \cap X| \leq 1, \quad (10.14)$$

und ist  $D$  eine minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G - y$ , so ist  $D$  auch eine minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G$ .

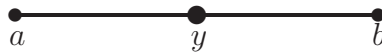
*Beweis.*  $D$  ist natürlich eine  $X$ -Dominanzmenge von  $G$ . Angenommen, es gibt in  $G$  eine minimale  $X$ -Dominanzmenge  $D_0$  mit  $|D_0| < |D|$ . Dann gilt notwendig  $y \in D_0$ . Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

1. *Fall:* Es gilt  $N(y, G) \cap X = \emptyset$ . Unter dieser Bedingung ist schon  $D_0 - y$  eine  $X$ -Dominanzmenge von  $G$ , was der Minimalität von  $|D_0|$  widerspricht.

2. *Fall:* Es gilt  $|N(y, G) \cap X| = 1 = |\{x\}|$ . Dann ist aber auch die Menge  $D_1 = (D_0 - y) \cup \{x\}$  eine  $X$ -Dominanzmenge von  $G - y$  mit  $|D_1| = |D_0| < |D|$ . Dies bedeutet einen Widerspruch zu der Voraussetzung, daß  $D$  eine minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G - y$  ist.

Da es wegen der Bedingung (10.14) keine weiteren Fälle gibt, haben wir den Hilfssatz 10.9 vollständig bewiesen. ||

Der skizzierte Graph  $G$  zeigt uns, daß man die Bedingung (10.14) aus Hilfssatz 10.9 im allgemeinen nicht abschwächen kann.



Denn setzt man  $X = \{a, b\}$ , so gilt  $|N(y, G) \cap X| = 2$ , und die Menge  $\{a, b\}$  ist eine minimale  $X$ -Dominanzmenge von  $G - y$  aber offensichtlich nicht von  $G$ .

Aus dem Reduktionssatz und dem Hilfssatz 10.9 leiten wir nun einen effizienten Algorithmus her, der uns für alle Blockgraphen eine minimale Dominanzmenge liefert.

## 10. Algorithmus

### Algorithmus zur Bestimmung minimaler Dominanzmengen in Blockgraphen

Es sei  $G$  ein Blockgraph und  $Y \subseteq E(G)$ .

1. Man setze  $X = Y$  und  $D = \emptyset$ .
2. Ist  $X = \emptyset$ , so stoppe man den Algorithmus, denn dann ist  $D$  eine minimale  $Y$ -Dominanzmenge von  $G$ .  
Ist  $X \neq \emptyset$ , so gehe man zu 3.
3. Man suche einen beliebigen Endblock  $B$  von  $G$ .  
Existiert eine Ecke  $x \in E(B) \cap X$ , die keine Schmittecke von  $G$  ist, so gehe man zu 5.  
Existiert keine solche Ecke  $x$ , so gehe man zu 4.
4. Gibt es im Endblock  $B$  keine Schmittecke von  $G$ , so setze man  $G = G - E(B)$  und gehe zu 3.  
Im anderen Fall sei  $v$  die eindeutig bestimmte Schmittecke von  $G$  im Endblock  $B$ . Dann setze man  $G = G - (E(B) - \{v\})$  und gehe zu 3.
5. Gibt es in  $B$  eine Schmittecke  $v$  von  $G$ , so setze man  $D = D \cup \{v\}$ ,  $X = X - N[v, G]$  und gehe zu 2.  
Gibt es in  $B$  keine Schmittecke von  $G$ , so wähle man eine beliebige Ecke  $v$  in  $B$ , setze  $D = D \cup \{v\}$ ,  $X = X - N[v, G]$  und gehe zu 2.

*Beweis.* Nach Folgerung 8.2 kann der 3. Schritt immer ausgeführt werden. Im 4. Schritt wird der aktuelle Graph  $G$  so reduziert, daß einerseits wieder ein Blockgraph entsteht und andererseits Hilfssatz 10.9 zum Tragen kommt. Daher bleibt im 4. Schritt die Menge  $X$  erhalten.

Im 5. Schritt gilt nach Konstruktion

$$N[N[x, G], G] \cap X \subseteq N[v, G],$$

womit der Reduktionssatz anwendbar ist. Daher ist beim Abbruch des Algorithmus die aktuelle Eckenmenge  $D$  eine minimale  $Y$ -Dominanzmenge von  $G$ . ||

Im Jahre 1975 gaben Cockayne, Goodman und Hedetniemi [1] einen guten Algorithmus zur Bestimmung minimaler Dominanzmengen in Bäumen. Da jeder Baum ein Blockgraph ist, kann man den 10. Algorithmus als eine Verallgemeinerung dieses Resultats auffassen. Darüber hinaus gibt es effiziente Algorithmen für Kaktusgraphen von Hedetniemi, Laskar und Pfaff [1] 1986, für Block-Kaktusgraphen von Volkmann [10] 1992 (ist in einem Graphen jeder Block ein Kreis oder ein vollständiger Graph, so liegt ein Block-Kaktusgraph vor) sowie für stark triangulierte Graphen (eine Teilklasse der triangulierten Graphen, die auch die Blockgraphen umfaßt) von Farber [1] 1984.

## 10.4 $k$ -Dominanzmengen

**Definition 10.5.** Es sei  $G$  ein Graph und  $k \in \mathbf{N}$ . Eine Menge  $D \subseteq E(G)$  heißt  $k$ -Dominanzmenge von  $G$ , wenn  $|N(x, G) \cap D| \geq k$  für alle  $x \in E(G) - D$  gilt. Eine  $k$ -Dominanzmenge  $D$  heißt *minimale  $k$ -Dominanzmenge* von  $G$ , wenn es keine  $k$ -Dominanzmenge  $D'$  von  $G$  mit  $|D'| < |D|$  gibt. Ist  $D$  eine minimale  $k$ -Dominanzmenge von  $G$ , so wird die  $k$ -Dominanzzahl durch  $\gamma_k(G) = |D|$  definiert.

**Bemerkung 10.4.** Jede  $k$ -Dominanzmenge ist eine Dominanzmenge, womit  $\gamma(G) \leq \gamma_k(G)$  für jedes  $k \in \mathbf{N}$  gilt. Insbesondere sind die Begriffe 1-Dominanzmenge und Dominanzmenge gleichbedeutend, was  $\gamma(G) = \gamma_1(G)$  zur Folge hat. Allgemeiner ist für  $1 \leq q \leq k$  jede  $k$ -Dominanzmenge eine  $q$ -Dominanzmenge, also  $\gamma_q(G) \leq \gamma_k(G)$ . Es gilt immer  $\gamma_k(G) \geq \min\{k, n(G)\}$  und im Fall  $k > \Delta(G)$  natürlich  $\gamma_k(G) = n(G)$ .

**Satz 10.22 (Fink, Jacobson [1] 1985).** Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $k \in \mathbf{N}$  mit  $2 \leq k \leq \Delta(G)$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2.$$

*Beweis.* Es sei  $D$  eine minimale  $k$ -Dominanzmenge von  $G$ . Wegen  $k \leq \Delta(G)$  ist die Menge  $E(G) - D$  nicht leer. Ist  $u \in E(G) - D$ , so gilt  $|N(u, G) \cap D| \geq k$ , womit es  $k$  Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_k$  in  $D$  gibt, die zu  $u$  adjazent sind. Darüber hinaus ist jede Ecke aus  $E(G) - D$  zu mindestens einer Ecke aus  $D - \{x_2, x_3, \dots, x_k\}$  adjazent. Daher ist

$$D^* = \{u\} \cup (D - \{x_2, x_3, \dots, x_k\})$$

eine Dominanzmenge von  $G$ , woraus sich die behauptete Ungleichung ergibt. ||

**Folgerung 10.7.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\Delta(G) \geq 1$ , so gilt  $\gamma_k(G) > \gamma(G)$  für alle  $k \geq 3$ .

**Beispiel 10.2.** Für den Graphen  $G$ , der aus  $r$  disjunkten Kreisen der Länge 4 besteht, gilt  $\gamma_2(G) = \gamma(G) = 2r$ . Daher läßt sich Folgerung 10.7 nicht mehr für  $k = 2$  aufrecht erhalten.

Angeregt durch Satz 10.22 habe ich zusammen mit meiner Schülerin Dr. Adriana Hansberg [2] kürzlich die schlichten und zusammenhängenden Kaktusgraphen  $G$  charakterisiert, die die Identität  $\gamma(G) = \gamma_2(G)$  erfüllen. Die Charakterisierung aller zusammenhängenden schlichten Graphen  $G$  mit  $\gamma(G) = \gamma_2(G)$  ist ein offenes Problem.

**Satz 10.23 (Fink, Jacobson [1] 1985).** Ist  $G$  ein schlichter Graph,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\Delta = \Delta(G)$  und  $n = n(G)$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \geq \frac{kn}{\Delta + k}.$$

*Beweis.* Ist  $k > \Delta$ , so gilt  $\gamma_k(G) = n$ , und die Ungleichung ist tatsächlich erfüllt. Im Fall  $k \leq \Delta$  sei  $D$  eine minimale  $k$ -Dominanzmenge von  $G$ . Es gilt einerseits

$$m_G(D, \overline{D}) \leq \Delta|D| = \Delta\gamma_k(G).$$

Da jede Ecke aus  $\overline{D}$  zu mindestens  $k$  Ecken aus  $D$  adjazent ist, gilt andererseits

$$m_G(D, \overline{D}) \geq k|\overline{D}| = k(n - \gamma_k(G)).$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt ohne Mühe die gesuchte Abschätzung. ||

**Satz 10.24 (Fink, Jacobson [1] 1985).** Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $k \in \mathbf{N}$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \geq n(G) - \frac{m(G)}{k}.$$

*Beweis.* Ist  $\gamma_k(G) = n(G)$ , so ist die Ungleichung sicherlich richtig. Nun sei  $\gamma_k(G) < n(G)$ , und es sei  $D$  eine minimale  $k$ -Dominanzmenge von  $G$ . Da jede Ecke aus  $\overline{D} \neq \emptyset$  zu mindestens  $k$  Ecken aus  $D$  adjazent ist, folgt  $m(G) \geq |\overline{D}|k = (n(G) - \gamma_k(G))k$  und damit die gewünschte Abschätzung. ||

**Folgerung 10.8 (Fink, Jacobson [1] 1985).** Ist  $T$  ein Baum und  $k \in \mathbf{N}$ , so gilt

$$\gamma_k(T) \geq \frac{(k-1)n(T) + 1}{k}.$$

**Folgerung 10.9 (Volkman [26] 2006).** Ist  $T$  ein Baum der Ordnung  $n(T) \geq 2$ , so gilt

$$\gamma_2(T) \geq \beta(T) + 1 \geq \gamma(T) + 1.$$

*Beweis.* Da  $T$  ein bipartiter Graph ist, gilt  $\beta(T) \leq n(T)/2$ . Daher liefert Folgerung 10.8

$$\gamma_2(T) \geq \frac{n(T) + 1}{2} \geq \beta(T) + \frac{1}{2}.$$

Wegen Satz 10.1 ii) gilt  $\beta(T) \geq \gamma(T)$ , woraus sich dann sofort die gewünschte Ungleichungskette ergibt. ||

Angeregt durch Folgerung 10.8 hat Volkman [26] kürzlich alle Bäume mit

$$\gamma_k(T) = \left\lceil \frac{(k-1)n(T) + 1}{k} \right\rceil$$

charakterisiert. In der gleichen Arbeit [26] wurden auch alle Bäume  $T$  mit  $\gamma_2(T) = \gamma(T) + 1$  und  $\gamma_2(T) = \beta(T) + 1$  bestimmt. Hansberg und Volkman [1] haben gezeigt, daß die Ungleichung  $\gamma_2(G) \geq \gamma(G) + 1$  sogar für alle zusammenhängenden Blockgraphen  $G$  der Ordnung  $n(G) \geq 2$  richtig ist und alle Blockgraphen bestimmt, die diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllen.

Nun wollen wir eine Verallgemeinerung der Abschätzung  $2\gamma(G) \leq n(G)$  von Ore herleiten. Dazu benötigen wir den nächsten Hilfssatz, der sich durch ein klassisches Argument von Erdős [2] beweisen läßt.

**Hilfssatz 10.10 (Favaron, Hansberg, Volkman [1] 2008).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph. Zu jeder natürlichen Zahl  $r$  existiert eine Zerlegung von  $E(G)$  in  $r$  paarweise disjunkte Eckenmengen  $E_1, E_2, \dots, E_r$ , so daß

$$|N(u) \cap E_i| \leq \frac{d(u)}{r} \tag{10.15}$$

für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  und jede Ecke  $u \in E_i$  gilt.

*Beweis.* Sei  $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r$  eine solche Zerlegung von  $E(G)$ , so daß  $\sum_{i=1}^r \sum_{u \in E_i} |N(u) \cap E_i|$  minimal ist. Angenommen, es gibt einen Index  $i_0 \in \{1, 2, \dots, r\}$  und eine Ecke  $u_0 \in E_{i_0}$ , so daß  $|N(u_0) \cap E_{i_0}| > \frac{d(u_0)}{r}$  gilt. Dann existiert aber ein Index  $i_1 \in \{1, 2, \dots, r\}$ , der die Ungleichung  $|N(u_0) \cap E_{i_1}| < \frac{d(u_0)}{r}$  erfüllt. Setzen wir  $E'_{i_0} = E_{i_0} - \{u_0\}$ ,  $E'_{i_1} = E_{i_1} \cup \{u_0\}$  und  $E'_j = E_j$  für  $1 \leq j \leq r$  mit  $j \notin \{i_0, i_1\}$ , so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{u \in E'_i} |N(u) \cap E'_i| &= \sum_{i=1}^r \sum_{u \in E_i} |N(u) \cap E_i| - 2|N(u_0) \cap E_{i_0}| + 2|N(u_0) \cap E_{i_1}| \\ &< \sum_{i=1}^r \sum_{u \in E_i} |N(u) \cap E_i|. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, daß  $\sum_{i=1}^r \sum_{u \in E_i} |N(u) \cap E_i|$  minimal ist, womit dieser Hilfssatz bewiesen ist.  $\parallel$

**Folgerung 10.10 (Caro, Roditty [1] 1990).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $r \geq 1$  eine natürliche Zahl. Dann existiert ein Faktor  $H$  von  $G$ , so daß

$$d(x, H) \geq \frac{r-1}{r} d(x, G) \quad (10.16)$$

für alle  $x \in E(G)$  gilt.

*Beweis.* Wegen Hilfssatz 10.10 existiert eine Zerlegung von  $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r$  von  $E(G)$ , so daß  $|N(u) \cap E_i| \leq \frac{d(u)}{r}$  für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  und jede Ecke  $u \in E_i$  gilt. Löschen wir die Kanten in  $G[E_i]$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , so nennen wir den daraus resultierenden Faktor  $H$ . Dann gilt für  $x \in E_j$  und  $1 \leq j \leq r$

$$d(x, H) = d(x, G) - |N(x, G) \cap E_j| \geq d(x, G) - \frac{d(x, G)}{r} = \frac{r-1}{r} d(x, G). \quad \parallel$$

**Satz 10.25 (Caro, Roditty [1] 1990).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n = n(G)$  und  $k, r \in \mathbf{N}$ . Ist der Minimalgrad  $\delta = \delta(G) \geq \frac{r+1}{r}k - 1$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{r}{r+1}n. \quad (10.17)$$

*Beweis.* Es sei  $E_1, E_2, \dots, E_{r+1}$  eine Zerlegung von  $E(G)$  mit den Eigenschaften aus Folgerung 10.10 und  $H$  der entsprechende  $(r+1)$ -partite Faktor. Dann folgt aus (10.16) für alle  $x \in E(G)$

$$d(x, H) \geq \left\lceil \frac{r}{r+1} \delta \right\rceil \geq \left\lceil k - \frac{r}{r+1} \right\rceil = k.$$

Gilt o.B.d.A.  $|E_1| \geq |E_2| \geq \dots \geq |E_{r+1}|$ , so ist  $A = \bigcup_{i=2}^{r+1} E_i$  eine  $k$ -Dominanzmenge von  $G$ , denn jede Ecke aus  $E_1$  ist zu mindestens  $k$  Ecken aus  $A$  adjazent. Daraus folgt nun das gewünschte Ergebnis

$$\gamma_k(G) \leq |A| = n - |E_1| \leq n - \frac{n}{r+1} = \frac{rn}{r+1}. \quad \parallel$$

Setzt man in Satz 10.25  $r = k$ , so ergibt sich unmittelbar ein Ergebnis von Cockayne, Gamble und Shepherd [1].

**Folgerung 10.11 (Cockayne, Gamble, Shepherd [1] 1985).** Ist  $G$  ein schlichter Graph,  $k \in \mathbb{N}$  und  $\delta(G) \geq k$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n(G). \quad (10.18)$$

Setzt man in Satz 10.25  $r = 1$ , so folgt für  $\delta \geq 2k - 1$  die Abschätzung  $2\gamma_k(G) \leq n(G)$ , die für  $k = 1$  gerade die klassische Ungleichung von Ore bedeutet.

Mit Hilfe eines allgemeineren Dominanzkonzeptes haben auch Stracke und Volkmann [1] 1993 Folgerung 10.11 verbessert.

Das nächste Resultat ist äquivalent zum Satz 10.25 von Caro und Roditty, aber es läßt sich häufig leichter anwenden.

**Satz 10.26 (Favaron, Hansberg, Volkmann [1] 2008).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit Minimalgrad  $\delta \geq k \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{\lceil k/(\delta+1-k) \rceil}{\lceil k/(\delta+1-k) \rceil + 1}n.$$

*Beweis.* Man wähle in Hilfssatz 10.10 eine Zerlegung  $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r$  mit  $r = \lceil \frac{\delta+1}{\delta+1-k} \rceil$ . Dann folgt aus der Ungleichung (10.15)

$$|N(u) \cap E_i| \leq \frac{d(u)}{r} \leq \frac{\delta+1-k}{\delta+1}d(u)$$

für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  und jede Ecke  $u \in E_i$ . Damit ergibt sich

$$d(u) - |N(u) \cap E_i| \geq d(u) - \frac{\delta+1-k}{\delta+1}d(u) = \frac{kd(u)}{\delta+1} \geq \frac{k\delta}{\delta+1} = k - \frac{k}{\delta+1}.$$

Wegen  $\frac{k}{\delta+1} < 1$  erhalten wir daraus  $d(u) - |N(u) \cap E_i| \geq k$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  und jede Ecke  $u \in E_i$ . Somit ist  $E(G) - E_i$  eine  $k$ -Dominanzmenge von  $G$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Da  $\max\{|E_i| \mid 1 \leq i \leq r\} \geq \frac{n}{r}$ , erhalten wir das gewünschte Ergebnis wie folgt:

$$\gamma_k(G) \leq n - \frac{n}{r} = \frac{r-1}{r}n = \frac{\lceil k/(\delta+1-k) \rceil}{\lceil k/(\delta+1-k) \rceil + 1}n. \quad \parallel$$

**Folgerung 10.12 (Favaron, Hansberg, Volkmann [1] 2008).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  vom Minimalgrad  $\delta$ . Ist  $k \leq \delta$  eine natürliche Zahl, so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{\delta}{2\delta+1-k}n.$$

*Beweis.* Wegen  $\lceil \frac{a}{b} \rceil \leq \frac{a+b-1}{b}$  für je zwei positive ganze Zahlen  $a$  und  $b$ , folgt

$$\left\lceil \frac{k}{\delta+1-k} \right\rceil \leq \frac{k+\delta+1-k-1}{\delta+1-k} = \frac{\delta}{\delta+1-k}.$$

Da die Funktion  $\frac{x}{x+1}$  für positive  $x$  monoton wächst, ergibt sich daher aus Satz 10.26

$$\gamma_k(G) \leq \frac{\lceil k/(\delta+1-k) \rceil}{\lceil k/(\delta+1-k) \rceil + 1}n \leq \frac{\delta/(\delta+1-k)}{\delta/(\delta+1-k)+1}n = \frac{\delta}{2\delta+1-k}n. \quad \parallel$$



Folgerung 10.12 verbessert für  $(\delta + 4)/2 \leq k \leq \delta - 1$  eine obere Schranke von Chen und Zhou [1] aus dem Jahre 1998. Der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben, ist ein Analogon zum Satz 10.15 für  $k \geq 2$ .

**Satz 10.27 (Favaron, Hansberg, Volkmann [1] 2008).** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $n$  vom Minimalgrad  $\delta$ . Dann gilt  $\gamma_k(G) = kn/(k+1)$  (also Gleichheit in Folgerung 10.11) für eine ganze Zahl  $k$  mit  $2 \leq k \leq \delta$  genau dann, wenn  $G = H \circ K_k$  ist, wobei  $H$  ein zusammenhängender und schlichter Graph bedeutet.

Der nächste Hilfssatz ist leicht einzusehen.

**Hilfssatz 10.11.** Ist  $G = C_4 \circ K_1$  oder  $G = (F \circ K_1) \circ K_1$ , wobei  $F$  ein zusammenhängender und schlichter Graph bedeutet, so gilt  $\gamma_2(G) = \frac{3}{2}\alpha(G) = \frac{3}{4}n(G)$ .

**Hilfssatz 10.12.** Es sei  $H$  ein zusammenhängender und schlichter Graph mit mindestens zwei Ecken und  $G = H \circ K_1$ . Dann gilt  $\gamma_2(G) \leq \frac{3}{4}n(G)$ , und es ist  $\gamma_2(G) = \frac{3}{4}n(G)$  genau dann, wenn  $H = C_4$  oder  $H = F \circ K_1$ , wobei  $F$  ein zusammenhängender und schlichter Graph bedeutet.

*Beweis.* Es sei  $L$  die Menge der Endecken von  $G$  und  $D$  eine minimale Dominanzmenge von  $G - L = H$ . Da  $G = H \circ K_1$  ist, erkennen wir, daß  $D \cup L$  eine minimale 2-Dominanzmenge von  $G$  ist. Daher ergibt sich aus der Ungleichung von Ore

$$\gamma_2(G) = \gamma(G - L) + |L| \leq \frac{n(G - L)}{2} + |L| = \frac{3}{4}n(G).$$

Wenden wir auf diese Ungleichungskette Satz 10.15 an, so erkennen wir ohne Mühe, daß  $\gamma_2(G) = \frac{3}{4}n(G)$  genau dann gilt, wenn  $H = C_4$  oder  $H = F \circ K_1$ , wobei  $F$  ein zusammenhängender und schlichter Graph bedeutet. ||

**Satz 10.28 (Fujisawa, Hansberg, Kubo, Saito, Sugita, Volkmann [1] 2008).** Es sei  $G$  ein zusammenhängender, bipartiter und schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 3$ . Dann gilt  $\gamma_2(G) \leq \frac{3}{2}\alpha(G)$ , und es ist  $\gamma_2(G) = \frac{3}{2}\alpha(G)$  genau dann, wenn  $G = C_4 \circ K_1$  oder  $G = (F \circ K_1) \circ K_1$ , wobei  $F$  ein zusammenhängender, bipartiter und schlichter Graph bedeutet.

*Beweis.* Es sei  $L$  die Menge der Endecken und  $I$  eine maximale unabhängige Eckenmenge von  $G$ . Wegen  $n \geq 3$ , können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß  $L \subseteq I$  und daher  $|L| \leq \alpha(G)$  gilt. Da  $G$  bipartit ist, ergibt sich natürlich  $n \leq 2\alpha(G)$ .

Ist  $A, B$  eine Bipartition von  $G$ , so sei  $A_1 = A - L$  und  $B_1 = B - L$ , und wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß  $|A_1| \leq |B_1|$  gilt. Daraus ergibt sich  $|A_1| \leq \frac{n - |L|}{2}$ . Da jede Ecke aus  $B_1$  mindestens zwei Nachbarn in  $A_1 \cup L$  hat, ist  $A_1 \cup L$  eine 2-Dominanzmenge von  $G$ , und somit folgt

$$\gamma_2(G) \leq |A_1 \cup L| \leq \frac{n - |L|}{2} + |L| = \frac{n + |L|}{2}.$$

Kombinieren wir diese Ungleichungskette mit  $|L| \leq \alpha(G)$  und  $n \leq 2\alpha(G)$ , so ergibt sich die gewünschte Ungleichung

$$\gamma_2(G) \leq \frac{n + |L|}{2} \leq \frac{2\alpha(G) + \alpha(G)}{2} = \frac{3}{2}\alpha(G).$$

Daher ist  $G$  ein bipartiter Graph mit  $\gamma_2(G) = \frac{3}{2}\alpha(G)$  genau dann, wenn  $n = 2\alpha(G)$ ,  $|L| = \alpha(G)$  und  $\gamma_2(G) = \frac{n+|L|}{2}$ . Die Gleichungen  $|L| = \alpha(G)$  und  $n = 2\alpha(G) = 2|L|$  zeigen uns, daß  $G = H \circ K_1$  gilt. Die Identität  $\gamma_2(G) = \frac{n+|L|}{2}$  liefert dann zusätzlich  $\gamma_2(G) = \frac{3}{4}n$ . Wenden wir nun Hilfssatz 10.12 an, so folgt  $G = C_4 \circ K_1$  oder  $G = (F \circ K_1) \circ K_1$ , wobei  $F$  ein zusammenhängender, bipartiter und schlichter Graph bedeutet.

Ist umgekehrt  $G = C_4 \circ K_1$  oder  $G = (F \circ K_1) \circ K_1$ , wobei  $F$  ein zusammenhängender, bipartiter und schlichter Graph bedeutet, so liefert Hilfssatz 10.11 sofort  $\gamma_2(G) = \frac{3}{2}\alpha(G)$ .  $\parallel$

**Folgerung 10.13 (Blidia, Chellali, Favaron [1] 2005).** Ist  $T$  ein Baum mit mindestens drei Ecken, so gilt  $\gamma_2(T) \leq \frac{3}{2}\alpha(T)$ .

**Satz 10.29 (Hansberg, Meierling, Volkmann [1] 2009).** Ist  $G$  ein schlichter  $r$ -partiter Graph der Ordnung  $n$  und  $k \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{(r-1)n + |\{x \in E(G) | d(x, G) \leq k-1\}|}{r}. \quad (10.19)$$

*Beweis.* Ist  $R = \{x \in E(G) | d(x, G) \leq k-1\}$ , so ist  $R$  in jeder  $k$ -Dominanzmenge enthalten. Ist  $|R| = |E(G)| = n$ , so ist (10.19) sicherlich richtig. Im verbleibenden Fall  $|R| < |E(G)|$  sei  $E_1, E_2, \dots, E_r$  eine Zerlegung der Eckenmenge des  $r$ -partiten Graphen  $G[E(G) - R]$  in disjunkte unabhängige Eckenmengen, so daß  $|E_1| \geq |E_2| \geq \dots \geq |E_r|$  gilt. Dabei ist  $E_i = \emptyset$  für  $i \geq 2$  möglich. Ist  $x \in E_1$ , so gilt  $d(x, G) \geq k$  und alle Nachbarn von  $x$  liegen in  $E(G) - E_1$ . Daher ist  $E(G) - E_1$  eine  $k$ -Dominanzmenge mit

$$|E_1| \geq \frac{|E_1| + |E_2| + \dots + |E_r|}{r} = \frac{n - |R|}{r}.$$

Daraus ergibt sich die gewünschte Abschätzung wie folgt:

$$\gamma_k(G) \leq |E(G) - E_1| = n - |E_1| \leq n - \frac{n - |R|}{r} = \frac{(r-1)n + |R|}{r}. \quad \parallel$$

Setzt man in Satz 10.29  $r = 2$ , so ergibt sich unmittelbar das nächste Resultat.

**Folgerung 10.14 (Blidia, Chellali, Volkmann [3] 2006).** Ist  $G$  ein schlichter und bipartiter Graph der Ordnung  $n$  und  $k \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n + |\{x \in E(G) | d(x, G) \leq k-1\}|}{2}. \quad (10.20)$$

**Satz 10.30.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $k \in \mathbb{N}$ . Ist  $\delta(G) \geq k \geq 2$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n(G) + \gamma_{k-1}(G)}{2}.$$

*Beweis.* Es sei  $S$  eine minimale  $(k-1)$ -Dominanzmenge von  $G$  und  $A \subseteq E(G) - S$  diejenige Menge, die genau  $k-1$  Nachbarn in  $S$  hat. Ist  $A = \emptyset$ , so gilt  $\gamma_k(G) = \gamma_{k-1}(G)$  und die gewünschte Ungleichung ist dann natürlich richtig. Ist  $A \neq \emptyset$ , so hat jede Ecke aus  $E(G) - (A \cup S)$  mindestens  $k$  Nachbarn in  $S$ . Nun sei  $D$  eine minimale Dominanzmenge des Teilgraphen  $H$ , der von der Eckenmenge  $N[A] \cap (E(G) - S)$  induziert wird. Dann folgt aus der Voraussetzung  $\delta(G) \geq k$  und der Definition von  $A$ , daß  $\delta(H) \geq 1$  ist. Daher liefert der Satz von Ore

$$|D| \leq \frac{|N[A] \cap (E(G) - S)|}{2} \leq \frac{|E(G) - S|}{2}.$$

Nach Konstruktion ist nun  $S \cup D$  eine  $k$ -Dominanzmenge von  $G$ , und wir erhalten daher die gewünschte Ungleichung wie folgt:

$$\gamma_k(G) \leq |S \cup D| \leq |S| + \frac{|E(G) - S|}{2} = \frac{n(G) + \gamma_{k-1}(G)}{2}. \quad \parallel$$

Der Spezialfall  $k = 2$  in Satz 10.30 geht auf Blidia, Chellali und Volkmann [2] zurück.

**Beispiel 10.3.** Es sei  $H$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n = n(H)$  und  $k \geq 2$  eine ganze Zahl. Ist  $G = H \circ K_k$ , so gilt  $n(G) = (k + 1)n$  und

$$\gamma_k(G) = kn = \frac{n(G) + \gamma_{k-1}(G)}{2},$$

womit die Abschätzung von  $\gamma_k(G)$  in Satz 10.30 bestmöglich ist.

Nun verwenden wir die sogenannte probabilistische Methode, um eine weitere interessante obere Schranke für  $\gamma_k(G)$  herzuleiten.

**Satz 10.31 (Hansberg, Volkmann [4] 2009).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  vom Minimalgrad  $\delta \geq 1$ . Ist  $k \in \mathbf{N}$  mit  $\frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta+1} \left( k \ln(\delta+1) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i! (\delta+1)^{k-1}} \right).$$

*Beweis.* Als erstes zeigen wir, daß  $\delta \geq k$  aus der Voraussetzung  $\frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$  folgt. Angenommen, es gilt  $\delta \leq k-1$ . Wegen  $\delta \geq 1$  folgt aus dieser Annahme sofort  $k \geq 2$ . Da die Funktion  $h(x) = \frac{x}{\ln x}$  für  $x > e$  monoton wachsend ist und  $h(2) = h(4)$  gilt, ergibt sich  $h(x) \leq h(y)$  für alle ganze Zahlen  $y \geq x \geq 2$ , mit Ausnahme des Falles  $x = 2$  und  $y = 3$ . Ist nun  $\delta \neq 1$  oder  $k \neq 3$ , so erhalten wir

$$2k \leq \frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \leq \frac{k}{\ln k},$$

was zu dem Widerspruch  $2 \leq k \leq \sqrt{e}$  führt. Im Fall  $\delta = 1$  und  $k = 3$  ist die Voraussetzung  $\frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$  offensichtlich nicht erfüllt, womit wir  $\delta \geq k$  bewiesen haben.

Für eine beliebige Ecke  $v \in E(G)$  definieren wir nun den folgenden Bernoulli-Versuch. Die Indexvariable  $X_v$  sei durch

$$X_v = \begin{cases} 1, & v \text{ ausgewählt} \\ 0, & v \text{ nicht ausgewählt} \end{cases}.$$

definiert, und die Wahrscheinlichkeiten  $P(X_v = 1)$  bzw.  $P(X_v = 0)$  dafür, daß  $v$  ausgewählt bzw. nicht ausgewählt wird, seien durch  $P(X_v = 1) = p$  bzw.  $P(X_v = 0) = 1 - p$  festgelegt, wobei  $p = \frac{k \ln(\delta+1)}{\delta+1}$  ist. Eine Folge von  $n$  unabhängigen solchen Versuchen für die Ecken  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des Graphen  $G$  ist ein Bernoulli-Prozeß, bei dem durch  $A = \{v \in E(G) | X_v = 1\}$  zufällig eine Teilmenge  $A \subseteq E(G)$  der Eckenmenge des Graphen  $G$  ausgewählt wird. Daher ist die Wahrscheinlichkeit  $P(|A| = j)$ , eine Teilmenge  $A \subseteq E(G)$  mit genau  $j$  Elementen auszuwählen,  $P(|A| = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$ . Da  $P(|A| = j)$  binomialverteilt ist, gilt für den Erwartungswert  $E[|A|]$  der Anzahl der Elemente in  $A$  bekanntlich

$$E[|A|] = np.$$

Sei  $S_A$  die Menge der Ecken in  $E(G) - A$ , die weniger als  $k$  Nachbarn in  $A$  haben. Dann ist  $A \cup S_A$  eine  $k$ -Dominanzmenge von  $G$ . Für eine beliebige Ecke  $v \in E(G)$  berechnen wir nun  $P(v \in S_A)$  und schätzen diese Größe nach oben ab. Hierbei soll vermerkt werden, daß aus der Voraussetzung  $\frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$  folgt, daß  $p = \frac{k \ln(\delta+1)}{\delta+1} \leq \frac{1}{2}$  ist.

$$\begin{aligned}
P(v \in S_A) &= P(|N(v) \cap A| < k \text{ und } v \notin A) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} P(|N(v) \cap A| = i)(1-p) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d(v)}{i} p^i (1-p)^{d(v)-i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d(v)}{i} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i (1-p)^{d(v)+1} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d(v)}{i} (1-p)^{d(v)+1} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{d(v)^i}{i!} (1-p)^{d(v)+1}.
\end{aligned}$$

Benutzen wir die Ungleichung  $1-x \leq e^{-x}$  für  $x \in [0, 1]$ , so erhalten wir

$$P(v \in S_A) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} e^{-p(d(v)+1)+i \ln(d(v))}.$$

Setzen wir  $f_i(d(v)) = -p(d(v)+1) + i \ln(d(v))$ , dann ist

$$\frac{\partial f_i}{\partial d(v)}(-p(d(v)+1) + i \ln(d(v))) = -p + \frac{i}{d(v)} \leq -p + \frac{k-1}{\delta}.$$

Wegen  $\delta \geq k$ , ergibt sich sofort  $\frac{k}{\delta+1} \geq \frac{k-1}{\delta}$ . Für

für  $\delta \geq 2$  folgt damit  $\ln(\delta+1) \frac{k}{\delta+1} \geq \frac{k-1}{\delta}$ . Im Fall  $\delta = 1$  ist  $k = 1$ , und die Ungleichung  $\ln(\delta+1) \frac{k}{\delta+1} \geq \frac{k-1}{\delta}$  ist trivial. Folglich ist

$$\frac{\partial f_i}{\partial d(v)}(-p(d(v)+1) + i \ln(d(v))) \leq -p + \frac{k-1}{\delta} = -\frac{k \ln(\delta+1)}{\delta+1} + \frac{k-1}{\delta} \leq 0,$$

und daher ist die Funktion  $f_i(d(v))$  monoton fallend. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
P(v \in S_A) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} e^{-p(\delta+1)+i \ln(\delta)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} e^{-k \ln(\delta+1)+i \ln(\delta)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} \frac{\delta^i}{(\delta+1)^k}.
\end{aligned}$$

Nun gilt für den Erwartungswert von  $|A \cup S_A|$

$$\begin{aligned} E[|A \cup S_A|] &= E[|A|] + E[|S_A|] = np + \sum_{v \in E(G)} P(v \in S_A) \\ &\leq n \frac{k \ln(\delta + 1)}{\delta + 1} + n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i! (\delta + 1)^k} \\ &= \frac{n}{\delta + 1} \left( k \ln(\delta + 1) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i! (\delta + 1)^{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß es mindestens eine Menge  $A \subseteq E(G)$  gibt mit

$$|A \cup S_A| \leq \frac{n}{\delta + 1} \left( k \ln(\delta + 1) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i! (\delta + 1)^{k-1}} \right).$$

Da  $A \cup S_A$  eine  $k$ -Dominanzmenge ist, folgt daraus für die  $k$ -Dominanzzahl

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta + 1} \left( k \ln(\delta + 1) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i! (\delta + 1)^{k-1}} \right). \quad \parallel$$

**Folgerung 10.15 (Hansberg, Volkmann [4] 2009).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  vom Minimalgrad  $\delta \geq 1$ . Ist  $k \in \mathbf{N}$  mit  $\frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$ , so gilt

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta + 1} (k \ln(\delta + 1) + 1).$$

*Beweis.* Aus

$$(\delta + 1)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \delta^i \geq \sum_{i=0}^{k-1} \delta^i.$$

folgt

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i! (\delta + 1)^{k-1}} \leq \frac{1}{(\delta + 1)^{k-1}} \sum_{i=0}^{k-1} \delta^i \leq 1.$$

Daraus ergibt sich mit Satz 10.31 das gewünschte Ergebnis wie folgt:

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta + 1} \left( k \ln(\delta + 1) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i! (\delta + 1)^{k-1}} \right) \leq \frac{n}{\delta + 1} (k \ln(\delta + 1) + 1). \quad \parallel$$

Für den Fall  $k = 1$  erhalten wir aus Folgerung 10.15 unmittelbar eine wichtige klassische Abschätzung der Dominanzzahl  $\gamma(G)$ .

**Satz 10.32 (Arnautov [1] 1974, Lovász [4] 1975, Payan [1] 1975).** Jeder schlichte Graph  $G$  ohne isolierte Ecken erfüllt

$$\gamma(G) \leq \frac{n(G)}{\delta(G) + 1} (\ln(\delta(G) + 1) + 1).$$

Die obere Schranke von  $\gamma(G)$  in Satz 10.32 wurde 1998 von Clark, Shekhtman, Suen und Fisher [1] noch verbessert.

Die Arbeiten von Fink und Jacobson [1], [2] 1985, Favaron [1] 1985, Favaron [3] 1988, Caro [1] 1990, Bean, Henning und Swart [1] 1994, Caro and Yuster [1] 2000, Blidia, Chellali und Favaron [1] 2005, Blidia, Chellali und Volkmann [1], [2], [3] 2006, Hansberg und Volkmann [3] 2009 sowie die Dissertation meiner Schülerin, Dr. Adriana Hansberg [1] 2009, enthalten weitere Resultate über die  $k$ -Dominanzzahl.

## 10.5 Irredundanzmengen

**Definition 10.6.** Es sei  $G$  ein Multigraph. Ist  $I \subseteq E(G)$  und  $x$  eine Ecke in  $I$ , so heißt  $x$  *irredundant* in  $I$ , wenn

$$N[x, G] - N[I - \{x\}, G] \neq \emptyset$$

gilt. Sind alle Ecken  $x \in I \subseteq E(G)$  irredundant in  $I$ , so nennt man  $I$  *Irredundanzmenge* von  $G$  oder *irredundant* in  $G$ . Eine Irredundanzmenge  $I_0$  von  $G$  heißt *gesättigt*, wenn es in  $G$  keine Irredundanzmenge  $I$  gibt mit  $I_0 \subseteq I$  und  $I_0 \neq I$ . Eine gesättigte Irredundanzmenge  $I^*$  von  $G$  nennt man *minimale Irredundanzmenge* von  $G$ , wenn es keine gesättigte Irredundanzmenge  $I$  mit  $|I| < |I^*|$  gibt. Ist  $I$  eine minimale Irredundanzmenge, so bezeichnet man durch  $|I| = \text{ir} = \text{ir}(G)$  die *Irredundanzzahl* von  $G$ .

In der Graphentheorie wurde der Begriff der Irredundanz erstmalig 1978 in einem Artikel von Cockayne, Hedetniemi und Miller [1] benutzt.

**Definition 10.7.** Ist  $G$  ein Multigraph,  $I \subseteq E(G)$  und  $x$  eine Ecke aus  $I$ , so nennt man  $P(x) = P(x, I) = P_G(x, I) = N[x, G] - N[I - \{x\}, G]$  die Menge der *privaten Nachbarn* von  $x$  bzgl.  $I$ .

**Bemerkung 10.5.** Benutzt man Definition 10.7, so erkennt man, daß eine Menge  $I \subseteq E(G)$  genau dann irredundant ist, wenn jede Ecke aus  $I$  mindestens einen privaten Nachbarn besitzt.

**Satz 10.33 (Cockayne, Hedetniemi [1] 1974).** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt

- i) Jede unabhängige Eckenmenge ist irredundant.
- ii) Eine minimale Dominanzmenge ist eine gesättigte Irredundanzmenge, also gilt  $\text{ir}(G) \leq \gamma(G)$ .

*Beweis.* i) Es sei  $I$  eine unabhängige Eckenmenge und  $x \in I$ . Dann gilt  $x \in N[x] - N[I - \{x\}]$ , womit  $I$  eine Irredundanzmenge ist.

ii) Es sei  $D$  eine minimale Dominanzmenge von  $G$ . Nehmen wir an, daß  $D$  nicht irredundant ist. Dann gibt es in der Menge  $D$  eine Ecke  $x$  mit  $N[x] - N[D - \{x\}] = \emptyset$ , womit  $N[x] \subseteq N[D - \{x\}]$  gilt. Das bedeutet aber, daß schon  $D - \{x\}$  eine Dominanzmenge von  $G$  ist, was der Minimalität von  $D$  widerspricht. Ist  $D$  keine gesättigte Irredundanzmenge, so existiert eine Ecke  $u \in E(G) - D$ , so daß  $D \cup \{u\}$  irredundant ist. Daraus erhalten wir den Widerspruch

$$\emptyset \neq N[u] - N[(D \cup \{u\}) - \{u\}] = N[u] - N[D] = N[u] - E(G) = \emptyset.$$

Aus der Definition der Irredundanzzahl ergibt sich nun die Ungleichung  $\text{ir}(G) \leq \gamma(G)$ . ||

**Satz 10.34 (Allan, Laskar [1] 1978, Bollobás, Cockayne [1] 1979).** Für jeden Multigraphen  $G$  gilt

$$\gamma(G) \leq 2\text{ir}(G) - 1.$$

*Beweis.* Wegen  $\text{ir}(G) \leq \gamma(G)$  können wir o.B.d.A.  $\text{ir}(G) < \gamma(G)$  voraussetzen. Ist  $I$  eine gesättigte Irredundanzmenge mit  $|I| = \text{ir}(G)$ , so gilt nach Bemerkung 10.5  $P(x) \neq \emptyset$  für jede Ecke  $x \in I$ . Zu jeder Ecke  $x \in I$  wählen wir eine Ecke  $f(x) \in P(x)$  und setzen  $F = \bigcup_{x \in I} f(x)$  sowie  $D = I \cup F$ . Die beiden Eckenmengen  $I$  und  $F$  haben die gleiche Kardinalität, aber sie haben nicht notwendig einen leeren Durchschnitt, da  $x \in P(x)$  für  $x \in I$  und damit  $f(x) = x$  möglich ist. Wegen  $|I| = \text{ir}(G)$  folgt damit  $|D| \leq |I| + |F| = 2\text{ir}(G)$ .

Annahme,  $D$  ist keine Dominanzmenge von  $G$ . Dann existiert eine Ecke  $w \in E(G) - D$  mit  $w \notin N[D]$ . Nun ist auch  $I' = I \cup \{w\}$  eine Irredundanzmenge von  $G$ , denn es gilt  $w \in N[w] - N[I' - \{w\}]$  und  $f(x) \in N[x] - N[(I' - \{x\})]$  für alle  $x \in I' - \{w\} = I$ . Dies ist ein Widerspruch dazu, daß  $I$  gesättigt ist.

Damit ist  $D$  eine Dominanzmenge, die nach Voraussetzung die Ungleichung  $|D| > \text{ir}(G)$  erfüllt. Da  $I$  eine gesättigte Irredundanzmenge ist und  $D$  die Eckenmenge  $I$  echt umfaßt, kann  $D$  nach Satz 10.33 ii) keine minimale Dominanzmenge sein, womit wir die gewünschte Abschätzung  $\gamma(G) \leq |D| - 1 \leq 2\text{ir}(G) - 1$  erhalten.  $\parallel$

Aus den letzten beiden Sätzen ergibt sich sofort

**Folgerung 10.16.** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt

$$\frac{1}{2} < \frac{\text{ir}(G)}{\gamma(G)} \leq 1.$$

Für spezielle Graphen lassen sich bessere untere Schranken für den Quotienten  $\text{ir}(G)/\gamma(G)$  nachweisen. Um solche Schranken zu bestimmen ist der folgende Struktursatz von Bollobás und Cockayne [1] aus dem Jahre 1979 häufig sehr nützlich.

**Satz 10.35 (Bollobás, Cockayne [1] 1979).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $I$  eine gesättigte Irredundanzmenge von  $G$ , die keine Dominanzmenge von  $G$  ist. Ist  $u \in E(G) - N[I]$ , so existiert ein  $x \in I$  mit folgenden Eigenschaften.

- i) Es gilt  $P(x, I) \subseteq N(u)$ .
- ii) Sind  $x_1, x_2 \in P(x, I)$  mit  $x_1 \neq x_2$ , so gilt  $x_1 x_2 \in K(G)$  oder es existieren  $y_1, y_2 \in I - \{x\}$ , so daß  $x_1$  zu jeder Ecke aus  $P(y_1, I)$  und  $x_2$  zu jeder Ecke aus  $P(y_2, I)$  adjazent ist ( $y_1 = y_2$  ist dabei möglich).

*Beweis.* i) Da  $I$  eine gesättigte Irredundanzmenge ist, kann  $I \cup \{u\}$  nicht irredundant sein. Daher existiert eine Ecke  $x \in I \cup \{u\}$  mit

$$\begin{aligned} \emptyset = P(x, I \cup \{u\}) &= N[x] - N[(I \cup \{u\}) - \{x\}] \\ &= N[x] - N[I - \{x\}] - N[u], \end{aligned}$$

womit  $P(x, I) = N[x] - N[I - \{x\}] \subseteq N[u]$  gilt. Da  $u$  nicht von  $I$  dominiert wird, ist  $u \notin P(x, I)$ , woraus sich schließlich  $P(x, I) \subseteq N(u)$  ergibt.

ii) Seien nun  $x_1$  und  $x_2$  zwei nicht adjazente Ecken aus  $P(x, I)$ . Angenommen, für alle  $v_i \in I - \{x\}$  existiert eine Ecke  $w_i \in P(v_i, I)$ , so daß  $x_1$  und  $w_i$  nicht adjazent sind. Dann ist aber auch  $I' = I \cup \{x_1\}$  eine Irredundanzmenge von  $G$ , denn  $w_i \in P(v_i, I')$  für alle  $v_i \in I - \{x\}$ ,  $x_2 \in P(x, I')$  und wegen i) gilt auch  $u \in P(x_1, I')$ , was unserer Voraussetzung



widerspricht, daß  $I$  gesättigt ist. Mit den gleichen Argumenten erhält man die Aussage für  $x_2$ , womit auch ii) bewiesen ist. ||

**Satz 10.36.** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph.

- i) (Damaschke [1] 1991) Ist  $\mu(G) = 0$ , so gilt  $3\text{ir}(G) > 2\gamma(G)$ .
- ii) (Volkman [9] 1998) Ist  $\mu(G) = 1$ , so gilt  $3\text{ir}(G) \geq 2\gamma(G)$ .

*Beweis.* Es sei  $I$  eine gesättigte Irredundanzmenge von  $G$  mit  $|I| = \text{ir}(G)$  und o.B.d.A. gelte  $\gamma(G) - \text{ir}(G) = c > 0$ . Dann ist  $I$  keine Dominanzmenge von  $G$ , also  $U = E(G) - N[I] \neq \emptyset$ . Da  $U \cup I$  eine Dominanzmenge von  $G$  ist, ergibt sich  $|U| \geq \gamma(G) - \text{ir}(G) = c$ .

Gemäß Satz 10.35 i) wählen wir zu jeder Ecke  $u \in U$  ein  $f(u) \in I$  mit  $P(f(u), I) \subseteq N(u)$ . Daraus ergibt sich  $f(u) \notin P(f(u), I)$ , womit jede Ecke  $f(u)$  zu einer Ecke aus  $I - \{f(u)\}$  adjazent ist. Ist  $F = \{f(u) | u \in U\}$ , so wählen wir zu jedem  $f(u) \in F$  ein  $h(u) \in P(f(u), I)$  und setzen  $H = \{h(u) | f(u) \in F\}$ . Es gilt natürlich  $|H| = |F|$  und  $H \cap I = \emptyset$ . Setzen wir  $J = (I - F) \cup H$ , so gilt  $|J| = |I| - |F| + |H| = \text{ir}(G)$ , womit auch  $J$  keine Dominanzmenge von  $G$  ist. Ist  $W = E(G) - N[J]$ , so ist  $W \cup J$  eine Dominanzmenge von  $G$  mit  $\gamma(G) \leq |J| + |W|$ , also  $|W| \geq \gamma(G) - \text{ir}(G) = c > 0$ . Für  $w \in W$  gilt  $w \notin U$ ,  $w \notin H$ ,  $w \notin I$  und  $w \notin N[I - F]$ , also  $w \in N(f(u))$  für ein  $u \in U$ .

Nun seien  $L_1, L_2, \dots, L_r$  die Komponenten von  $G[I]$ , die mindestens eine Ecke aus  $F$  enthalten. Da jede Ecke aus  $F$  zu mindestens einer weiteren Ecke aus  $I$  adjazent ist, gilt  $|E(L_i)| \geq 2$  für  $1 \leq i \leq r$ , also  $2r \leq |I| = \text{ir}(G)$ . Nun setzen wir  $G[E(L_1) \cup E(L_2) \cup \dots \cup E(L_r) \cup W] = G^*$ .

i) Ist  $\mu(G) = 0$ , also  $G$  ein Baum, so gilt wegen Satz 10.35 i) notwendig  $|P(f(u), I)| = 1$  für alle  $u \in U$ . Daraus ergibt sich für  $w \in W$  wegen  $w \in N(f(u))$  und  $w \notin H$  sofort  $w \notin P(f(u), I)$ , womit  $w$  mindestens zwei Nachbarn in  $F$  besitzt. Wir wollen nun  $|W| \leq r - 1$  zeigen. Angenommen, es gilt  $|W| = r + s$  mit  $s \geq 0$ . Da  $G^*$  ein Wald ist und  $L_1, L_2, \dots, L_r$  Bäume sind, erhalten wir den Widerspruch

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(G^*) = m(G^*) - n(G^*) + \kappa(G^*) \\ &\geq \sum_{i=1}^r (m(L_i) - n(L_i)) + 2(r + s) - (r + s) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^r \mu(L_i) + s + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt nun

$$\gamma(G) \leq |J| + |W| = |I| + |W| < |I| + r \leq \frac{3}{2}\text{ir}(G).$$

ii) Ist  $\mu(G) = 1$ , also besitzt  $G$  genau einen Kreis (man vgl. Satz 2.8), so ist  $|P(f(u), I)| \geq 3$  wegen Satz 10.35 i) nicht möglich, und es gilt  $|P(f(u), I)| = 2$  für höchstens ein  $u \in U$ .

Ist  $|P(f(u), I)| = 1$  für alle  $u \in U$ , so besitzt wieder jedes  $w \in W$  mindestens zwei Nachbarn in  $F$ . Wegen  $\mu(G^*) \leq 1$ , ergibt sich analog zu i)  $|W| \leq r$ .

Ist  $|P(f(u), I)| = |\{x_1, x_2\}| = 2$  für ein  $u \in U$ , so gelte o.B.d.A.  $x_1 \in H$ . Gehört nun die Ecke  $x_2$  zu  $W$ , so hat  $x_2$  genau einen aber alle anderen Ecken aus  $W$  mindestens zwei Nachbarn in  $F$ . In diesem Fall geht der einzige Kreis von  $G$  durch eine Ecke aus  $U$ , womit

notwendig  $\mu(G^*) = 0$  gilt. Auch in diesem Fall gilt  $|W| \leq r$ , denn ist  $|W| = r + s$  mit  $s \geq 1$ , so erhalten wir den Widerspruch

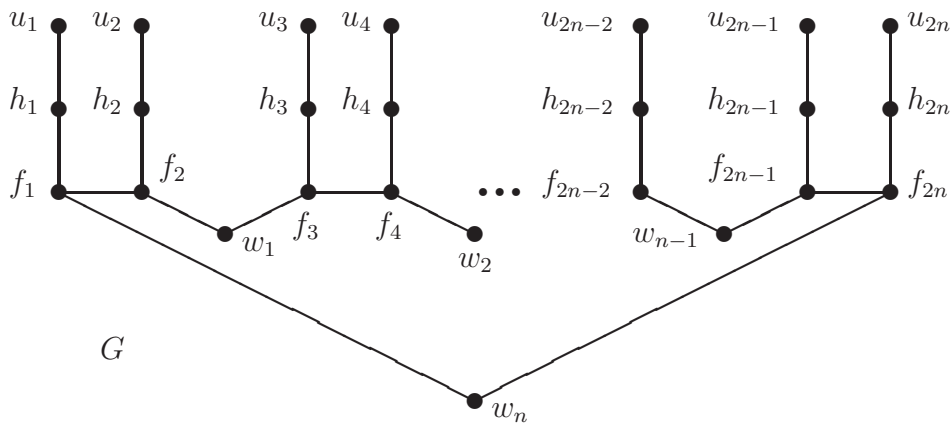
$$\begin{aligned} 0 &= \mu(G^*) = m(G^*) - n(G^*) + \kappa(G^*) \\ &\geq \sum_{i=1}^r (m(L_i) - n(L_i)) + 2(r + s) - 1 - (r + s) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^r \mu(L_i) + s \geq 1. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für  $\mu(G) = 1$

$$\gamma(G) \leq |J| + |W| = |I| + |W| \leq |I| + r \leq \frac{3}{2} \text{ir}(G).$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ||

**Beispiel 10.4.** Um zu zeigen, daß die Abschätzungen im Satz 10.36 bestmöglich sind, betrachten wir den skizzierten Graphen  $G$ , der genau einen Kreis besitzt.



Für den skizzierten Graphen  $G$  wollen wir  $3\text{ir}(G) = 2\gamma(G)$  nachweisen. Zunächst wollen wir zeigen, daß jede gesättigte Irredundanzmenge von  $G$  mindestens eine Ecke aus der Menge  $\{f_i, h_i, u_i\}$  für jedes  $i = 1, 2, \dots, 2n$  besitzt. Denn ist  $I$  eine Irredundanzmenge mit  $I \cap \{f_j, h_j, u_j\} = \emptyset$  für ein  $j$ , so ist auch  $I \cup \{u_j\}$  eine Irredundanzmenge von  $G$ , denn  $u_j$  hat den privaten Nachbarn  $h_j$ . Damit folgt  $\text{ir}(G) \geq 2n$ . Man sieht nun leicht, daß  $I = \{f_1, f_2, \dots, f_{2n}\}$  eine gesättigte Irredundanzmenge von  $G$  ist, woraus sich  $\text{ir}(G) = 2n$  ergibt.

Aus Satz 10.21 und Hilfssatz 10.9 folgt sofort, daß  $\{h_1, \dots, h_{2n}, w_1, \dots, w_n\}$  eine minimale Dominanzmenge von  $G$  ist, woraus sich  $\gamma(G) = 3n$  ergibt. Insgesamt erhalten wir  $3\text{ir}(G) = 6n = 2\gamma(G)$ , womit Satz 10.36 ii) bestmöglich ist.

Betrachten wir den Baum  $T = G - w_n$ , so erkennen wir analog zu oben  $\text{ir}(T) = 2n$  und  $\gamma(T) = 3n - 1$ . Daraus ergibt sich

$$\frac{\text{ir}(T)}{\gamma(T)} = \frac{2n}{3n - 1}.$$

An der Tatsache, daß  $2n/(3n - 1)$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen  $2/3$  strebt, erkennt man auch die Schärfe von Satz 10.36 i).

Genauere Analysen liefern die nächsten Ergebnisse, die wir ohne Beweis notieren wollen.

**Satz 10.37 (Volkmann [9] 1998).** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph. Ist  $G$  ein Blockgraph oder ist  $\mu(G) \leq 2$ , so gilt  $3\text{ir}(G) \geq 2\gamma(G)$ .

**Satz 10.38 (Favaron, Kabanov, Puech [1] 1999).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und klauenfreier Graph, so gilt  $3\text{ir}(G) \geq 2\gamma(G)$ .

Die Ungleichungen in den Sätzen 10.37 und 10.38 sind für allgemeine schlichte und zusammenhängende Kaktusgraphen nicht mehr richtig, denn es existieren Beispiele von Kaktusgraphen  $G$  mit

$$\frac{\text{ir}(G)}{\gamma(G)} = \frac{7}{11} < \frac{2}{3}.$$

Für schlichte Kaktusgraphen vermuteten wir die Abschätzung  $\frac{\text{ir}(G)}{\gamma(G)} > \frac{5}{8}$ . Diese Vermutung wurde 1998 von Vadim Zverovich [1] bestätigt.

Für bipartite sowie triangulierte schlichte Graphen haben wir Beispiele konstruiert, die zeigen, daß die Ungleichung  $\gamma(G) \leq 2\text{ir}(G) - 1$  für diese Klassen scharf ist. Weitere Ergebnisse dieser Art enthält die Arbeit von Favaron, Henning, Puech und Rautenbach [1] 2001.

Vertiefte Informationen zur Theorie der Dominanzmengen und verwandte Parameter findet man in den beiden Bänden "Fundamentals of Domination in Graphs" [1] und "Domination in Graphs: Advanced Topics" [2] von T. Haynes, S. Hedetniemi und P. Slater aus dem Jahre 1998. Während der erste Band ein Lehrbuch ist, enthält der zweite Band Übersichtsartikel von verschiedenen Autoren.

## 10.6 Aufgaben

**Aufgabe 10.1.** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so zeige man  $\gamma(G)(\Delta(G) + 1) \geq n(G)$ .

**Aufgabe 10.2.** i) Ist  $G$  ein schlichter Graph, so zeige man

$$\gamma(G) \leq n(G) - \Delta(G).$$

ii) Für alle  $\Delta \in \mathbf{N}_0$  und alle natürlichen Zahlen  $n \geq \Delta + 1$  gebe man schlichte Graphen  $G$  mit  $n = n(G)$ ,  $\Delta = \Delta(G)$  und  $\gamma(G) = n - \Delta$  an.

iii) Für alle natürlichen Zahlen  $\Delta \geq 2$  gebe man schlichte und zusammenhängende Graphen gerader und ungerader Ordnung  $n = n(G)$  mit  $\Delta = \Delta(G)$  und  $\gamma(G) = n - \Delta$  an.

**Aufgabe 10.3.** Es sei  $H$  ein 3-regulärer und schlichter Graph ohne Brücken der Ordnung  $n$  und  $G = H \circ K_2$ . Man berechne die Größen  $\alpha(G)$ ,  $\beta(G)$ ,  $\alpha_0(G)$ ,  $\beta_0(G)$  und  $\gamma(G)$ .

**Aufgabe 10.4.** Ist  $G$  ein schlichter Graph vom Durchmesser 2, so beweise man  $\gamma(G) \leq \delta(G)$ .

**Aufgabe 10.5.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit der Tailenweite  $t(G) \geq 5$ , so beweise man  $\gamma(G) \geq \delta(G)$ .

**Aufgabe 10.6.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $\mathcal{H} = \{H_x | x \in E(G)\}$  eine Familie von schlichten Graphen, die durch die Ecken von  $G$  indiziert ist. Man beweise, daß genau dann  $\gamma(G \circ \mathcal{H}) = \alpha(G \circ \mathcal{H})$  gilt, wenn alle  $H_x$  vollständige Graphen sind.

**Aufgabe 10.7.** Man beweise Bemerkung 10.1.

**Aufgabe 10.8.** Man beweise Bemerkung 10.2.

**Aufgabe 10.9.** Man beweise Bemerkung 10.3.

**Aufgabe 10.10.** Man beweise Folgerung 10.5 mit Hilfe von Folgerung 10.4.

**Aufgabe 10.11.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $\gamma(G) = \alpha(G)$ . Beweisen Sie, daß für alle unabhängigen Eckenmengen  $S$  von  $G$  die Bedingung  $\gamma(G - N[S, G]) = \alpha(G - N[S, G])$  gilt.

**Aufgabe 10.12.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph. Existiert in  $G$  eine unabhängige Eckenmenge  $X$  und eine Eckenmenge  $Y$  mit  $|X| > |Y|$  und  $N[X, G] \subseteq N[Y, G]$ , so zeige man, daß  $\gamma(G) < \alpha(G)$  gilt.

**Aufgabe 10.13.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $\alpha(G^2) = \alpha(G)$ . Man zeige, daß

$$\min\left\{\sum_{v \in D} (d(v, G) + 1) \mid D \text{ ist eine Dominanzmenge von } G\right\} = n(G).$$

**Aufgabe 10.14.** Ein schlichter Graph  $G$  heißt *simplizialer Graph*, falls jede Ecke von  $G$  in mindestens einem Simplex von  $G$  enthalten ist. Man zeige, daß jede Ecke mit Minimalgrad in einem simplizialen Graphen eine simpliziale Ecke ist.

**Aufgabe 10.15.** Es sei  $G$  ein Blockgraph mit  $\gamma(G) = \alpha(G)$ . Ist  $B$  ein Endblock von  $G$  und  $H = G - E(B)$ , so zeige man  $\gamma(H) = \alpha(H)$ .

**Aufgabe 10.16.** Einen Block  $B$  eines Blockgraphen  $G$  nennen wir *äußeren Block* von  $G$ , wenn  $B$  eine Ecke enthält, die keine Schnittcke von  $G$  ist.

Man beweise: Ist  $G$  ein Blockgraph mit  $\gamma(G) = \alpha(G)$ , so gehört jede Ecke von  $G$  zu höchstens einem äußeren Block von  $G$ .

**Aufgabe 10.17.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\gamma(\overline{G}) \geq 3$ , so beweise man

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \delta(G) + 3.$$

An Hand von Beispielen zeige man, daß diese Ungleichung im allgemeinen nicht gilt, wenn  $\gamma(\overline{G}) \leq 2$  ist.

**Aufgabe 10.18.** Ist  $G$  ein schlichter Graph vom Minimalgrad  $\delta(G) \geq p \geq 2$ , so beweise man  $\gamma_p(G) + \alpha(G) \leq n(G)$ .

**Aufgabe 10.19.** Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $p \in \mathbf{N}$ , so beweise man

$$\gamma_p(G) \leq n(G) + p - 1 - \delta(G).$$

Die vollständigen Graphen zeigen die Schärfe dieser Abschätzung.

**Aufgabe 10.20.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph, der weder vollständig noch 1-regulär ist. Man beweise  $\gamma_2(G) \leq n(G) - \delta(G)$ .

**Aufgabe 10.21.** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $n \geq 2$  mit  $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ . Man zeige, daß  $\delta(G) \geq 2$  gilt.

**Aufgabe 10.22.** Es sei  $G$  ein zusammenhängender schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 2$  mit  $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ . Man zeige, daß  $G$  einen bipartiten Faktor  $H$  mit  $\gamma(H) = \beta(H)$  und  $\delta(H) \geq 2$  besitzt.

**Aufgabe 10.23.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 2$  und  $a$  eine Ecke, die auf allen Kreisen von  $G$  liegt. Man zeige, daß es in  $G$  eine minimale Dominanzmenge gibt, die  $a$  enthält.

# Kapitel 11

## Planare Graphen

### 11.1 Die Eulersche Polyederformel

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einem Teil der topologischen Graphentheorie. Dabei steht die Frage im Vordergrund, welche Graphen man so in die Ebene einbetten kann, daß sich keine zwei Kanten schneiden, und welche Eigenschaften solche Graphen besitzen. Zur Präzisierung dieser Probleme benötigen wir einige neue Begriffe.

**Definition 11.1.** Eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung  $k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$  ist ein *stückweise glatter Jordanbogen*, wenn  $k(t) \neq k(s)$  für alle  $s, t \in [0, 1]$  mit  $s \neq t$  gilt. (Dabei bedeutet  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ .) Man spricht von einer *stückweise glatten Jordankurve*, wenn  $k(0) = k(1)$  erfüllt ist, und alle anderen Eigenschaften eines stückweise glatten Jordanbogens erhalten bleiben.

**Definition 11.2.** Ein Graph  $G$  heißt *Euklidischer Graph*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

- i) Die Eckenmenge  $E(G)$  besteht aus verschiedenen Punkten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des  $\mathbb{R}^p$ .
- ii) Die Kantenmenge  $K(G)$  besteht aus einer Menge von stückweise glatten Jordanbogen oder Jordankurven  $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  mit  $k_i(0), k_i(1) \in E(G)$  und  $k_i(t) \notin E(G)$  für  $0 < t < 1$  und alle  $1 \leq i \leq m$ . Dabei heißen eine Ecke  $x_i$  und eine Kante  $k_j$  *inzident*, wenn  $x_i = k_j(0)$  oder  $x_i = k_j(1)$  erfüllt ist.
- iii) Die Kanten von  $G$  haben keine Schnittpunkte. D.h., sind  $k_i$  und  $k_j$  zwei verschiedene Kanten, so gilt  $k_i(s) \neq k_j(t)$  für alle  $0 < s < 1$  und  $0 < t < 1$ . Zwei verschiedene Kanten heißen *inzident*, wenn sie mit einer gemeinsamen Ecke inzidieren.

Ist  $G'$  ein Graph und  $G$  ein Euklidischer Graph im  $\mathbb{R}^p$ , der zu  $G'$  isomorph ist, so nennt man  $G$  eine *Einbettung* von  $G'$  in den  $\mathbb{R}^p$ . Ein Euklidischer Graph im  $\mathbb{R}^2$  heißt *ebener Graph*. Ein Graph, der zu einem ebenen Graphen isomorph ist, heißt *planarer Graph*.

**Satz 11.1.** Jeder Graph  $G$  läßt sich in den  $\mathbb{R}^3$  einbetten.

*Beweis.* Wir geben eine explizite Konstruktion für die Einbettung an. Zunächst ordnen wir verschiedenen Ecken von  $G$  verschiedene Punkte der  $x$ -Achse zu. Danach wählen wir für verschiedene Kanten des Graphen verschiedene Ebenen, welche die  $x$ -Achse enthalten. Nun zeichnen wir für jede Schlinge von  $G$  in der entsprechenden Ebene einen Kreis durch den zugehörigen Punkt der  $x$ -Achse und für jede weitere Kante einen Halbkreis in der entsprechenden Ebene, der die beiden zugehörigen Endpunkte miteinander verbindet. Da alle diese

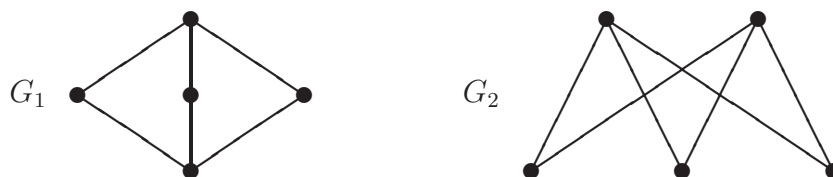
Kreise und Halbkreise in verschiedenen Ebenen liegen, können sie sich außerhalb derjenigen Punkte, die den Ecken des Graphen entsprechen, nicht schneiden. Damit haben wir eine Einbettung von  $G$  in den  $\mathbb{R}^3$  gefunden.  $\parallel$

**Bemerkung 11.1.** Obige Einbettung läßt sich auch durchführen, falls der Graph höchstens  $|\mathbb{R}|$  Ecken und Kanten besitzt. Man kann sogar zeigen, daß sich jeder schlichte Graph mit höchstens  $|\mathbb{R}|$  Ecken und Kanten geradlinig in den  $\mathbb{R}^3$  einbetten läßt (d.h. die Kanten der Einbettung sind Strecken). Einen Beweis dafür findet man in dem Buch von Wagner [2]. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß Wagner [1] 1936 gezeigt hat, daß man jeden schlichten und planaren Graphen sogar geradlinig in den  $\mathbb{R}^2$  einbetten kann. Für Beweise dieses Resultats vgl. man z.B. Wagner und Bodendiek [1] S. 23, Sachs [3] S. 37 oder Wagner [2] S. 109.

**Bemerkung 11.2.** Ein ebener Graph ist ein derart in die Ebene gezeichneter Graph, daß keine zwei Kanten (genauer gesagt, die sie darstellenden Kurven) einen Schnittpunkt haben, abgesehen von den Ecken, mit denen die beiden Kanten inzidieren.

So einfach wie sich die Einbettung von Graphen in den  $\mathbb{R}^3$  erwiesen hat, so schwer ist es zu entscheiden, welche Graphen planar sind (man vgl. Abschnitt 11.4).

**Beispiel 11.1.** In der Skizze ist der Graph  $G_1$  eben, während der Graph  $G_2$  nicht eben ist.



Die beiden Graphen  $G_1$  und  $G_2$  sind isomorph zum  $K_{2,3}$ , womit der  $K_{2,3}$  planar ist.

**Definition 11.3.** Ist  $G$  ein ebener Graph, so wird die Ebene durch die Kurven in endlich viele zusammenhängende Gebiete zerlegt, die wir *Länder* von  $G$  nennen wollen. Bei dieser Zerlegung gibt es genau ein Gebiet (das "*äußere Gebiet*"), das nicht beschränkt ist. Ein ebener Graph zusammen mit seinen Ländern heißt *Landkarte*. Die Anzahl der Länder von  $G$  bezeichnen wir mit  $l = l(G)$ . Ein Punkt  $x$  der Ebene, der eine Ecke ist, oder auf einer Kurve (also auf einer Kante) liegt, heißt *Randpunkt* eines Landes  $F$ , wenn man  $x$  mit einem Punkt aus  $F$  durch einen stückweise glatten Jordanbogen verbinden kann, der bis auf  $x$  in  $F$  verläuft. Die Gesamtheit aller Randpunkte eines Landes  $F$  nennen wir *Grenze* oder *Rand* von  $F$ . Zwei verschiedene Länder  $F_1$  und  $F_2$  heißen *benachbart* oder *adjazent*, wenn es eine Kante gibt, die sowohl zum Rand von  $F_1$  als auch zum Rand von  $F_2$  gehört.

**Bemerkung 11.3.** Bei der Definition 11.3 wurde implizit der bekannte *Jordansche Kurvensatz* herangezogen, der folgendermaßen lautet: Eine stückweise glatte Jordankurve  $C$  zerlegt die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete, von denen genau eines nicht beschränkt ist. D.h., zwei verschiedene Punkte der Ebene können genau dann durch einen stückweise glatten Jordanbogen verbunden werden, der  $C$  nicht trifft, wenn sie beide im Inneren oder beide im Äußeren von  $C$  liegen. So einleuchtend dieser Satz auch ist, so schwierig ist ein wirklich exakter Beweis, auf den wir hier natürlich nicht eingehen wollen.

Daher werden wir uns hier und im folgenden stark auf unsere Anschauung verlassen und guten Willen zeigen müssen, denn es liegt nicht in der Absicht der Autors, auf alle topologischen Einzelheiten und Feinheiten einzugehen.



Die Ordnung, die Größe und die Anzahl der Länder einer Landkarte weisen einen interessanten Zusammenhang auf, den Euler [2], [3] 1752 schon für die Anzahl der Ecken, der Kanten und der Seitenflächen eines konvexen Polyeders gefunden hat. Ein *Polyeder* ist ein Körper im Raum, der durch ebene Flächen begrenzt ist. Ein solcher Körper heißt konvex, wenn je zwei seiner inneren Punkte durch eine Gerade verbunden werden können, die im Inneren des Körpers verläuft.

**Satz 11.2 (Eulersche Polyederformel, Euler [2], [3] 1752).** Ist  $G$  eine Landkarte, so gilt

$$l(G) = 1 + \mu(G).$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Kantenzahl  $m(G)$ . Ist  $m(G) = 0$ , so gilt  $\mu(G) = 0$  und  $l(G) = 1$ , also  $l(G) = 1 + \mu(G)$ . Nun sei  $m(G) \geq 1$ .

Ist  $G$  ein Wald, so gilt nach Satz 2.4  $\mu(G) = m(G) - n(G) + \kappa(G) = 0$  und  $l(G) = 1$ , woraus die gewünschte Formel folgt.

Ist  $G$  kein Wald, so besitzt  $G$  einen Kreis und damit eine Kante  $k$ , die zu einem Kreis gehört. Setzt man  $G' = G - k$ , so gilt nach Satz 1.7  $\kappa(G') = \kappa(G)$ . Da nach Entfernen von  $k$  die beiden verschiedenen an der Kante  $k$  angrenzenden Länder verschmelzen, ergibt sich  $l(G') = l(G) - 1$ ,  $n(G') = n(G)$  und  $m(G') = m(G) - 1$ . Aus diesen Beobachtungen folgt die Eulersche Polyederformel für  $G$  durch Induktion aus der für  $G'$ . ||

**Folgerung 11.1.** Ist  $G$  ein zusammenhängender und ebener Graph, so gilt

$$n(G) + l(G) - m(G) = 2.$$

**Folgerung 11.2.** Es sei  $G$  ein ebener Graph. Eine Kante  $k$  von  $G$  ist genau dann eine Brücke von  $G$ , wenn  $k$  zum Rand eines einzigen Landes gehört.

*Beweis.* Wegen Folgerung 1.1 ist  $k$  genau dann eine Brücke von  $G$ , wenn  $\kappa(G - k) = \kappa(G) + 1$  gilt. Dies ist nach der Eulerschen Polyederformel äquivalent zu

$$l(G - k) = 1 + \mu(G - k) = 1 + \mu(G) = l(G).$$

Daher besitzen  $G - k$  und  $G$  die gleiche Anzahl von Ländern, womit die Folgerung bewiesen ist. ||

**Bemerkung 11.4.** Nach der Eulerschen Polyederformel hat jede Einbettung eines planaren Graphen in die Ebene die gleiche Anzahl von Ländern. Daher können wir bei einem planaren Graphen von der Anzahl seiner Länder sprechen.

**Satz 11.3.** Ist  $G$  ein planarer Graph mit Taillenweite  $3 \leq t(G) < \infty$ , so gilt

$$m(G) \leq \frac{t(G)(n(G) - 1 - \kappa(G))}{t(G) - 2} \leq \frac{t(G)(n(G) - 2)}{t(G) - 2}.$$

*Beweis.* O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß  $G$  ein ebener Graph ist. Nach Voraussetzung wird jedes Land von mindestens  $t(G)$  Kanten begrenzt. Da jede Kante zum Rand von höchstens zwei Ländern gehört, folgt durch Abzählung  $t(G)l(G) \leq 2m(G)$ . Setzt man diese Ungleichung in die Eulersche Polyederformel ein, so erhält man durch eine einfache Rechnung die gewünschte Abschätzung. ||



**Folgerung 11.3.** Ist  $G$  ein schlichter und planarer Graph der Ordnung  $n(G) \geq 3$ , so gilt

$$m(G) \leq 3n(G) - 6.$$

*Beweis.* Ist  $t(G) < \infty$ , so liefert Satz 11.3 unmittelbar diese Ungleichung. Ist  $t(G) = \infty$ , also ist  $G$  ein Wald, so ergibt sich die Behauptung leicht aus  $\mu(G) = 0$ .  $\parallel$

Im nächsten Satz stellen wir die beiden wichtigsten nicht planaren Graphen vor (man vgl. dazu Satz 11.17 von Kuratowski).

**Satz 11.4.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind nicht planar.

*Beweis.* Folgerung 11.3 zeigt uns direkt, daß der  $K_5$  nicht planar ist.

Da der  $K_{3,3}$  bipartit ist, gilt für seine Tailleweite  $t(K_{3,3}) \geq 4$ . Nun folgt die Behauptung aus Satz 11.3.  $\parallel$

**Satz 11.5.** Es sei  $G$  ein planarer Graph.

- i) Ist  $G$  schlicht, so gilt  $\delta(G) \leq 5$ .
- ii) Ist  $t(G) \geq 4$ , so gilt  $\delta(G) \leq 3$ .
- iii) Ist  $t(G) \geq 6$ , so gilt  $\delta(G) \leq 2$ .

*Beweis.* i) Ist  $n(G) \leq 2$ , so gibt es nichts zu beweisen. Im Fall  $n(G) \geq 3$  erhalten wir aus der Annahme  $\delta(G) \geq 6$  zusammen mit Folgerung 11.3 den Widerspruch

$$6n(G) \leq \sum_{x \in E(G)} d(x, G) = 2m(G) \leq 6n(G) - 12.$$

ii) Aus der Annahme  $\delta(G) \geq 4$  erhalten wir zusammen mit Satz 11.3 den Widerspruch

$$4n(G) \leq 2m(G) \leq \frac{2t(G)}{t(G) - 2}(n(G) - 2) \leq 4(n(G) - 2).$$

iii) Aus der Annahme  $\delta(G) \geq 3$  erhalten wir zusammen mit Satz 11.3 den Widerspruch

$$3n(G) \leq 2m(G) \leq \frac{2t(G)}{t(G) - 2}(n(G) - 2) \leq 3(n(G) - 2). \quad \parallel$$

**Satz 11.6.** Ist  $G$  ein schlichter, planarer Graph mit  $\delta(G) \geq 3$ , so gilt

$$\tau_5 + 2\tau_4 + 3\tau_3 \geq 12 + \tau_7 + 2\tau_8 + 3\tau_9 + \cdots + (\Delta - 6)\tau_\Delta.$$

*Beweis.* Die Identitäten  $n = \tau_3 + \tau_4 + \cdots + \tau_\Delta$  und  $2m = 3\tau_3 + 4\tau_4 + \cdots + \Delta\tau_\Delta$  liefern zusammen mit Folgerung 11.3

$$\begin{aligned} 2m &= 3\tau_3 + 4\tau_4 + \cdots + \Delta\tau_\Delta \\ &\leq 6n - 12 = 6\tau_3 + 6\tau_4 + \cdots + 6\tau_\Delta - 12, \end{aligned}$$

woraus das gewünschte Ergebnis unmittelbar folgt.  $\parallel$

**Folgerung 11.4.** Ist  $G$  ein schlichter, planarer Graph mit  $\delta(G) \geq 3$ , so existieren mindestens 4 Ecken vom Grad kleiner oder gleich fünf.

Daraus ergibt sich wiederum, daß alle schlichten und planaren Graphen der Ordnung  $n \geq 4$  mindestens 4 Ecken vom Grad kleiner oder gleich fünf besitzen.

**Satz 11.7.** Es sei  $G$  eine  $r$ -reguläre ( $r \geq 3$ ), zusammenhängende Landkarte ohne Brücken mit der Eigenschaft, daß alle Länder von der gleichen Anzahl  $t \geq 3$  von Kanten begrenzt wird. Ist  $n(G) = n$  und  $l(G) = l$ , so sind genau die folgenden fünf Fälle möglich (siehe auch die folgende Skizze).

- i) Es gilt  $r = 3$ ,  $t = 3$ ,  $n = 4$  und  $l = 4$  (*Tetraeder*).
- ii) Es gilt  $r = 3$ ,  $t = 4$ ,  $n = 8$  und  $l = 6$  (*Hexaeder oder Würfel*).
- iii) Es gilt  $r = 3$ ,  $t = 5$ ,  $n = 20$  und  $l = 12$  (*Dodekaeder*).
- iv) Es gilt  $r = 4$ ,  $t = 3$ ,  $n = 6$  und  $l = 8$  (*Oktaeder*).
- v) Es gilt  $r = 5$ ,  $t = 3$ ,  $n = 12$  und  $l = 20$  (*Ikosaeder*).

*Beweis.* Nach Satz 11.5 i) gilt einerseits  $3 \leq r \leq 5$  und wegen  $r \geq 3$  folgt aus Satz 11.5 iii) andererseits  $3 \leq t \leq 5$ . Da  $G$  keine Brücken besitzt, gehört jede Kante von  $G$  zum Rand von genau zwei Ländern, und da jedes Land von genau  $t$  Kanten begrenzt wird, folgt durch Abzählung

$$t \cdot l = 2m(G) = r \cdot n. \quad (11.1)$$

Da  $G$  zusammenhängend ist ergibt sich aus der Eulerschen Polyederformel oder aus Folgerung 11.1 und (11.1)

$$\begin{aligned} 8 &= 4n + 4l - 4m(G) = 4n + 4l - 2m(G) - 2m(G) \\ &= 4n + 4l - tl - rn = n(4 - r) + l(4 - t) \end{aligned} \quad (11.2)$$

und daher  $r = 3$  oder  $t = 3$ .

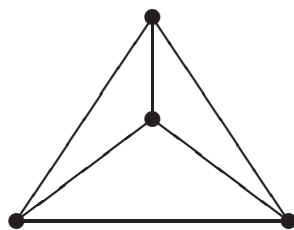
i) Ist  $r = 3$  und  $t = 3$ , so folgt aus (11.1) und (11.2)  $l = n$  und  $8 = n + l$  und daher  $n = 4$  und  $l = 4$  (*Tetraeder*).

ii) Ist  $r = 3$  und  $t = 4$ , so folgt aus (11.1) und (11.2)  $4l = 3n$  und  $8 = n$  und daher  $n = 8$  und  $l = 6$  (*Hexaeder oder Würfel*).

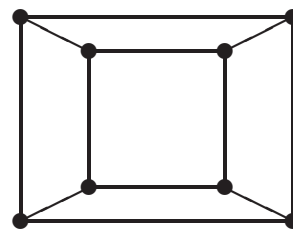
iii) Ist  $r = 3$  und  $t = 5$ , so folgt aus (11.1) und (11.2)  $5l = 3n$  und  $8 = n - l$  und daher  $n = 20$  und  $l = 12$  (*Dodekaeder*).

iv) Ist  $r = 4$  und  $t = 3$ , so folgt aus (11.1) und (11.2)  $3l = 4n$  und  $8 = l$  und daher  $n = 6$  und  $l = 8$  (*Oktaeder*).

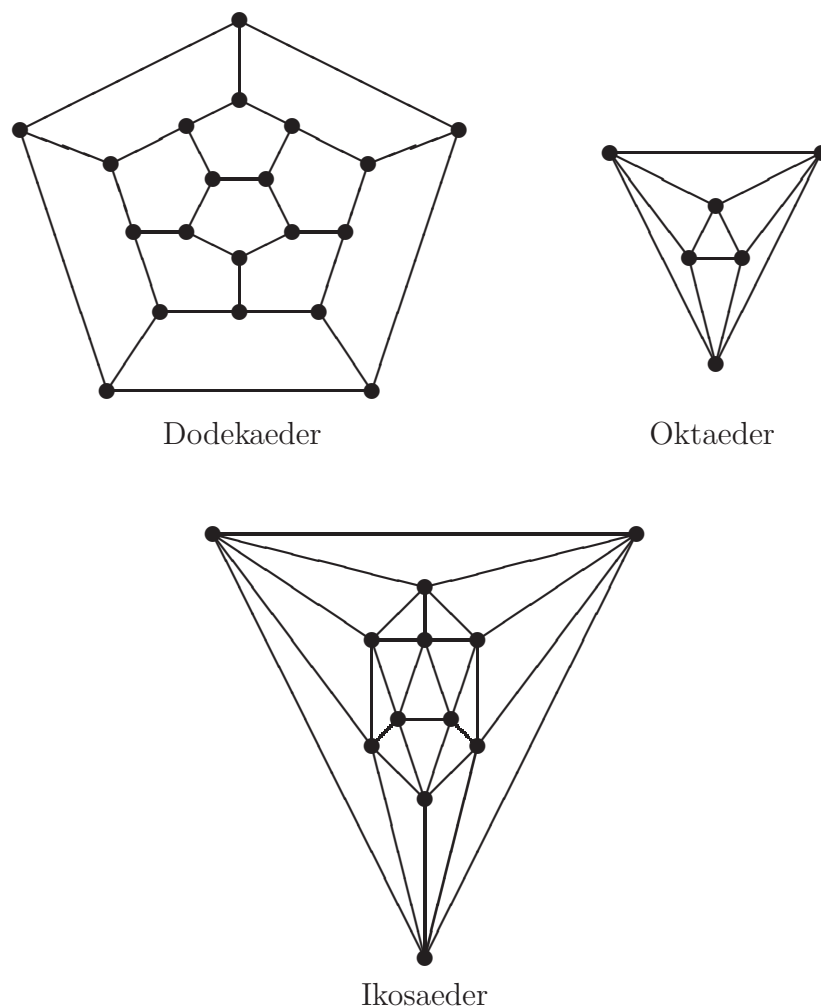
v) Ist  $r = 5$  und  $t = 3$ , so folgt aus (11.1) und (11.2)  $3l = 5n$  und  $8 = l - n$  und daher  $n = 12$  und  $l = 20$  (*Ikosaeder*). ||



Tetraeder



Hexaeder



**Bemerkung 11.5.** Durch einige Zusatzüberlegungen, die hier aber nicht durchgeführt werden sollen, gelangt man zu der Einsicht, daß die 5 oben skizzierten Graphen die einzigen sind, die den Bedingungen aus Satz 11.7 genügen.

**Bemerkung 11.6.** Ist  $G$  ein schlichter, planarer Graph mit  $\delta(G) = 5$ , so folgt  $\tau_5 \geq 12$  aus Satz 11.6. Nun hat das Ikosaeder genau 12 Ecken vom Grad 5, womit es von minimaler Ordnung unter allen schlichten planaren Graphen  $G$  mit  $\delta(G) = 5$  ist.

**Bemerkung 11.7.** Ein Polyeder heißt *regelmäßig*, wenn es konvex ist und alle Flächen kongruente regelmäßige Vielecke sind (so daß die entsprechenden Winkel im Polyeder alle gleich sind). Bereits in der Antike haben die alten Griechen die fünf regelmäßigen Polyeder Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder, Oktaeder und Ikosaeder entdeckt, und sie werden als die *Platonischen Körper* bezeichnet. Lange Zeit versuchten die griechischen Gelehrten weitere regelmäßige Polyeder zu ermitteln, bis Theaetetus (414 – 368 v. Chr.) bewies, daß es tatsächlich nicht mehr als 5 gibt.

Die Ecken und Kanten eines konvexen Polyeders bilden einen schlichten Graphen im Raum. Man überlegt sich, daß der Graph eines konvexen Polyeders ein planarer Graph ist (z.B. durch aufblasen zu einer Kugel und anschließender stereographischer Projektion). Liegt nun ein regelmäßiges Polyeder vor, so führt die gerade beschriebene Prozedur zu einer  $r$ -regulären ( $r \geq 3$ ) und zusammenhängenden Landkarte  $G$  ohne Brücken mit der Eigenschaft, daß jedes Land von der gleichen Anzahl  $t \geq 3$  von Kanten begrenzt wird. Damit zeigen Satz 11.7 und

die obigen Bemerkungen, daß es tatsächlich genau die 5 schon lange bekannten Platonischen Körper gibt.

## 11.2 Die Bondage Zahl

In diesem Abschnitt wollen wir weitere Anwendungen der Eulerschen Polyederformel vorstellen, die mit dem Dominanzkonzept aus Kapitel 10 zusammenhängen.

**Definition 11.4.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $m(G) \geq 1$ . Die *Bondage Zahl*  $b(G)$  von  $G$  ist die minimale Anzahl von Kanten, deren Entfernen aus  $G$  die Dominanzzahl steigen läßt.

Erste Untersuchungen zur Bondage Zahl stammen von Bauer, Harary, Nieminen und Suffel [1] 1983. Der Name Bondage Zahl wurde 1990 von Fink, Jacobson, Kinch und Roberts [2] eingeführt.

**Satz 11.8 (Hartnell, Rall [1] 1994).** Sind  $u$  und  $v$  zwei adjazente Ecken in einem schlichten Graphen  $G$ , so gilt

$$b(G) \leq d(u, G) + d(v, G) - 1 - |N(u, G) \cap N(v, G)|.$$

*Beweis.* Der Teilgraph  $H$  entstehe aus  $G$  durch löschen aller zu  $u$  inzidenten Kanten und durch löschen aller zu  $v$  inzidenten Kanten, die mit keiner Ecke aus  $N(u, G) \cap N(v, G)$  inzidieren. In  $H$  ist  $u$  eine isolierte Ecke und  $v$  ist nur noch zu den Ecken aus  $N(u, G) \cap N(v, G)$  adjazent. Ist  $D$  eine minimale Dominanzmenge von  $H$ , so gilt  $u \in D$  und es existiert eine Ecke  $x \in (\{v\} \cup (N(u, G) \cap N(v, G)))$  mit  $x \in D$ . Da die Ecke  $x$  in  $G$  die Ecke  $u$  dominiert, ist aber  $D - \{u\}$  eine Dominanzmenge von  $G$ , und da wir genau  $d(u, G) + d(v, G) - 1 - |N(u, G) \cap N(v, G)|$  Kanten aus  $G$  entfernt haben, ist der Satz bewiesen.  $\parallel$

Wendet man Satz 11.8 auf eine Ecke  $u$  vom Minimalgrad an, so ergibt sich unmittelbar das nächste Ergebnis.

**Folgerung 11.5 (Bauer, Harary, Nieminen, Suffel [1] 1983).** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 1$ , so gilt  $b(G) \leq \Delta(G) + \delta(G) - 1$ .

**Satz 11.9 (Teschner [2] 1997).** Sind  $u$  und  $v$  zwei Ecken vom Abstand 2 in einem schlichten Graphen  $G$ , so gilt

$$b(G) \leq d(u, G) + d(v, G) - 1.$$

*Beweis.* Es sei  $w$  ein gemeinsamer Nachbar von  $u$  und  $v$ . Der Teilgraph  $H$  entstehe aus  $G$  durch löschen aller zu  $u$  inzidenten Kanten und durch löschen aller zu  $v$  inzidenten Kanten, mit Ausnahme der Kante  $vw$ . In  $H$  ist  $u$  eine isolierte Ecke und  $v$  ist nur adjazent zu  $w$ . Ist  $D$  eine minimale Dominanzmenge von  $H$ , so gilt  $u \in D$  und o.B.d.A.  $w \in D$ . Da die Ecke  $w$  in  $G$  die Ecke  $u$  dominiert, ist aber  $D - \{u\}$  eine Dominanzmenge von  $G$ , und da wir genau  $d(u, G) + d(v, G) - 1$  Kanten aus  $G$  entfernt haben, ist auch dieser Satz bewiesen.  $\parallel$

**Folgerung 11.6 (Bauer, Harary, Nieminen, Suffel [1] 1983).** Ist  $T$  ein nicht trivialer Baum, so gilt  $b(T) \leq 2$ .

*Beweis.* Ist  $2 \leq n(T) \leq 3$ , so gilt offensichtlich  $b(T) = 1$ . Daher gelte nun  $n(T) \geq 4$ . Besitzt  $T$  eine Ecke  $u$ , die adjazent zu zwei Ecken ist, so ergibt sich aus Satz 11.9 sofort  $b(T) = 1$ .

Ist jede Ecke zu höchstens einer Endecke adjazent, so besitzt  $T$  eine Ecke  $u$  vom Grad 2, die zu genau einer Endecke  $v$  adjazent ist (man vgl. den Beweis von Satz 8.21). Nun folgt  $b(T) \leq d(u) + d(v) - 1 = 2$  aus Satz 11.8.  $\parallel$

Ist  $G$  ein schlichter planarer Graph mit  $\delta(G) \geq 1$ , so folgt aus Satz 11.5 i) und Folgerung 11.5 unmittelbar die Abschätzung  $b(G) \leq \Delta(G) + 4$ . Im Zusammenhang mit dieser Ungleichung haben wir 1998 folgende Vermutung aufgestellt:

**Vermutung 11.1 (Dunbar, Haynes, Teschner, Volkmann [1] 1998).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und planarer Graph mit  $m(G) \geq 1$ , so gilt  $b(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Satz 11.10 (Kang, Yuan [1] 2000).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und planarer Graph mit  $m = m(G) \geq 1$ , so gilt  $b(G) \leq \Delta(G) + 2$ .

*Beweis* (Carlson, Develin [1] 2006). Ist  $\delta(G) \leq 3$ , so ergibt sich das Resultat sofort aus Folgerung 11.5. Daher betrachten wir nur noch den Fall  $\Delta(G) \geq \delta(G) \geq 4$ , und wir nehmen an, daß  $b(G) \geq \Delta(G) + 3$  gilt.

Für jede Kante  $k_i = xy \in K(G)$  definieren wir die beiden Terme  $a_i = \frac{1}{d(x)} + \frac{1}{d(y)}$  und  $f_i = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$ , wobei  $c_1$  und  $c_2$  die Anzahl der Kanten bedeuten, die die beiden Länder begrenzen zu deren Rand die Kante  $k_i$  gehört (ist  $k_i$  eine Brücke, so wird  $f_i = \frac{1}{c_1}$  gesetzt). Ist  $v \in E(G)$ , so tritt in der Folge  $a_1, a_2, \dots, a_m$  die Zahl  $\frac{1}{d(v)}$  genau  $d(v)$  mal auf, und daher ergibt sich  $\sum_{i=1}^m a_i = n(G)$ . Wird ein Land  $F$  von  $G$  von den Kanten  $h_1, h_2, \dots, h_p$  begrenzt, so tritt in der Folge  $f_1, f_2, \dots, f_m$  die Zahl  $\frac{1}{p}$  genau  $p$  mal auf, woraus  $\sum_{i=1}^m f_i = l(G)$  folgt. Insgesamt liefert die Eulerschen Polyederformel oder Folgerung 11.1

$$\sum_{i=1}^m (a_i + f_i - 1) = n(G) + l(G) - m(G) = 2. \quad (11.3)$$

Für jedes  $i$  betrachten wir im folgenden die Größe  $a_i + f_i - 1$ . Ist  $k_i$  eine Brücke, so ergibt sich wegen  $\delta(G) \geq 4$  die Abschätzung  $a_i + f_i - 1 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \leq 0$ .

Im folgenden sei  $k_i$  keine Brücke. Ist  $d(x) = 4$ , so folgt aus unserer Annahme  $b(G) \geq \Delta(G) + 3$  und Satz 11.8 sofort  $d(y) = \Delta(G) \geq 4$  und  $x$  und  $y$  haben keinen gemeinsamen Nachbarn. Das liefert uns  $c_1, c_2 \geq 4$  und damit  $a_i + f_i - 1 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$ . Da  $d(y) = 4$  zu dem gleichen Resultat führt, gelte nun  $d(x), d(y) \geq 5$ . Ist  $d(x) = 5$  und gilt  $c_1 = c_2 = 3$ , so haben  $x$  und  $y$  zwei gemeinsame Nachbarn, womit sich aus Satz 11.8 der Widerspruch  $b(G) \leq 5 + \Delta(G) - 1 - 2 = \Delta(G) + 2$  ergibt. Ist  $d(x) = 5$  und o.B.d.A.  $c_1 \geq 4$ , so folgt  $a_i + f_i - 1 \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 \leq 0$ . Im verbleibenden Fall  $d(x), d(y) \geq 6$  erkennt man aber  $a_i + f_i - 1 \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1 = 0$ , woraus sich insgesamt  $\sum_{i=1}^m (a_i + f_i - 1) \leq 0$  ergibt. Dieser Widerspruch zu (11.3) beendet den Beweis.  $\parallel$

Mit wesentlich höherem technischen Aufwand haben Kang und Yuan [1] Vermutung 11.1 für  $\Delta \geq 7$  bestätigt, denn sie haben folgendes interessante Resultat erzielt, das wir hier nicht beweisen werden.

**Satz 11.11 (Kang, Yuan [1] 2000).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und planarer Graph mit  $m(G) \geq 1$ , so gilt  $b(G) \leq 8$ .

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Taillenweite  $t(G) \geq 4$  ist, konnten ich kürzlich zusammen mit meinen Schülern Dr. Miranca Fischermann und Prof. Dr. Dieter Rautenbach Satz 11.11 weiter verbessern.

**Satz 11.12 (Fischermann, Rautenbach, Volkmann [1] 2003).** Ist  $G$  ein schlichter, planarer und zusammenhängender Graph mit  $m(G) \geq 1$  und  $t(G) \geq 4$ , so gilt  $b(G) \leq 6$ .

*Beweis.* Ist  $G$  ein Baum, so zeigt uns Folgerung 11.6 das gewünschte Ergebnis. Daher gelte im folgenden  $4 \leq t(G) < \infty$ .

Wegen  $t(G) \geq 4$ , folgt  $\delta = \delta(G) \leq 3$  aus Satz 11.5 ii). Ist  $\Delta = \Delta(G) \leq 4$ , so liefert Folgerung 11.5 sofort  $b(G) \leq 6$ . Daher sei nun  $\Delta \geq 5$ .

Die Identitäten  $n(G) = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_\Delta$  und  $2m(G) = \tau_1 + 2\tau_2 + \dots + \Delta\tau_\Delta$  liefern zusammen mit Satz 11.3

$$\begin{aligned} 2m(G) &= \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 \dots + \Delta\tau_\Delta \\ &\leq 4n(G) - 8 = 4\tau_1 + 4\tau_2 + 4\tau_3 + \dots + 4\tau_\Delta - 8 \end{aligned}$$

und damit

$$3\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3 \geq \tau_5 + 2\tau_6 + \dots + (\Delta - 4)\tau_\Delta + 8. \quad (11.4)$$

*Fall 1.* Es gelte  $\Delta = 5$ . Ist  $\delta \leq 2$ , so ergibt Folgerung 11.5  $b(G) \leq 6$ . Ist  $\delta = 3$ , so folgt das gewünschte Ergebnis aus den Sätzen 11.8 und 11.9, falls es eine Ecke  $u$  vom Grad 3 und eine Ecke  $v$  mit  $d(u, v) \leq 2$  und  $d(v) = 4$  gibt. Existieren solche Ecken nicht, so erhalten wir im Widerspruch zu (11.4) die Abschätzung  $\tau_5 \geq 3\tau_3$ .

*Fall 2.* Es gelte  $\Delta = 6$ . Ist  $\delta = 1$ , so ergibt Folgerung 11.5  $b(G) \leq 6$ . Ist  $2 \leq \delta \leq 3$ , so folgt  $b(G) \leq 6$  aus den Sätzen 11.8 und 11.9, falls es eine Ecke  $u$  vom Grad 3 und eine Ecke  $v$  mit  $d(u, v) \leq 2$  und  $d(v) \leq 4$  oder eine Ecke  $u$  vom Grad 2 und eine Ecke  $v$  mit  $d(u, v) \leq 2$  und  $d(v) \leq 5$  gibt. Existieren solche Ecken nicht, so muß  $\tau_5 + \tau_6 \geq 2\tau_2 + 3\tau_3$  gelten und (11.4) liefert dann den Widerspruch

$$2\tau_2 + \tau_3 \geq \tau_5 + 2\tau_6 + 8 \geq 2\tau_2 + 3\tau_3 + 8.$$

*Fall 3.* Es gelte  $\Delta \geq 7$ . Die Sätze 11.8 und 11.9 liefern  $b(G) \leq 6$ , falls es eine Ecke  $u$  vom Grad 3 und eine Ecke  $v$  mit  $d(u, v) \leq 2$  und  $d(v) \leq 4$  oder eine Ecke  $u$  vom Grad 2 und eine Ecke  $v$  mit  $d(u, v) \leq 2$  und  $d(v) \leq 5$  oder eine Ecke  $u$  vom Grad 1 und eine Ecke  $v$  mit  $d(u, v) \leq 2$  und  $d(v) \leq 6$  gibt. Existieren solche Ecken nicht, so muß  $\tau_5 + \tau_6 + \dots + \tau_\Delta \geq \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3$  und  $\tau_7 + \tau_8 + \dots + \tau_\Delta \geq \tau_1$  gelten. Zusammen mit (11.4) ergibt sich nun folgender Widerspruch

$$\begin{aligned} 3\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3 &\geq \tau_5 + 2\tau_6 + 3\tau_7 + \dots + (\Delta - 4)\tau_\Delta + 8 \\ &\geq (\tau_5 + \tau_6 + \tau_7 + \dots + \tau_\Delta) + 2(\tau_7 + \tau_8 + \dots + \tau_\Delta) + 8 \\ &\geq 3\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + 8. \quad \parallel \end{aligned}$$

Erweiterungen der Sätze 11.11 und 11.12 findet man in einer Arbeit von Huang und Xu [1] aus dem Jahre 2007. Wir glauben, daß man die Sätze 11.11 und 11.12 in folgendem Sinne noch verbessern kann.

**Vermutung 11.2 (Fischermann, Rautenbach, Volkmann [1] 2003).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und planarer Graph mit  $m(G) \geq 1$ , so gilt  $b(G) \leq 7$ .

**Vermutung 11.3 (Fischermann, Rautenbach, Volkmann [1] 2003).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und planarer Graph mit  $m(G) \geq 1$  und  $t(G) \geq 4$ , so gilt  $b(G) \leq 5$ .

**Vermutung 11.4 (Fischermann, Rautenbach, Volkmann [1] 2003).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und planarer Graph mit  $m(G) \geq 1$  und  $t(G) \geq 5$ , so gilt  $b(G) \leq 4$ .

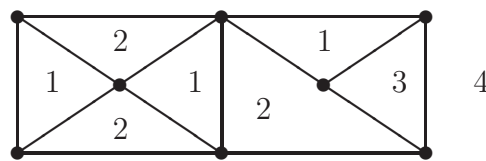
Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen konnte Chen [1] 2005 die Vermutungen 11.3 und 11.4 bestätigen.

### 11.3 Der Fünffarbensatz

**Definition 11.5.** Ist  $G$  eine Landkarte und  $\Lambda(G)$  die Menge seiner Länder, so nennt man eine Abbildung  $h: \Lambda(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$  *Färbung* oder  $p$ -*Färbung* von  $G$ , wenn  $h(F_1) \neq h(F_2)$  für zwei verschiedene benachbarte Länder  $F_1$  und  $F_2$  gilt. Man sagt auch, daß sich die Landkarte  $G$  mit  $p$  Farben färben läßt.

D.h., gehört eine Kante zum Rand zweier verschiedener Länder, so müssen die Länder verschiedene Farben besitzen. Gehört aber nur eine Ecke und keine Kante zum Rand von zwei verschiedenen Ländern, so dürfen sie gleich gefärbt sein.

**Beispiel 11.2.** Die skizzierte Landkarte kann mit 4 Farben aber nicht mit weniger Farben gefärbt werden. Dabei besitzt das äußere Gebiet die Farbe 4.



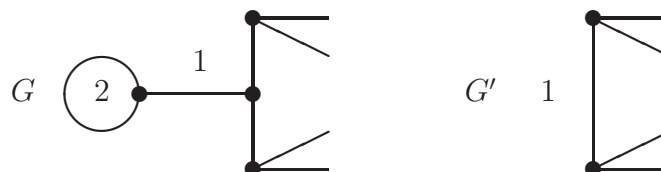
**Satz 11.13 (Fünffarbensatz, Heawood [1] 1890).** Jede zusammenhängende Landkarte läßt sich mit fünf Farben färben.

*Beweis.* Da Ecken vom Grad 1 oder 2 beim Färben von Landkarten keine Rolle spielen, gelte o.B.d.A.  $\delta(G) \geq 3$ . Dann besitzt  $G$  aber nach Satz 11.5 iii) einen Kreis  $C$  der Länge  $L(C) \leq 5$ .

Weiter kann man o.B.d.A.  $G$  als 3-regulär voraussetzen. Denn ersetzt man jede Ecke  $x$  mit  $d(x, G) \geq 4$  durch einen Kreis  $C$  der Länge  $d(x, G)$  und verbindet alle zu  $x$  inzidenten Kanten mit genau einer Ecke des Kreises  $C$ , so erhält man eine 3-reguläre Landkarte  $G'$ . Nun ist leicht einzusehen, daß die Fünffärbbarkeit von  $G'$ , die Fünffärbbarkeit von  $G$  nach sich zieht.

Der Rest des Beweises erfolgt durch Induktion nach der Eckenzahl. Die kleinste 3-reguläre Landkarte besteht aus einer Kante, die an beiden Enden eine Schlinge hat. Diese Landkarte hat drei Länder, die man mit drei Farben färben kann. Beim Induktionsschluß betrachten wir die fünf möglichen Fälle, daß  $G$  einen Kreis der Länge 1, 2, 3, 4 oder 5 besitzt. In jedem dieser Fälle werden wir aus  $G$  Kanten entfernen, die mit diesen Kanten inzidenten Ecken in den noch verbleibenden inzidenten Kanten verschmelzen, um wieder eine 3-reguläre Landkarte  $G'$  mit weniger Ecken zu erhalten. Danach werden wir aus einer Färbung von  $G'$  eine Färbung von  $G$  erzeugen (man vgl. die Skizzen).

1. *Fall:*  $G$  besitzt eine Schlinge.



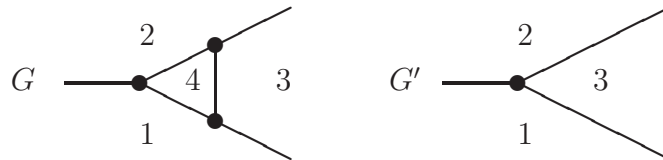
2. *Fall:*  $G$  besitzt einen Kreis der Länge 2.





Bilden in  $G'$  die mit 1 und 2 gefärbten Länder ein gemeinsames Land, so ersetze man in der Skizze jede 2 durch eine 1.

3. Fall:  $G$  besitzt einen Kreis der Länge 3.



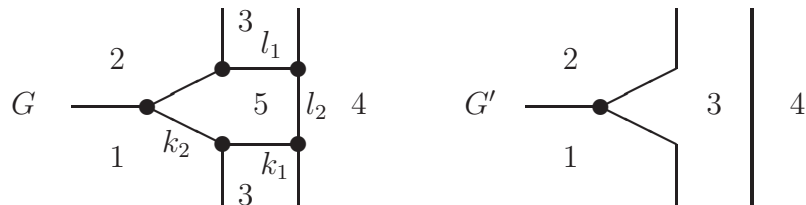
Falls in  $G'$  von den mit 1, 2 und 3 gefärbten Ländern gewisse Länder zusammenfallen, so macht die Färbung von  $G$  erst recht keine Schwierigkeit.

4. Fall:  $G$  besitzt einen Kreis der Länge 4.



Falls in  $G'$  von den mit 1, 2, 3 und 4 gefärbten Ländern gewisse Länder zusammenfallen, so färbe man  $G$  entsprechend.

5. Fall:  $G$  besitzt einen Kreis der Länge 5.



In diesem Fall ist es möglich, daß die in  $G$  mit der Farbe 3 gefärbten Länder an einer Kante zusammenstoßen, was natürlich nicht erlaubt ist. Dann kann man aber aus  $G$  die beiden Kanten  $k_2$  und  $l_2$  an Stelle von  $k_1$  und  $l_1$  entfernen, ohne daß dabei derselbe Effekt eintritt.

Da wir alle möglichen Fälle diskutiert haben, ist der Fünffarbensatz bewiesen. ||

Der hier geführte Beweis des Fünffarbensatzes stammt in wesentlichen Teilen aus den Büchern von Rademacher und Toeplitz [1] 1930 sowie Ringel [1] 1959. Durch Eckenfärbungen der sogenannten dualen Graphen wollen wir einen weiteren Beweis des Fünffarbensatzes vorstellen.

**Definition 11.6.** Ist  $G$  ein ebener Graph, so bestehe die Eckenmenge des *dualen Graphen*  $G^*$  aus den Ländern von  $G$ . Gehört eine Kante  $k$  von  $G$  zum Rand von zwei verschiedenen Ländern  $a$  und  $b$ , so sei die duale Kante  $k^*$  in  $G^*$  mit  $a$  und  $b$  inzident. Gehört  $k \in K(G)$  zum Rand eines einzigen Landes  $a$ , so sei  $k^*$  in  $G^*$  eine Schlinge, die mit  $a$  inzidiert.

**Bemerkung 11.8.** Ist  $G$  eine Landkarte, so kann man den dualen Graphen  $G^*$  etwa wie folgt konstruieren. In jedem Land  $F_i$  wähle man einen Punkt  $w_i$  der Ebene. Gehört eine Kante  $k \in K(G)$  zum Rand der beiden verschiedenen Länder  $F_p$  und  $F_q$ , so verbinde man die beiden Punkte  $w_p$  und  $w_q$  durch einen stückweise glatten Jordanbogen, der die Kante  $k$  genau einmal kreuzt und keine weiteren Punkte mit  $G$  gemeinsam hat. Gehört  $k$  zum Rand eines Landes, so verfähre man ähnlich. Darüber hinaus überlegt man sich, daß man diese Konstruktion so durchführen kann, daß sich keine zwei Kanten von  $G^*$  schneiden. Daher ist auch der duale Graph  $G^*$  planar, so daß wir auch  $G^*$  als Landkarte auffassen können. Nach Konstruktion gilt  $n(G^*) = l(G)$  und  $m(G^*) = m(G)$ . Weiter ist  $G^*$  immer zusammenhängend, denn aus jedem beschränkten Gebiet von  $G$  gelangt man über Kanten benachbarter Gebiete zum äußeren Gebiet von  $G$ . Daher liefert die Eulersche Polyederformel

$$\begin{aligned} l(G^*) &= m(G^*) - n(G^*) + 2 \\ &= m(G) - l(G) + 2 \\ &= n(G) - \kappa(G) + 1, \end{aligned}$$

womit insbesondere für zusammenhängende Landkarten  $G$  die Identität  $l(G^*) = n(G)$  folgt.

**Definition 11.7.** Eine Landkarte  $G$  heißt *normal*, falls  $G$  weder Schlingen noch Brücken besitzt,  $\kappa(G) = 1$  gilt und  $\delta(G) \geq 3$  ist.

**Bemerkung 11.9.** Um zu zeigen, daß man beliebige zusammenhängende Landkarten  $G$  mit fünf Farben färben kann, genügt es, dies für normale Landkarten nachzuweisen. Denn Schlingen können wir weglassen, da das von der Schlinge berandete Land nur mit einem weiteren Land benachbart ist und somit nach Färbung des Restes eine der 4 verfügbaren Farben erhalten kann. Ferner können wir nach Folgerung 11.2 annehmen, daß  $G$  keine Brücken besitzt. Denn ist  $k$  eine Brücke von  $G$ , so folgt aus der Fünffärbbarkeit von  $G - k$  unmittelbar die von  $G$ . Schließlich können wir alle Ecken, die nur mit zwei Kanten inzidieren, verschwinden lassen, indem wir diese beiden Kanten miteinander verschmelzen.

**Definition 11.8.** Ist  $G$  ein Multigraph, so nennt man (man vgl. auch Definition 12.1) eine Abbildung  $h: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$  eine *echte Eckenfärbung* oder *echte  $q$ -Eckenfärbung* von  $G$ , falls  $h(x) \neq h(y)$  für alle adjazenten Ecken  $x, y \in E(G)$  gilt.

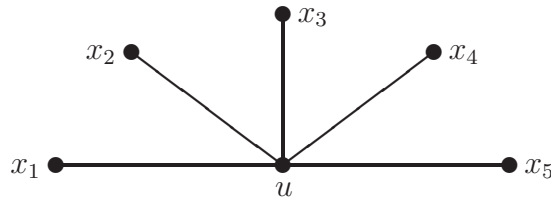
Da der duale Graph  $G^*$  einer normalen Landkarte  $G$  ein ebener Multigraph ist, folgt der Fünffarbensatz sofort aus dem nachfolgenden Ergebnis über echte Eckenfärbungen.

**Satz 11.14.** Jeder ebene Multigraph besitzt eine echte 5-Eckenfärbung.

*Beweis.* Bei echten Eckenfärbungen sind parallele Kanten unerheblich, so daß wir o.B.d.A.  $G$  als schlicht voraussetzen können. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $n = n(G)$ . Für  $n \leq 5$  ist der Satz offensichtlich richtig. Es sei nun  $n > 5$ . Nach Satz 11.5 gibt es eine Ecke  $u \in E(G)$  mit  $d(u, G) \leq 5$ . Der Graph  $H = G - u$  ist wieder ein ebener Graph, womit er nach Induktionsvoraussetzung eine echte 5-Eckenfärbung besitzt. Ist  $d(u, G) \leq 4$ , so ergibt sich eine echte 5-Eckenfärbung von  $G$  sofort aus der von  $H$ .

Daher behandeln wir nur noch den verbleibenden Fall  $d(u, G) = 5$ . O.B.d.A. seien die Nachbarn  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  von  $u$  in der skizzierten Form angeordnet.

Weiter sei  $i$  die Farbe der Ecke  $x_i$  in  $H$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), denn sind in  $H$  zwei der Ecken  $x_i$  gleich gefärbt, so sind wir nach Induktionsvoraussetzung sofort fertig. Mit  $H_{1,3}$  bezeichnen wir denjenigen Teilgraphen von  $H$ , der von den Ecken mit den Farben 1 und 3 induziert wird.



1. *Fall:* Gehören die Ecken  $x_1$  und  $x_3$  zu verschiedenen Komponenten von  $H_{1,3}$ , so erzielt man eine andere echte 5-Eckenfärbung von  $H$  durch Austauschen der Farben 1 und 3 in der Komponente, in der  $x_1$  liegt. Dadurch haben die beiden Ecken  $x_1$  und  $x_3$  die Farbe 3, und wir können in  $G$  die Ecke  $u$  mit der Farbe 1 färben.

2. *Fall:* Gehören  $x_1$  und  $x_3$  zur gleichen Komponente von  $H_{1,3}$ , so existiert in  $H$  ein Weg  $W$  von  $x_1$  nach  $x_3$ , auf dem alle Ecken die Farbe 1 oder 3 besitzen. Da  $G$  eben ist, bildet  $W$  zusammen mit dem Weg  $(x_1, u, x_3)$  in  $G$  einen Kreis, der entweder die Ecke  $x_2$  oder die beiden Ecken  $x_4$  und  $x_5$  umschließt. Daher kann es in  $H$  keinen Weg von  $x_2$  nach  $x_4$  geben, dessen Ecken nur mit den Farben 2 oder 4 gefärbt sind. Ist  $H_{2,4}$  derjenige Teilgraph von  $H$ , der durch die Ecken mit den Farben 2 und 4 induziert wird, so gehören  $x_2$  und  $x_4$  zu verschiedenen Komponenten von  $H_{2,4}$ . Durch Wiederholung des Verfahrens aus dem 1. Fall, gelangt man zu einer echten 5-Eckenfärbung von  $G$ . ||

Nach den Beweisen des Fünffarbensatzes muß natürlich die berühmte Vierfarbenvermutung angesprochen werden, von der die Graphentheorie sehr starke Impulse erhalten hat.

**Vierfarbenvermutung.** Jede Landkarte läßt sich mit vier Farben färben.

Beispiel 11.2 zeigt, daß 4 Farben notwendig sind. Das Vierfarbenproblem wurde 1852 von einem Studenten namens Francis Guthrie über seinen Bruder Frederick dessen Lehrer Augustus de Morgan vorgelegt, der es Sir William Rowan Hamilton unterbreitete. Auf einer Sitzung der Londoner Mathematischen Gesellschaft im Jahre 1878 stellte Arthur Cayley den anwesenden Geographen und Mathematikern dieses Problem vor und diskutierte in einer Note [3] 1879 die auftretenden Schwierigkeiten. Binnen eines Jahres publizierte Kempe [1], ein Rechtsanwalt und Mitglied der Mathematischen Gesellschaft, einen interessanten und bis heute Anstöße vermittelnden, aber doch fehlerhaften Beweis. Die Lücke wurde erstmalig 1890 [1] von Heawood aufgezeigt.

Im Zusammenhang mit der Lösung der Vierfarbenvermutung möchte ich meinen Kollegen Horst Sachs aus Ilmenau zitieren. In seinem Artikel [3] "Einige Gedanken zur Geschichte und zur Entwicklung der Graphentheorie" aus dem Jahre 1989 schreibt Herr Sachs:

"Heute wird vielerorts angenommen, daß die Vierfarbenvermutung nach umfangreichen Vorarbeiten von Heinrich Heesch [1] durch Kenneth Appel und Wolfgang Haken [1] sowie Kenneth Appel, Wolfgang Haken und J. Koch [1] 1976 unter Einsatz eines Computers bewiesen worden sei. Da jedoch Fehler im Programm gefunden wurden (was jedem mit der Programmierung Vertrauten nur allzu verständlich ist), sahen sich K. Appel und W. Haken veranlaßt, 1986 in einem Artikel unter dem Titel "The Four Color Proof Suffices" [2] zu den aufgetretenen Zweifeln Stellung zu nehmen. Der Titel ist irreführend: die Autoren räumen (implizit) ein, daß es durchaus möglich (und sogar sehr wahrscheinlich) sei, daß auch die jetzt vorliegende Fassung des zum Beweis gehörigen Programms Fehler enthält. Das aber bedeutet, daß die endgültige Lösung des Vierfarbenproblems noch aussteht. (Der Verfasser hebt, um Mißverständnisse auszuschließen, hervor, daß er dem von H. Heesch geschaffenen

Ideengebäude große Hochachtung entgegenbringt und auch die Leistungen von K. Appel und W. Haken zu würdigen weiß; er nimmt nicht Stellung zu der Frage, ob die Vierfarbenvermutung wahr sei, oder zu der Frage, ob die von den genannten Autoren verwendeten Mittel ausreichen, um das Problem zu lösen; er hat auch keine Vorbehalte gegen die Verwendung eines Computers. Er bringt jedoch sein Erstaunen darüber zum Ausdruck, daß – wie es scheint – manche seiner Kollegen bedenkenlos bereit sind, zuzulassen, daß der Begriff des mathematischen Beweises – mit seiner Forderung nach absoluter Strenge und Lückenlosigkeit: das teuerste Erbe, das von den alten Griechen überkommen ist, der zentrale Begriff der Mathematik überhaupt – seiner Kraft, seiner Unbestechlichkeit und Würde beraubt wird.)”

Den an dieser Thematik interessierten Leser möchte ich auf das 741 Seiten lange Werk von Appel und Haken [3] aus dem Jahre 1989 verweisen, in dem sie ihren “Beweis” der Vierfarbenvermutung neu überarbeitet haben. Drei Jahre danach erschien in den Jahresberichten der DMV folgende Besprechung dieses Buches von U. Schmidt [1].

“Dieser dickleibige Band bietet eine “verbesserte” Version der 1976 im *Illinois Journal of Mathematics* erschienenen Originalarbeit. Diese Arbeit brachte bekanntlich die Lösung des Vierfarbenproblems mittels der Reduktionsmethode, wobei die umfangreichen kombinatorischen Details des Beweises in einem als Microfiche beigefügten Anhang enthalten waren. Dieser Microfiche-Anhang ist in dem vorliegenden Buch nunmehr in normal lesbarer (und korrigierter) Form ausgedruckt; er macht etwa zwei Drittel des Umfangs aus. Neu ist ein Abschnitt über “Immersionsreduzibilität” (100 Seiten), welcher einen Algorithmus zur Vierfärbung ebener Landkarten enthält. Die Autoren zeigen, daß das zeitliche “worst case”-Verhalten des Färbungsalgorithmus für eine gegebene Triangulation mit  $N$  Ecken durch ein Polynom vierten Grades in  $N$  begrenzt ist.

Dem eigentlichen Beweis des Vierfarbensatzes von 1976 ist eine 30seitige Einführung vorangestellt, in der die gut hundertjährige Geschichte des Vierfarbenproblems umrissen wird. Ausgangspunkt der (letztlich erfolgreichen) Lösungsbemühungen ist die Annahme eines *minimalen* Gegenbeispiels zum Vierfarbensatz in Form einer 5chromatischen Minimaltriangulation der Ebene; wenn es nun gelingt zu zeigen, daß eine solche Minimaltriangulation keine Ecken vom Grade  $\leq 5$  enthalten kann, dann ist ein Widerspruch zur Eulerschen Polyederformel hergestellt, und somit der Vierfarbensatz ex negativo bewiesen. Nachdem Kempe 1879 gezeigt hatte, daß Ecken vom Grade  $< 5$  *reduzierbar* sind (also nicht in einem minimalen Gegenbeispiel enthalten sein können), blieb “nur noch” die Reduzierbarkeit der 5-Ecke nachzuweisen. Da dies auf direktem Wege nicht gelang, versuchte man, *unvermeidbare Mengen reduzierbarer Figuren* (Untergraphen) zusammenzustellen - unvermeidbar in dem Sinne, daß jede ebene Triangulation mindestens eine Figur der Menge enthält. Die Arbeit von Appel und Haken liefert nun die erste (und bisher einzige) Regel zur Konstruktion einer solchen unvermeidbaren Menge; diese Regel, von den Autoren “Entladungsprozedur” genannt, wurde in einem iterativen, von Überlegungen zur Reduktionswahrscheinlichkeit geleiteten Prozeß gewonnen. Das Resultat ist eine stark verästelte Entladungsprozedur mit einigen Grund- und hunderten von Ausnahmeregeln, die zu einer unvermeidbaren Menge von 1476 reduzierbaren Figuren führte.

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile: I) Nachweis der Unvermeidbarkeit der per Entladungsprozedur konstruierten Figurenmenge, II) Nachweis der Reduzierbarkeit aller zur unvermeidbaren Menge gehörenden Figuren. Teil I wurde von Hand durchgeführt, Teil II von Rechnern. Obwohl sich viele Mathematiker an der rechnergestützten Beweisführung stießen, sind doch gerade die Ergebnisse von Teil II bestens gesichert, vor allem durch die jahrzehntelangen Untersuchungen von Heesch zum Vierfarbenproblem. Potentiell fehlerträchtig ist

wegen seiner kombinatorischen Komplexität allenfalls Teil I (Entladungsprozedur und Unvermeidbarkeitsbeweis). In der Tat fand der Rezensent 1981 einen Fehler in Teil I, zu dessen Behebung die Autoren die Entladungsprozedur leicht abänderten - diese Änderungen machen den hauptsächlichlichen Unterschied zwischen der hier vorliegenden Beweisversion und der von 1976 aus. Rein methodisch gesehen ist diese Fehlerbehebung nur ein *zusätzlicher* Schritt aus einer Vielzahl von iterativen Schritten zur Herleitung einer geeigneten Entladungsprozedur, und die Autoren legen überzeugend dar, warum auch etwaige noch unentdeckte Fehler die "inhärente Stabilität" des Beweisverfahrens nicht gefährden würden.

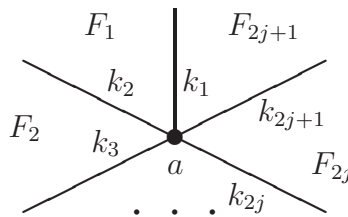
Kritisch anzumerken bleibt, daß der Beweis in den dreizehn Jahren seit seiner Erstveröffentlichung nicht wesentlich vereinfacht wurde. Weder verwenden die Autoren die von Heesch in den siebziger Jahren gefundenen neuen Reduktionsstrukturen ( $E$ -,  $F$ -, ...,  $K$ -Reduktion), noch betrachten sie Figuren, deren Randkreiszahl größer als 14 ist. Letzteres mag 1976 als pragmatisches Argument hinsichtlich der damals verfügbaren Rechenleistung und Speicherkapazität berechtigt gewesen sein, aber gewiß nicht heute. Es bleibt zu fragen, ob nicht durch Einsatz des verfeinerten Reduktionsbegriffs und durch die Reduktion größerer Figuren (mit 18 bis 20 Randkreisecken) die Entladungsprozedur ganz wesentlich vereinfacht werden könnte."

Inzwischen gibt es einen weiteren Beweis der Vierfarbenvermutung von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas [1] 1997. Auch dieser Beweis benutzt sehr stark die Hilfe von Computern, aber er ist dennoch kürzer und durchsichtiger als der von Appel und Haken.

**Satz 11.15.** Es sei  $G$  eine Landkarte ohne Brücken. Die Landkarte  $G$  ist genau dann 2-färbbar, wenn die Komponenten von  $G$  Eulersch oder isolierte Ecken sind.

*Beweis.* O.B.d.A. setzen wir  $G$  als Multigraphen voraus.

Zunächst sei  $G$  mit den beiden Farben 1 und 2 gefärbt. Angenommen, es gibt eine Ecke  $a$  mit  $d(a, G) = 2j + 1$ . Die Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_{2j+1}$ , die mit  $a$  inzidieren, seien in der skizzierten Reihenfolge angeordnet.



Da  $G$  keine Brücken besitzt, gehört jede Kante  $k_{i+1}$  zum Rand von zwei verschiedenen Ländern  $F_i$  und  $F_{i+1}$  für  $i = 1, 2, \dots, 2j$  und  $k_1$  gehört zum Rand von den Ländern  $F_1$  und  $F_{2j+1}$ . Ist o.B.d.A.  $h(F_1) = 1$ , so gilt notwendig  $h(F_2) = 2, h(F_3) = 1, h(F_4) = 1, \dots, h(F_{2j+1}) = 1$ . Nun haben die beiden benachbarten Länder  $F_1$  und  $F_{2j+1}$  die gleiche Farbe, was der 2-Färbung von  $G$  widerspricht. Daher kann  $G$  keine Ecke ungeraden Grades besitzen, womit  $G$  nach Satz 3.1 aus Eulerschen Komponenten oder isolierten Ecken besteht.

Nun seien die Komponenten von  $G$  Eulersch oder isolierte Ecken. Für die 2-Färbbarkeit von  $G$  geben wir zwei verschiedene Beweise.

Der erste Beweis erfolgt durch Induktion nach der Zahl  $l = l(G)$  der Länder von  $G$ , wobei es im Fall  $l = 1, 2$  nichts zu beweisen gibt. Ist  $l \geq 3$ , so wählen wir einen Kreis  $C = (x_1, k_1, x_2, \dots, k_p, x_1)$  in  $G$ , dessen Inneres genau ein Land  $F$  von  $G$  ist. Nun sind die Komponenten von  $G' = G - \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$  wieder Eulersch oder isolierte Ecken. Nach

Induktionsvoraussetzung kann man  $G'$  mit 2 Farben färben. Hat dasjenige Land von  $G'$ , welches das Innere von  $C$  umfaßt, die Farbe 1, so färbe man in  $G$  das Land  $F$  mit der Farbe 2 und alle benachbarten Länder von  $F$  mit der Farbe 1. Da  $G'$  aus Eulerschen Komponenten oder isolierten Ecken besteht, besitzt  $G'$  keine Brücken, so daß die Nachbarländer von  $F$  in  $G$  untereinander nicht benachbart sind, womit wir eine 2-Färbung von  $G$  gefunden haben.

Im zweiten Beweis sei  $G^*$  der duale Graph von  $G$ . Wir zeigen, daß  $G^*$  bipartit ist. Da  $G$  keine Schlingen und keine Brücken besitzt, ist  $G^*$  ein Multigraph. Angenommen,  $G^*$  enthält einen Kreis  $C_{2j+1}$  der ungeraden Länge  $2j+1$ . Nach Konstruktion des dualen Graphen (man vgl. Bemerkung 11.8) schneidet jede Kante des Kreises  $C_{2j+1}$  genau eine Kante des Graphen  $G$ . Ist  $X \subseteq E(G)$  diejenige Eckenmenge von  $G$ , die im Inneren von  $C_{2j+1}$  liegt, so ergibt sich notwendig  $m_G(X, E(G) - X) = 2j + 1$ . Da  $G$  aus Eulerschen Komponenten oder isolierten Ecken besteht, erhalten wir den Widerspruch

$$m_G(X, E(G) - X) = \sum_{x \in X} d(x, G) - \sum_{x \in X} d(x, G[X]) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Daher besitzt  $G^*$  keine Kreise ungerader Länge und somit ist  $G^*$  nach dem Satz von König (Satz 4.15) bipartit mit einer Bipartition  $A, B$ . Färbt man die Ecken von  $A$  mit der Farbe 1 und die Ecken von  $B$  mit der Farbe 2, so ist das eine echte Eckenfärbung von  $G^*$ , die uns natürlich eine 2-Färbung der Landkarte  $G$  liefert. ||

Wer Interesse an Färbungsproblemen auf anderen Flächen hat (z.B. Torus, Möbiussches Band usw.), dem empfehle ich die Bücher von Ringel [1], [3].

## 11.4 Der Satz von Kuratowski

In diesem Abschnitt wollen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Planarität eines Graphen herleiten, die Kuratowski [1] im Jahre 1930 entdeckt hat.

**Definition 11.9.** Ein Graph  $H$  heißt *homöomorph* zum Graphen  $G$ , wenn  $H \cong G$  oder  $H$  ein Unterteilungsgraph von  $G$  ist. Zwei Graphen  $H_1$  und  $H_2$  heißen *homöomorph*, wenn es einen Graphen  $G$  gibt, zu dem sowohl  $H_1$  als auch  $H_2$  homöomorph ist.

**Bemerkung 11.10.** Homöomorphie von Graphen ist eine Äquivalenzrelation. Da für die Planarität von Graphen die Ecken vom Grad 2 keine Rolle spielen, sind zwei homöomorphe Graphen gleichzeitig planar oder nicht planar. Besitzt ein Graph  $G$  einen nicht planaren Teilgraphen, so ist  $G$  sicher auch nicht planar. Zusammen mit Satz 11.4 ergibt sich daher:

Enthält ein Graph  $G$  einen zum  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen, so ist  $G$  nicht planar.

Die fundamentale Entdeckung von Kuratowski war die Umkehrung dieser Aussage. Auch Schlingen und Mehrfachkanten sind für die Planarität eines Graphen ohne Bedeutung, so daß wir im folgenden nur noch schlichte Graphen untersuchen.

**Satz 11.16 (Whitney [4] 1932).** Ein schlichter Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn jeder Block von  $G$  planar ist.

*Beweis.* Ist  $G$  planar, so ist sicher jeder Block von  $G$  planar. Die Umkehrung beweisen wir durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Blöcke von  $G$ , wobei wir o.B.d.A.  $G$  als zusammenhängend voraussetzen. Ist  $G$  ein Block, so sind wir fertig. Besteht  $G$  aus mehr als



einem Block, so sei  $B$  ein Endblock von  $G$  mit der Schnittecke  $u$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $G' = G - (E(B) - \{u\})$  planar. Da nach Voraussetzung auch  $B$  planar ist, macht es keine Mühe,  $B$  und  $G'$  so in die Ebene einzubetten, daß  $B$  in einem Gebiet von  $G'$  liegt, zu dessen Rand die Ecke  $u$  gehört. Durch Verheftung von  $G'$  und  $B$  an der Ecke  $u$  erhält man die gewünschte Einbettung von  $G$ . ||

**Satz 11.17 (Kuratowski [1] 1930).** Ein schlichter Graph ist genau dann planar, wenn er keinen zum  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen besitzt.

*Beweis.* Nach Bemerkung 11.10 und Satz 11.16 genügt es zu zeigen, daß ein Block planar ist, wenn er keinen zum  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen enthält. Angenommen, dies ist nicht der Fall, und  $G$  ist ein nicht planarer Block minimaler Größe, der keinen zum  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen besitzt.

Zunächst zeigen wir  $\delta(G) \geq 3$ . Da  $G$  ein Block ist, gilt  $\delta(G) \geq 2$ . Angenommen, es gibt eine Ecke  $v$  mit  $d(v, G) = 2$ . Dann seien  $x$  und  $y$  die beiden Nachbarn von  $v$ .

Im Fall  $xy \in K(G)$  ist auch  $G - v$  ein Block, der keinen zum  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen hat. Wegen der minimalen Größe von  $G$  muß  $G - v$  planar sein, woraus sich leicht die Planarität von  $G$  ergibt, was unserer Annahme widerspricht.

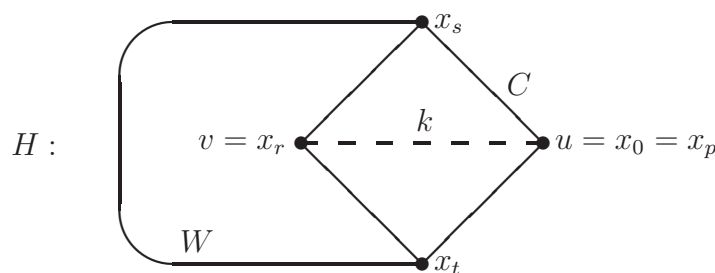
Im Fall  $xy \notin K(G)$  ist der Graph  $G' = (G - v) + xy$  ein Block mit  $m(G') < m(G)$ . Man überlegt sich leicht, daß  $G'$  keinen zum  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen besitzt, womit  $G'$  planar ist. Da  $G'$  aber homöomorph zu  $G$  ist, haben wir einen Widerspruch erzielt.

Aus der nun bewiesenen Tatsache  $\delta(G) \geq 3$  folgt zusammen mit Satz 8.9, daß  $G$  kein kantenkritischer Block ist. Daher existiert in  $G$  eine Kante  $k = uv$ , so daß  $H = G - k$  wieder ein Block ist, und nach Satz 8.4 liegen die beiden Ecken  $u$  und  $v$  auf einem gemeinsamen Kreis. Da auch  $H$  keinen zum  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen besitzt, können wir nach Wahl von  $G$  den Graphen  $H$  als eben voraussetzen. In  $H$  wählen wir nun einen Kreis  $C$  durch die beiden Ecken  $u$  und  $v$ , der die größte Anzahl von Gebieten im Inneren aufweist. Hat  $C$  die Gestalt

$$C = (u = x_0, x_1, \dots, x_r = v, \dots, x_p = u)$$

mit  $1 < r < p - 1$ , so enthält  $H$  Kanten im Inneren und im Äußeren von  $C$ . Denn wäre das nicht der Fall, so könnte man durch Hinzufügen der Kante  $k$  aus dem ebenen Graphen  $H$  sofort einen ebenen Graphen  $G$  erzeugen.

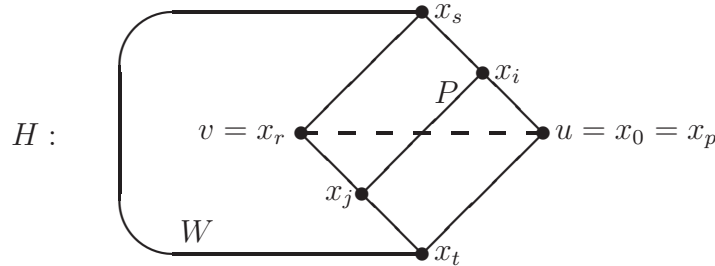
Weiter dürfen in  $H$  keine zwei verschiedenen Ecken aus der Menge  $\{x_0, x_1, \dots, x_r\}$  durch einen Weg im Äußeren von  $C$  verbunden sein, da es sonst einen Kreis durch  $u$  und  $v$  gäbe, der in seinem Inneren mehr Gebiete als  $C$  besäße. Gleiches gilt für die Menge  $\{x_r, \dots, x_p\}$ . Daher existieren zwei Ecken  $x_s$  und  $x_t$  mit  $0 < s < r$  und  $r < t < p$  und ein Weg  $W$  von  $x_s$  nach  $x_t$ , der notwendig im Äußeren von  $C$  verläuft und nur die Ecken  $x_s$  und  $x_t$  mit  $C$  gemeinsam hat. Die so gewonnene Struktur hat die skizzierte Gestalt.





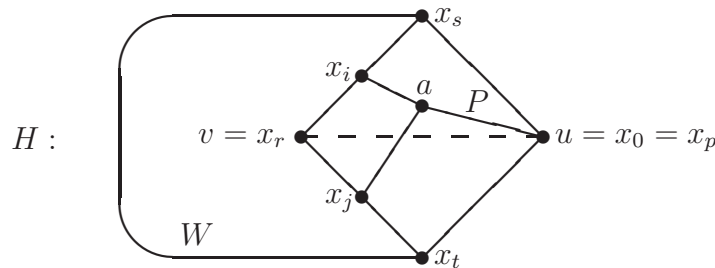
Da man  $W$  nicht in das Innere von  $C$  legen kann, ohne die Planarität von  $H$  zu zerstören, und da  $G$  nicht planar ist, gibt es für das Innere von  $C$  im wesentlichen vier Möglichkeiten, die wir im folgenden diskutieren werden.

I. Es existiert ein Weg  $P$  von  $x_i$  nach  $x_j$  mit  $0 < i < s$  und  $r < j < t$  (oder  $s < i < r$  und  $t < j < p$ ), der mit  $C$  nur die Ecken  $x_i$  und  $x_j$  gemeinsam hat (man vgl. die Skizze).



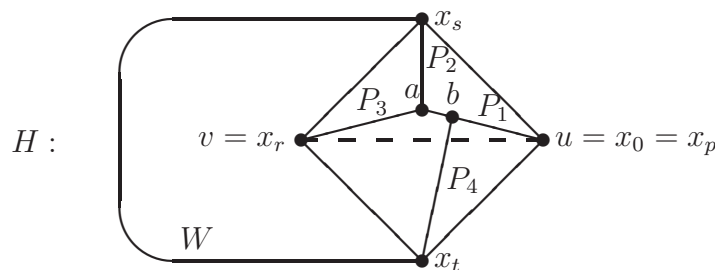
Die Eckenmengen  $A = \{x_i, x_r, x_t\}$  und  $B = \{x_j, x_p, x_s\}$  bilden aber eine Bipartition eines zum  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen von  $G$ , was unserer Voraussetzung widerspricht.

II. Im Inneren von  $C$  existiert eine Ecke  $a$ , die mit  $C$  durch drei eckendisjunkte (bis auf  $a$ ) Wege im Inneren von  $C$  verbunden ist, wobei der von  $a$  verschiedene Endpunkt von einem dieser Wege, den wir mit  $P$  bezeichnen, in der Eckenmenge  $\{x_0, x_s, x_r, x_t\}$  liegt. Ist z.B.  $x_0$  der Endpunkt von  $P$ , so enden die beiden anderen Wege in den Ecken  $x_i$  und  $x_j$  mit  $s \leq i < r$  und  $r < j \leq t$ , wobei nicht gleichzeitig  $i = s$  und  $j = t$  gilt (man vgl. die Skizze).



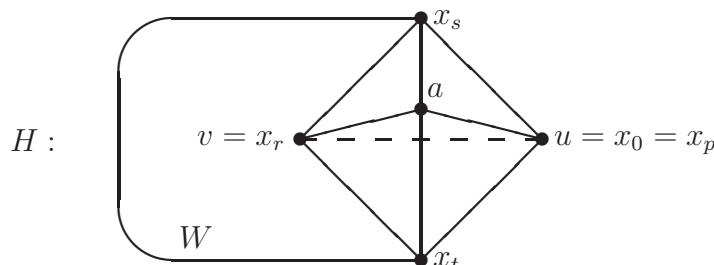
Die Eckenmengen  $A = \{x_0, x_i, x_j\}$  und  $B = \{a, x_r, x_t\}$  bilden nun wieder eine Bipartition eines zum  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen von  $G$ , was nach Voraussetzung nicht möglich ist. Analog werden die Fälle behandelt, in denen  $x_s, x_r$  oder  $x_t$  Endpunkte des Weges  $P$  sind.

III. Im Inneren des Kreises  $C$  existiert eine Ecke  $a$ , die mit drei Ecken aus der Menge  $\{x_0, x_s, x_r, x_t\}$  durch drei eckendisjunkte (bis auf  $a$ ) Wege  $P_1, P_2$  und  $P_3$  im Inneren von  $C$  verbunden ist. O.B.d.A. seien die Endpunkte von  $P_1, P_2$  und  $P_3$  die Ecken  $x_0, x_s$  und  $x_r$ . Zusätzlich gebe es im Inneren von  $C$  noch einen Weg  $P_4$  von einer Ecke  $b$  auf den Wegen  $P_1$  oder  $P_3$  mit  $b \neq x_r, a, x_0$  nach  $x_t$ , der eckendisjunkt (bis auf  $b$ ) mit  $P_1$  und  $P_3$  ist (man vgl. die Skizze).



Die Eckenmengen  $A = \{x_0, a, x_t\}$  und  $B = \{b, x_r, x_s\}$  bilden eine Bipartition eines zum  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen von  $G$ , was unserer Voraussetzung widerspricht. Die verbleibenden Fälle für  $P_1, P_2$  und  $P_3$  behandelt man analog.

IV. Im Inneren von  $C$  existiert eine Ecke  $a$ , die mit  $x_0, x_s, x_r, x_t$  durch vier eckendisjunkte (bis auf  $a$ ) Wege im Inneren von  $C$  verbunden ist (man vgl. die Skizze).



In diesem Fall erkennt man sofort, daß  $G$  einen zum  $K_5$  homöomorphen Teilgraphen besitzt, was nach Voraussetzung verboten ist.

Da wir alle möglichen Fälle zum Widerspruch geführt haben, muß jeder nicht planare Graph einen zum  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraphen enthalten.  $\parallel$

Der hier geführte Beweis folgt den Ideen von Dirac und Schuster [1] 1954 und ist dem Buch von Chartrand und Lesniak [1] S. 96 – 98 entnommen. Für Erweiterungen, Verallgemeinerungen oder andere Beweise des Satzes von Kuratowski vgl. man z.B. Bodendiek und Wagner [1] 1989, Klotz [1] 1989, Thomassen [2] 1981, Thomassen [5] 1984 oder Tverberg [1] 1989.

Gute Planaritätsalgorithmen findet man in den Büchern von Bondy und Murty [1] sowie Chartrand und Lesniak [1] und vor allen Dingen bei Nishizeki und Chiba [1] 1988.

## 11.5 Aufgaben

**Aufgabe 11.1.** Ist  $G$  ein schlichter und planarer Graph der Ordnung  $n \geq 11$ , so zeige man, daß  $\bar{G}$  nicht planar ist.

**Aufgabe 11.2.** Man beweise Folgerung 11.6.

**Aufgabe 11.3.** Ist  $G$  ein planarer Graph mit  $\delta(G) \geq 3$  und  $t(G) \geq 4$ , so zeige man, daß  $G$  mindestens 8 Ecken vom Grad 3 besitzt.

**Aufgabe 11.4.** Man beweise: Ein Graph ist genau dann planar, wenn man ihn in die Oberfläche einer Kugel einbetten kann.

*Hinweis:* Stereographische Projektion.

**Aufgabe 11.5.** Es sei  $G$  ein planarer Graph und  $u \in E(G)$ . Man zeige, daß es eine Einbettung von  $G$  in die Ebene gibt, bei der die Ecke  $u$  zum Rand des äußeren Gebietes gehört.

*Hinweis:* Aufgabe 11.4.

**Aufgabe 11.6.** Für eine normale Landkarte  $G$  zeige man, daß der duale Graph  $G^{**}$  von  $G^*$  genau dann zu  $G$  isomorph ist, wenn  $G$  zusammenhängend ist.

**Aufgabe 11.7.** Ein ebener Graph heißt *selbstdual*, wenn er isomorph zum dualen Graphen ist.

- i) Ist der ebene Graph  $G$  selbstdual, so zeige man  $m(G) = 2n(G) - 2$ .
- ii) Für alle  $n \geq 4$  gebe man einen selbstdualen Graphen der Ordnung  $n$  an.

**Aufgabe 11.8.** Man zeige an Hand eines Beispiels, daß Satz 11.15 nicht mehr gültig ist, wenn man Brücken zuläßt.

**Aufgabe 11.9.** Sind  $G$  und  $H$  homöomorph, so zeige man

$$m(G) - n(G) = m(H) - n(H).$$

**Aufgabe 11.10.** Man zeige, daß der  $K_3 \times K_3$  nicht planar ist.

**Aufgabe 11.11.** Man zeige, daß der im Abschnitt 13.1 skizzierte Petersen-Graph nicht planar ist.

**Aufgabe 11.12.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph. Ist  $G$  nicht planar, so beweise man, daß auch der Line-Graph  $\mathcal{L}(G)$  nicht planar ist.

**Aufgabe 11.13.** Analog zum Beweis von Satz 11.12 zeige man: Ist  $G$  ein schlichter und zusammenhängender und planarer Graph mit  $m(G) \geq 1$  und  $t(G) \geq 5$ , so gilt  $b(G) \leq 5$ .

**Aufgabe 11.14.** Analog zum Beweis von Satz 11.12 zeige man: Ist  $G$  ein schlichter und zusammenhängender und planarer Graph mit  $m(G) \geq 1$  und  $t(G) \geq 6$ , so gilt  $b(G) \leq 4$ .

# Kapitel 12

## Eckenfärbung

### 12.1 Die chromatische Zahl

**Definition 12.1.** Es sei  $G$  ein Multigraph. Eine Abbildung  $h: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$  nennt man *Eckenfärbung*,  *$q$ -Eckenfärbung* oder  *$q$ -Färbung* von  $G$ . Ist  $E_i$  die Menge aller Ecken von  $G$  mit der Farbe  $i$ , so nennen wir  $E_i$  *Farbenklasse*.

Gilt zusätzlich  $h(x) \neq h(y)$  für alle adjazenten Ecken  $x, y$ , so sprechen wir von einer *echten Eckenfärbung*, *echten  $q$ -Eckenfärbung* oder *echten  $q$ -Färbung* von  $G$ .

Eine  $q$ -Eckenfärbung heißt *vollständige  $q$ -Eckenfärbung* oder *vollständige  $q$ -Färbung*, wenn für alle  $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$  mit  $i \neq j$  eine Kante  $xy$  existiert mit  $h(x) = i$  und  $h(y) = j$ .

Die *chromatische Zahl*  $\chi = \chi(G)$  von  $G$  ist die kleinste Zahl  $q$ , für die  $G$  eine echte  $q$ -Eckenfärbung besitzt.

Die *achromatische Zahl*  $\psi = \psi(G)$  von  $G$  ist die größte Zahl  $q$ , für die  $G$  eine vollständige und echte  $q$ -Eckenfärbung besitzt.

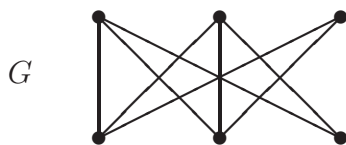
Die *pseudoachromatische Zahl*  $\psi_s = \psi_s(G)$  von  $G$  ist die größte Zahl  $q$ , für die  $G$  eine vollständige  $q$ -Eckenfärbung besitzt.

**Bemerkung 12.1.** Da Mehrfachkanten keinen Einfluß auf die Eckenfärbungen haben, beschränken wir uns im allgemeinen auf schlichte Graphen.

Färbt man jede Ecke eines schlichten Graphen  $G$  mit einer anderen Farbe, so ist das eine echte Eckenfärbung, womit die Existenz der chromatischen Zahl gesichert ist. Färbt man alle Ecken von  $G$  mit einer Farbe, so ist das eine vollständige Färbung, womit die pseudoachromatische Zahl existiert. Ist  $h$  eine echte  $q$ -Färbung von  $G$  mit  $q = \chi(G)$ , so sieht man leicht, daß  $h$  eine vollständige  $q$ -Färbung sein muß. Daher existiert auch die achromatische Zahl, und es ergeben sich sofort die folgenden Ungleichungen:

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \psi(G) \leq \psi_s(G) \quad (12.1)$$

**Beispiel 12.1.** Für den skizzierten Graphen  $G$  überlegt man sich leicht, daß  $\chi(G) = 2 < \psi(G) = 3 < \psi_s(G) = 4$  gilt. Daher gibt es Graphen, für die die chromatische Zahl, die achromatische Zahl und die pseudoachromatische Zahl verschieden ausfallen.



**Bemerkung 12.2.** Ist  $h$  eine echte  $q$ -Eckenfärbung eines Multigraphen  $G$  und  $E_i = \{x \mid x \in E(G) \text{ mit } h(x) = i\}$  eine Farbenklasse, so gilt  $E(G) = \bigcup_{i=1}^q E_i$  mit  $E_i \cap E_j = \emptyset$  für alle  $1 \leq i < j \leq q$ , und jede Farbenklasse  $E_i$  ist eine unabhängige Eckenmenge von  $G$ . Daher ist jeder Graph  $G$  ohne Schlingen  $\chi(G)$ -partit. Umgekehrt liefert natürlich jede Zerlegung von  $E(G)$  in  $q$  disjunkte unabhängige Eckenmengen eine echte  $q$ -Eckenfärbung von  $G$ .

Aus Bemerkung 12.2 folgt ohne Mühe

**Satz 12.1.** Es sei  $G$  ein Multigraph.

- i) Es gilt  $\chi(G) = 1$  genau dann, wenn  $G$  ein Nullgraph ist.
- ii) Es gilt  $\chi(G) = 2$  genau dann, wenn  $G$  bipartit ist mit  $K(G) \neq \emptyset$ .
- iii) Allgemein gilt  $\chi(G) = p$  genau dann, wenn  $G$   $p$ -partit aber nicht  $(p-1)$ -partit ist.

**Satz 12.2.** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad (12.2)$$

*Beweis.* Sind  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Ecken von  $G$ , so färben wir die Ecken induktiv mit den Farben  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$ . Man färbe  $x_1$  mit einer beliebigen Farbe. Sind die Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_i$  für  $i < n$  schon gefärbt, so daß adjazente Ecken verschiedene Farben besitzen, so hat die Ecke  $x_{i+1}$  höchstens  $\Delta(G)$  (gefärbte) Nachbarn. Daher steht von den  $\Delta(G) + 1$  Farben mindestens eine zur Verfügung, mit der man  $x_{i+1}$  färben kann, so daß wieder benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind. ||

**Bemerkung 12.3.** Der Beweis von Satz 12.2 ist konstruktiv, so daß man mit diesem Verfahren sehr schnell zu einer echten  $(\Delta(G) + 1)$ -Eckenfärbung gelangt.

**Definition 12.2.** Ein schlichter Graph  $G$  heißt *kritisch*, wenn für jeden echten Teilgraphen  $H$  die Ungleichung  $\chi(H) < \chi(G)$  gilt.  $G$  heißt  *$q$ -kritisch*, wenn  $G$  kritisch ist und  $\chi(G) = q$  gilt.

**Bemerkung 12.4.** i) Ein kritischer Graph ist zusammenhängend.

- ii) Ist  $\chi(G) = q \geq 2$ , so besitzt  $G$  einen  $q$ -kritischen Teilgraphen. Man erreicht dies durch sukzessive Herausnahme von Kanten und Ecken.
- iii) Ein  $q$ -kritischer Graph besitzt keine Schnittecke. Angenommen, ein  $q$ -kritischer Graph  $G$  enthält eine Schnittecke  $v$ . Sind  $E_1, E_2, \dots, E_r$  die Eckenmengen der Komponenten von  $G - v$ , so ist es möglich, die echten Teilgraphen  $G[E_i \cup \{v\}]$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) mit einer echten  $(q-1)$ -Färbung zu versehen. Da man diese  $r$  echten  $(q-1)$ -Färbungen so einrichten kann, daß die Ecke  $v$  immer die gleiche Farbe erhält, so hätte man eine echte  $(q-1)$ -Färbung von  $G$  gefunden, was  $\chi(G) = q$  widerspricht.
- iv) Offensichtlich ist der  $K_1$  der einzige 1-kritische Graph. Genauso leicht sieht man, daß der  $K_2$  der einzige 2-kritische Graph ist.

Die einzigen 3-kritischen Graphen sind Kreise ungerader Länge. Denn ist  $G$  ein 3-kritischer Graph, so ist  $G$  nach Satz 12.1 nicht bipartit. Damit besitzt  $G$  einen Kreis  $C$  ungerader Länge. Hätte der Graph  $G$  neben  $E(C)$  und  $K(C)$  noch weitere Ecken oder Kanten, so wäre  $C$  ein echter Teilgraph von  $G$  mit  $\chi(C) = \chi(G) = 3$ . Da Kreise ungerader Länge offensichtlich 3-kritische Graphen sind, haben wir das gewünschte Resultat nachgewiesen.

**Satz 12.3.** Ist  $G$  ein  $q$ -kritischer Graph, so gilt  $q - 1 \leq \delta(G) = \delta$ .

*Beweis.* Wir nehmen an, daß  $\delta < q - 1$  gilt. Es sei  $a$  eine Ecke mit  $d(a, G) = \delta$ . Da  $G$  ein  $q$ -kritischer Graph ist, besitzt der Teilgraph  $G - a$  eine echte  $(q - 1)$ -Färbung. Sind  $E_1, E_2, \dots, E_{q-1}$  die Farbenklassen einer  $(q - 1)$ -Färbung von  $G - a$ , so existiert wegen  $\delta < q - 1$  eine Farbenklasse  $E_j$ , so daß  $a$  zu keiner Ecke aus  $E_j$  adjazent ist. Färbt man nun die Ecke  $a$  mit der Farbe  $j$ , so hat man eine echte  $(q - 1)$ -Färbung von  $G$  gefunden, was ein Widerspruch zu  $\chi(G) = q$  ist. ||

**Satz 12.4 (Gallai [2] 1968).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\chi(G) \leq 1 + \ell(G),$$

wobei  $\ell(G)$  die Länge eines längsten Weges in  $G$  bedeute.

*Beweis.* Da die Fälle  $\chi(G) = 1, 2$  sofort einzusehen sind, sei im weiteren  $\chi(G) = q \geq 3$ . Ist  $H$  ein  $q$ -kritischer Teilgraph von  $G$ , so gilt nach Satz 12.3  $\delta(H) \geq q - 1$ . Wegen Satz 1.9 gibt es in  $H$  einen Weg der Länge  $\delta(H)$ . Daraus folgt die gewünschte Ungleichung

$$\ell(G) \geq \ell(H) \geq \delta(H) \geq \chi(G) - 1. \quad ||$$

Im Jahre 1941 fand Brooks folgende interessante Verschärfung der Abschätzung (12.2).

**Satz 12.5 (Brooks [1] 1941).** Für einen schlichten, zusammenhängenden Graphen  $G$ , der weder ein Kreis ungerader Länge noch vollständig ist, gilt  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

*Beweis.* Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph, der weder ein Kreis ungerader Länge noch vollständig ist. Setzen wir  $\chi(G) = q$ , so gilt notwendig  $q \geq 2$ . Nach Bemerkung 12.4 ii) besitzt  $G$  einen  $q$ -kritischen Teilgraphen  $H$  mit  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ , der gemäß Bemerkung 12.4 iii) ein Block ist.

Ist  $H$  ein Kreis ungerader Länge oder  $H \cong K_q$ , so gilt  $G \neq H$ , und da  $G$  zusammenhängend ist, gibt es in  $G$  noch mindestens eine Kante, die nicht zu  $H$  gehört, die aber mit einer Ecke aus  $H$  inzidiert. Diese Überlegungen liefern uns sofort  $\Delta(H) < \Delta(G)$ . Daraus folgt in beiden Fällen

$$\chi(G) = q = \chi(H) = \Delta(H) + 1 \leq \Delta(G).$$

Daher können wir im folgenden annehmen, daß  $H$  weder vollständig noch ein Kreis ungerader Länge ist, womit wir insbesondere nach Bemerkung 12.4 iv)  $\chi(H) = q \geq 4$  voraussetzen dürfen. Da  $H$  nicht vollständig ist, ergibt sich daraus  $n = n(H) \geq 5$ . Für den weiteren Beweis unterscheiden wir zwei Fälle.

1. *Fall:* Der  $q$ -kritische Graph  $H$  ist 3-fach eckenzusammenhängend, d.h.  $H - \{a, b\}$  ist für alle  $a, b \in E(H)$  zusammenhängend (man vgl. auch Definition 14.1). Da  $H$  nicht vollständig ist, existieren zwei Ecken  $x$  und  $y$  mit  $d_H(x, y) = 2$ . Es sei  $w$  ein gemeinsamer Nachbar von  $x$  und  $y$ . Nun setzen wir  $x = v_1$  und  $y = v_2$ , und es sei  $v_3, v_4, \dots, v_n$  eine Anordnung der Ecken aus  $H - \{x, y\}$ , so daß für  $3 \leq i < n$  jede Ecke  $v_i$  zu mindestens einer Ecke  $v_j$  mit  $j > i$  adjazent ist. Da  $H - \{x, y\}$  zusammenhängend ist, kann man eine solche Reihenfolge z.B. dadurch gewinnen, daß man die Ecken in einer nicht zunehmenden Folge bezüglich der Entfernung zu  $w$  anordnet. Damit ist  $v_n = w$  und für alle  $1 \leq i < n$  ist  $v_i$  in  $H$  zu mindestens einer Ecke  $v_j$  mit  $j > i$  adjazent, denn  $v_1$  und  $v_2$  sind zu  $v_n$  adjazent. Daher sind alle Ecken  $v_i$  mit  $1 \leq i < n$  zu höchstens  $\Delta(H) - 1$  Ecken  $v_j$  mit  $j < i$  adjazent. Nun sind wir in der Lage eine echte Eckenfärbung von  $H$  anzugeben, die nur die Farben  $1, 2, \dots, \Delta(H)$  benötigt. Man färbe die Ecken  $v_1$  und  $v_2$  mit der Farbe 1. Jede der Ecken  $v_3, v_4, \dots, v_{n-1}$  wird mit einer der

Farben  $1, 2, \dots, \Delta(H)$  gefärbt, die nicht bei den adjazenten Vorgängern auftritt. Die Ecke  $v_n = w$  ist zu den Ecken  $v_1 = x$  und  $v_2 = y$  adjazent, die beide mit 1 gefärbt wurden. Daher findet man auch für  $v_n = w$  eine zulässige Farbe. Insgesamt ergibt sich für diesen Fall

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \Delta(H) \leq \Delta(G).$$

2. Fall: Der  $q$ -kritische Graph  $H$  ist nicht 3-fach eckenzusammenhängend. Dann gibt es zwei Ecken  $a$  und  $b$  in  $H$ , so daß  $H - \{a, b\}$  in verschiedene Komponenten zerfällt.

Wegen  $\chi(H) = q \geq 4$ , folgt aus Satz 12.3 die Ungleichung  $\delta(H) \geq q - 1 \geq 3$ . Da  $H$  nicht vollständig ist, existiert daher in  $H$  eine Ecke  $u$  mit  $3 \leq d(u, H) \leq n - 2$ .

Ist  $H - u$  wieder ein Block, so sei  $v$  eine Ecke aus  $H$  mit  $d_H(u, v) = 2$ . Eine solche Ecke  $v$  existiert, da  $u$  nicht zu allen Ecken aus  $H - u$  adjazent ist. Mit  $x = u$  und  $y = v$  verfähre man wie im 1. Fall.

Ist  $H - u$  kein Block, so besitzt  $H - u$  nach Folgerung 8.2 mindestens zwei Endblöcke  $B_1$  und  $B_2$  mit den Schnittecken  $w_1$  und  $w_2$  ( $w_1 = w_2$  ist dabei möglich). Da  $H$  ein Block ist, überlegt man sich leicht, daß es Ecken  $u_1 \in E(B_1) - \{w_1\}$  und  $u_2 \in E(B_2) - \{w_2\}$  gibt, die in  $H$  zu  $u$  adjazent sind. Mit  $x = u_1$  und  $y = u_2$  kann man wie im 1. Fall vorgehen, denn wegen  $d(u, H) \geq 3$ , ist  $H - \{x, y\}$  zusammenhängend. Damit ist der Satz von Brooks vollständig bewiesen ist. ||

Der hier geführte Beweis des Satzes von Brooks ist dem Buch von Chartrand und Lesniak [1] S. 275 – 276 entnommen, der einer Idee von Lovász [3] aus dem Jahre 1975 folgt.

Ohne Beweis geben wir eine weitere interessante Abschätzung der chromatischen Zahl an, die auf Erdős und Gallai [2] zurückgeht.

**Satz 12.6 (Erdős, Gallai [2] 1964).** Ist  $G$  ein schlichter, regulärer und nicht vollständiger Graph der Ordnung  $n \geq 5$ , so gilt  $\chi(G) \leq \frac{3}{5}n$ .

**Satz 12.7 (Nordhaus, Gaddum [1] 1956).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$ , so gilt

- i)  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ ,
- ii)  $n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq ((n + 1)/2)^2$ .

*Beweis.* Es sei  $h_1$  eine echte  $\chi(G)$ -Färbung von  $G$  und  $h_2$  eine echte  $\chi(\overline{G})$ -Färbung von  $\overline{G}$ . Diese beiden Färbungen liefern nun eine echte Eckenfärbung des  $K_n = G \cup \overline{G}$  wie folgt. Ist  $v$  eine beliebige Ecke des  $K_n$ , so geben wir  $v$  die Farbe  $(h_1(v), h_2(v))$ . Da jeweils zwei verschiedene Ecken des  $K_n$  entweder in  $G$  oder in  $\overline{G}$  adjazent sind, haben wir durch diese Färbung alle Ecken des  $K_n$  verschieden gefärbt, womit dies tatsächlich eine echte Eckenfärbung des  $K_n$  darstellt. Daraus ergibt sich  $n = \chi(K_n) \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G})$ , womit die untere Schranke in ii) bewiesen ist. Daraus folgt

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{\chi(G) \cdot \chi(\overline{G})} \leq \frac{\chi(G) + \chi(\overline{G})}{2},$$

womit auch die untere Schranke in i) bestätigt ist.

Die obere Schranke in i) beweisen wir durch Induktion nach  $n$ . Für  $n = 1$  und  $n = 2$  ist diese Schranke sicherlich richtig. Daher sei nun  $n \geq 3$ . Ist  $v$  eine beliebige Ecke von  $G$ , so sei  $H = G - v$ . Es gilt natürlich

$$\begin{aligned} \chi(G) &\leq \chi(H) + 1, \\ \chi(\overline{G}) &\leq \chi(\overline{H}) + 1. \end{aligned}$$



Gilt in beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen, so folgt  $d(v, G) \geq \chi(H)$  und  $d(v, \overline{G}) \geq \chi(\overline{H})$  und somit

$$\chi(H) + \chi(\overline{H}) \leq d(v, G) + d(v, \overline{G}) = n - 1,$$

und wir erhalten das gewünschte Resultat

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) = \chi(H) + 1 + \chi(\overline{H}) + 1 \leq (n - 1) + 2 = n + 1.$$

Gilt in den obigen Ungleichungen wenigstens einmal das echte Ungleichheitszeichen, so liefert die Induktionsvoraussetzung unmittelbar das gewünschte Resultat wie folgt

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \chi(H) + \chi(\overline{H}) + 1 \leq (n - 1) + 1 + 1 = n + 1.$$

Aus der oberen Schranke in i) folgt

$$4\chi(G)\chi(\overline{G}) \leq (\chi(G) - \chi(\overline{G}))^2 + 4\chi(G)\chi(\overline{G}) = (\chi(G) + \chi(\overline{G}))^2 \leq (n + 1)^2,$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist. ||

Nun präsentieren wir noch eine untere und eine obere Schranke von  $\chi(G)$  in Abhängigkeit der Ordnung und der Größe von  $G$ .

**Satz 12.8 (Meyers, Liu [1] 1971).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$ , so gilt

$$\theta(G) \geq \frac{n^2}{n + 2m(G)}, \quad (12.3)$$

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m(G)}. \quad (12.4)$$

*Beweis.* Für den Beweis von (12.3) sei  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_{\theta(G)}\}$  eine minimale Cliquenzersetzung von  $G$ . Dann gilt  $\omega(\overline{G}) \leq \theta(G)$ , und daher liefert der Satz von Turán (Satz 9.22)

$$n^2 - n = 2m(K_n) = 2m(G) + 2m(\overline{G}) \leq 2m(G) + \frac{\theta(G) - 1}{\theta(G)} n^2.$$

Daraus folgt  $(2m(G) + n)\theta(G) \geq n^2$  und damit (12.3).

Beachten wir  $\chi(G) = \theta(\overline{G})$  und  $2m(\overline{G}) = n^2 - n - 2m(G)$ , so ergibt sich (12.4) aus (12.3) wie folgt:

$$\chi(G) = \theta(\overline{G}) \geq \frac{n^2}{n + 2m(\overline{G})} = \frac{n^2}{n^2 - 2m(G)}. \quad ||$$

**Satz 12.9 (Hansen [1] 1979).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m(G) + \frac{1}{4}}.$$

*Beweis.* Es sei  $S_1, S_2, \dots, S_p$  eine Partition von  $E(G)$ , so daß  $S_1$  eine maximale unabhängige Eckenmenge von  $G = G_1$  ist und  $S_i$  eine maximale unabhängige Eckenmenge von  $G_i = G[E(G) - \cup_{j=1}^{i-1} S_j]$  für  $i \geq 2$  ist. Damit haben wir  $E(G)$  in  $p \geq \chi(G)$  unabhängige Eckenmengen zerlegt. Da  $S_i$  eine maximale unabhängige Eckenmenge in  $G_i$  ist, ist  $S_i$  gleichzeitig eine

Dominanzmenge von  $G_i$ . Daher hat jede Ecke  $x \in S_i$  mindestens  $i - 1$  Nachbarn in  $\cup_{j=1}^{i-1} S_j$  für  $i \geq 2$ . Diese Überlegungen liefern nun

$$m(G) \geq |S_2| + 2|S_3| + \cdots + (p-1)|S_p| \geq 1 + 2 + \cdots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2},$$

woraus sich  $p^2 - p - 2m(G) \leq 0$  ergibt. Durch eine einfache Rechnung folgt daraus schließlich

$$\chi(G) \leq p \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m(G) + \frac{1}{4}}. \quad \parallel$$

## 12.2 Die (pseudo-) achromatische Zahl

**Satz 12.10.** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\psi_s(G) \leq \frac{1}{2}(n(G) + \omega(G)).$$

*Beweis.* Es sei  $\psi_s(G) = p$  und  $1, 2, \dots, p$  die Farben einer vollständigen  $p$ -Färbung von  $G$ . Dann besitzt diese Färbung höchstens  $\omega(G)$  Farben, die nur einmal auftreten, denn gäbe es mehr, so müßten diese alle untereinander adjazent sein, und wir hätten dann eine größere Clique. Daraus folgt die gewünschte Abschätzung

$$\psi_s(G) \leq \omega(G) + \frac{1}{2}(n(G) - \omega(G)) = \frac{1}{2}(n(G) + \omega(G)). \quad \parallel$$

Aus Satz 12.10 und (12.1) ergibt sich sofort der folgende Zusammenhang zwischen der chromatischen und pseudoachromatischen Zahl, der auf Bhave [1] 1979 zurückgeht. Implizit ist dieses Ergebnis allerdings schon bei Auerbach und Laskar [1] 1976 zu finden.

**Folgerung 12.1 (Bhave [1] 1979).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\psi_s(G) \leq \frac{1}{2}(n(G) + \chi(G)). \quad (12.5)$$

**Satz 12.11 (Harary, Hedetniemi, Prins [1] 1967).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\psi_s(G) \leq n(G) + 1 - \alpha(G). \quad (12.6)$$

*Beweis.* Es sei  $S$  eine maximale unabhängige Menge, und es seien  $1, 2, \dots, t$  die Farben einer vollständigen  $p$ -Färbung von  $G$ , die in der Eckenmenge  $\bar{S}$  auftreten. Dann ist  $t \leq |\bar{S}| = n(G) - \alpha(G)$ , und in  $S$  kann höchstens eine weitere Farbe  $t + 1$  vorkommen. Daraus folgt  $\psi_s(G) \leq t + 1 \leq n(G) + 1 - \alpha(G)$ .  $\parallel$

Für den bipartiten Fall liefert Satz 12.11 unmittelbar folgende Verbesserung der Ungleichung (12.5).

**Folgerung 12.2.** Ist  $G$  ein Faktor des vollständigen bipartiten Graphen  $K_{r,t}$  mit  $1 \leq r \leq t$ , so gilt

$$\psi(G) \leq \psi_s(G) \leq r + 1. \quad (12.7)$$

**Beispiel 12.2.** Es sei  $G$  der vollständige bipartite Graph  $K_{r,t}$  mit der Bipartition  $E_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ ,  $E_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$  und  $1 \leq r \leq t$ . Färbt man die Ecken  $x_i$  und  $y_i$  mit der Farbe  $i$  für alle  $1 \leq i \leq r-1$ , die Ecke  $x_r$  mit der Farbe  $r$  und die Ecken  $y_r, y_{r+1}, \dots, y_t$  mit der Farbe  $r+1$ , so hat man eine vollständige  $(r+1)$ -Färbung von  $G$ . Wegen Folgerung 12.2 gilt sogar  $\psi_s(G) = r+1$ , womit die zweite Ungleichung in (12.7) scharf ist.

Entfernt man aus  $G$  das Matching  $M = \{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_{r-1}y_{r-1}\}$ , so ist unsere Färbung in  $G' = G - M$  sogar eine echte und vollständige  $(r+1)$ -Färbung. Daher folgt aus (12.7)

$$\psi(G') = \psi_s(G') = r+1,$$

womit auch die Ungleichung  $\psi(G) \leq r+1$  für bipartite Graphen scharf ist.

Allgemeiner als in Beispiel 12.2, wollen wir im nächsten Satz für alle vollständigen  $p$ -partiten Graphen die pseudoachromatische Zahl bestimmen.

**Satz 12.12 (Auerbach, Laskar [1] 1976).** Ist  $G$  der vollständige  $p$ -partite Graph  $K_{r_1, r_2, \dots, r_p}$  mit  $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ , so gilt

$$\psi_s(G) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{n(G) + p}{2} \right\rfloor, n(G) + 1 - r_p \right\}. \tag{12.8}$$

*Beweis.* Wir setzen  $n(G) = n$  und bezeichnen mit  $t$  die rechte Seite von (12.8). Aus (12.5) und (12.6) folgt sofort  $\psi_s(G) \leq t$ .

Es sei  $E_1, E_2, \dots, E_p$  eine Partition von  $G$  mit  $|E_i| = r_i$ . Wir wählen Ecken  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aus  $G$  mit  $a_i \in E_i$  für  $i \leq p$  und für  $i, j > p$ , so daß aus  $i < j$ ,  $a_i \in E_l$  und  $a_j \in E_q$  folgt:  $l \leq q$ . Nun geben wir allen Ecken  $a_i$  folgende Färbung  $h$ :

- i)  $h(a_i) = i$  für  $i \leq t$ .
- ii)  $h(a_{n+1-i}) = \max \{1, t+1-i\}$  für  $i \leq n-t$ .

Diese Färbung benutzt  $t$  Farben, wobei die Farben  $1, 2, \dots, p$  in verschiedenen Mengen  $E_i$  vorkommen und die Farben  $p+1, p+2, \dots, t$  mindestens zweimal auftreten. Denn ist  $p+1 \leq i \leq t$ , so ergibt sich aus  $2t \leq n+p$  die Ungleichung  $t-i+1 \leq n-t$ , und daher folgt aus der Definition von  $h$  für alle  $p+1 \leq i \leq t$

$$h(a_i) = h(a_{n+1-i}) = h(a_{n+1-(t-i+1)}) = i.$$

Um zu zeigen, daß  $h$  eine vollständige  $t$ -Färbung von  $G$  ist, genügt es nachzuweisen, daß für  $p+1 \leq i \leq t$  die Ecken  $a_i$  und  $a_{n+1-i}$  in verschiedenen Partitions Mengen liegen. Angenommen, die Ecken  $a_i$  und  $a_{n+1-i}$  gehören zu der gleichen Menge  $E_s$ . Dann sind nach Definition die Ecken  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n+1-i}$  und die Ecke  $a_s$  Elemente von  $E_s$ . Daraus ergibt sich wegen  $t \leq n+1-r_p$

$$|E_s| \geq n-t+2 \geq n+2 - (n+1-r_p) = 1+r_p,$$

was natürlich nicht möglich ist. Daher gilt  $\psi_s(G) \geq t$ , womit wir insgesamt (12.8) nachgewiesen haben. ||

**Bemerkung 12.5.** Satz 12.12 zeigt, daß im Fall

$$\left\lfloor \frac{n(G) + p}{2} \right\rfloor \leq n(G) + 1 - r_p$$

in (12.5) das Gleichheitszeichen und im Fall

$$\left\lfloor \frac{n(G) + p}{2} \right\rfloor \geq n(G) + 1 - r_p$$

in (12.6) das Gleichheitszeichen steht, womit die Ungleichungen (12.5) und (12.6) bestmöglich sind.

Als nächstes wollen wir eine Abschätzung von  $\psi(G)$  nach unten geben. Dazu benötigen wir ein Resultat, das auf Geller und Kronk zurückgeht.

**Satz 12.13 (Geller, Kronk [1] 1974).** Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $a$  eine beliebige Ecke von  $G$ , so gilt

$$\psi(G) \geq \psi(G - a) \geq \psi(G) - 1.$$

*Beweis.* Ist  $\psi(G - a) = q$ , so besitzt auch  $G$  eine echte und vollständige  $q$ -Färbung, außer wenn jede der  $q$  Farben zur Ecke  $a$  adjazent ist. In diesem Fall besitzt  $G$  aber eine echte und vollständige  $(q + 1)$ -Färbung, womit wir  $\psi(G) \geq \psi(G - a)$  bewiesen haben.

Ist  $\psi(G) = q$ , so betrachte man die echte Färbung von  $G - a$ , die durch eine echte und vollständige  $q$ -Färbung von  $G$  induziert wird. Ist diese  $q$ -Färbung von  $G - a$  nicht vollständig, und hat  $a$  die Farbe  $i$ , so existiert eine Farbe  $j$ , die in  $G - a$  zu keiner mit  $i$  gefärbten Ecke adjazent ist. Geben wir nun jeder Ecke mit der Farbe  $i$  aus  $G - a$  die Farbe  $j$ , so erhalten wir eine echte und vollständige  $(q - 1)$ -Färbung von  $G - a$ , womit wir  $\psi(G - a) \geq \psi(G) - 1$  gezeigt haben. ||

**Folgerung 12.3.** Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $H$  ein induzierter Teilgraph von  $G$ , so gilt  $\psi(H) \leq \psi(G)$ .

Analog zum Beweis von Satz 12.13 zeigt man

**Satz 12.14 (Geller, Kronk [1] 1974).** Ist  $G$  ein schlichter Graph und  $k$  eine beliebige Kante von  $G$ , so gilt

$$\psi(G) + 1 \geq \psi(G - k) \geq \psi(G) - 1.$$

**Satz 12.15 (Volkman [4] 1991).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $B$  eine Clique von  $G$  mit  $E(B) = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ . Weiter sei  $M = \{k_1, k_2, \dots, k_s\}$  ein Matching von  $\overline{G}$  mit  $E(M) \cap E(B) = \emptyset$  und

$$N(x_i, G) \cap E(k_j) \neq \emptyset \tag{12.9}$$

für alle  $1 \leq i \leq t$  und  $1 \leq j \leq s$ . Ist  $\overline{G}[E(k_i) \cup E(k_j)] \not\cong K_4$  für alle  $1 \leq i, j \leq s$ , so gilt

$$\psi(G) \geq s + t. \tag{12.10}$$

*Beweis.* Für alle  $1 \leq i \leq s$  färben wir die beiden Ecken, die mit der Kante  $k_i$  inzident sind, mit der Farbe  $i$ . Da  $\overline{G}[E(k_i) \cup E(k_j)] \not\cong K_4$  für  $i \neq j$  gilt, existiert in  $G$  eine Kante, die mit  $k_i$  und  $k_j$  inzidiert. Da dies für alle  $1 \leq i < j \leq s$  gilt, besitzt der induzierte Teilgraph  $G[E(M)]$  eine echte und vollständige  $s$ -Färbung.

Nun färben wir die Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_t$  der gegebenen Clique  $B$  mit den Farben  $s + 1, s + 2, \dots, s + t$ . Da  $B$  eine Clique ist, und  $E(M) \cap E(B) = \emptyset$  gilt, ergibt sich zusammen mit der Bedingung (12.9), daß der induzierte Teilgraph  $G[E(M) \cup E(B)]$  eine echte und vollständige  $(s + t)$ -Färbung besitzt. Zusammen mit der Folgerung 12.3 erhalten wir daraus sofort das gewünschte Ergebnis. ||

Aus Satz 12.15 ergeben sich einige bekannte Resultate, die Geller und Kronk [1] 1974 publiziert haben.

**Folgerung 12.4 (Geller, Kronk [1] 1974).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $\zeta(G)$  die Anzahl der Ecken vom Grad  $n(G) - 1$ . Ist  $\kappa^*(\overline{G})$  die Anzahl der nicht trivialen Komponenten im Komplementärgraphen  $\overline{G}$ , so gilt

$$\psi(G) \geq \zeta(G) + \kappa^*(\overline{G}).$$

**Folgerung 12.5 (Geller, Kronk [1] 1974).** Es sei  $G$  ein Faktor des vollständigen bipartiten Graphen  $K_{r,t}$  und  $E_1, E_2$  eine Bipartition von  $G$ . Weiter sei  $\tilde{G} = K_{r,t} - K(G)$  und  $\kappa^*(\tilde{G})$  die Anzahl der nicht trivialen Komponenten von  $\tilde{G}$ . Für  $i = 1, 2$  setzen wir  $\tau_i = 1$ , wenn in  $E_i$  mindestens eine Ecke existiert, die zu allen Ecken aus  $E_{3-i}$  adjazent ist, und  $\tau_i = 0$  sonst. Dann gilt

$$\psi(G) \geq \tau_1 + \tau_2 + \kappa^*(\tilde{G}).$$

**Bemerkung 12.6.** Ist  $\psi_s(G) \geq \Delta(G) + 2$  oder  $\psi(G) \geq \Delta(G) + 2$ , so muß bei den jeweiligen Färbungen jede Farbe zweimal auftreten (man vgl. Aufgabe 12.9).

**Folgerung 12.6.** Ist  $G$  ein  $(r - 1)$ -regulärer Faktor des Graphen  $K_{r,r}$  ( $r > 1$ ), so gilt

$$\psi(G) = r = \psi_s(G).$$

*Beweis.* Da das relative Komplement  $\tilde{G} = K_{r,r} - K(G)$  aus  $r$  Komponenten besteht, die alle 1-regulär sind, ergibt sich aus Folgerung 12.5 die Abschätzung  $\psi(G) \geq r$ . Wäre  $\psi_s(G) \geq r + 1$ , so müßten nach Bemerkung 12.6 alle Farben doppelt auftreten, was natürlich nicht möglich ist. Daraus folgt  $r \leq \psi(G) \leq \psi_s(G) \leq r$ , womit Folgerung 12.6 bewiesen ist.  $\parallel$

**Folgerung 12.7.** Ist  $G$  ein  $(r - 2)$ -regulärer Faktor des Graphen  $K_{r,r}$  ( $r > 2$ ), und enthält das relative Komplement  $\tilde{G} = K_{r,r} - K(G)$  keinen Kreis  $C_4$  der Länge 4, so gilt

$$\psi(G) = r = \psi_s(G).$$

*Beweis.* Jede Komponente von  $\tilde{G}$  ist 2-regulär und gerade, womit ein perfektes Matching

$$M = \{k_1, k_1, \dots, k_r\} \subseteq K(\tilde{G}) \subseteq K(\overline{G})$$

existiert. Da der Graph  $\tilde{G}$  keinen Kreis  $C_4$  der Länge 4 enthält, gilt  $\overline{G}[E(k_i) \cup E(k_j)] \not\cong K_4$  für alle  $1 \leq i < j \leq r$ , womit aus Satz 12.15  $\psi(G) \geq r$  folgt. Aus der Tatsache, daß  $\psi_s(G) \geq r + 1$  nicht möglich ist, ergibt sich unsere Behauptung.  $\parallel$

**Bemerkung 12.7.** Im Zusammenhang mit Folgerung 12.7 zeigt eine genauere Analyse:

- Für jeden  $(r - 2)$ -regulären Faktor  $G$  des Graphen  $K_{r,r}$  ( $r > 2$ ) gilt  $\psi_s(G) = r$ .
- Ist  $G$  ein  $(r - 2)$ -regulärer Faktor des Graphen  $K_{r,r}$  ( $r > 2$ ), und enthält das relative Komplement  $\tilde{G} = K_{r,r} - K(G)$  mindestens drei Kreise  $C_4$  der Länge 4, so gilt  $\psi(G) \leq r - 1$ .

## 12.3 Chromatische Polynome

**Definition 12.3.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph. Wir bezeichnen die Anzahl der Abbildungen  $h: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ , die die Eigenschaft  $h(x) \neq h(y)$  für alle adjazenten Ecken  $x, y$  besitzen, mit  $P(q, G)$ . Damit bedeutet  $P(q, G)$  die Anzahl der verschiedenen echten  $q$ -Färbungen von  $G$ .

Beim Versuch die Vierfarbenvermutung zu lösen, wurde in den Jahren 1912 und 1913 die Größe  $P(q, G)$  von G. D. Birkhoff [1] und [2] für Landkarten  $G$  eingeführt. Als eines seiner Hauptergebnisse hat Birkhoff gezeigt, daß  $P(q, G)$  stets ein Polynom in  $q$  ist, welches heute den Namen *chromatisches Polynom* von  $G$  trägt. Wir wollen einige von Birkhoff's Resultaten und weitere Ergänzungen durch Whitney [3] 1932, Read [1] 1968 und Meredith [1] 1972 für beliebige schlichte Graphen beweisen. Dazu berechnen wir das chromatische Polynom  $P(q, G)$  zunächst für zwei spezielle Graphen.

**Bemerkung 12.8.** a) Es sei  $G$  ein Nullgraph der Ordnung  $n$ . Als Kombination  $n$ -ter Ordnung von  $q$  Elementen mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge ergibt sich

$$P(q, G) = q^n. \quad (12.11)$$

b) Es sei  $G$  der vollständige Graph  $K_n$ . Ist  $q \geq n$ , so hat man für die erste Ecke  $q$  Möglichkeiten, für die zweite Ecke  $q - 1$  Möglichkeiten usw. und für die  $n$ -te Ecke  $q - n + 1$  Möglichkeiten für eine echte Eckenfärbung. Daraus ergibt sich

$$P(q, K_n) = q(q - 1) \dots (q - n + 1). \quad (12.12)$$

c) Ein Graph  $G$  besitzt natürlich genau dann eine echte  $q$ -Färbung, wenn  $P(q, G) > 0$  gilt.

Wir werden nun eine einfache aber fundamentale Rekursionsformel für das chromatische Polynom  $P(q, G)$  herleiten. Dazu benutzen wir die Methode der Kantenkontraktion, die im Vergleich zur Definition 2.9 hier etwas modifiziert wird.

**Definition 12.4.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $k = ab$  eine Kante von  $G$ . Der Graph  $G^{(k)}$  entstehe aus  $G$  durch *Kontraktion der Kante  $k$* , d.h.  $k$  wird gelöscht, die Ecken  $a$  und  $b$  werden identifiziert, und eventuell auftretende parallele Kanten werden zu einer Kante vereinigt.

**Beispiel 12.3.** In der folgenden Skizze führen wir eine Kontraktion der Kante  $l$  gemäß Definition 12.4 durch.



**Bemerkung 12.9.** Nach Definition 12.4 ist  $G^{(l)}$  wieder ein schlichter Graph. Es gilt offensichtlich  $\kappa(G^{(l)}) = \kappa(G)$ ,  $n(G^{(l)}) = n(G) - 1$  und  $m(G^{(l)}) \leq m(G) - 1$ . Ist  $G$  ein Baum, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \mu(G^{(l)}) &= m(G^{(l)}) - n(G^{(l)}) + \kappa(G^{(l)}) \\ &\leq m(G) - 1 - n(G) + 1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

womit  $G^{(l)}$  nach Folgerung 2.1 auch ein Baum ist.

**Satz 12.16 (Rekursionsformel).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt für alle  $l \in K(G)$

$$P(q, G) = P(q, G - l) - P(q, G^{(l)}). \quad (12.13)$$

*Beweis.* Es sei  $l = ab$  und  $u$  diejenige Ecke von  $G^{(l)}$ , die durch Identifizierung von  $a$  und  $b$  entstanden ist. Jeder echten  $q$ -Färbung von  $G - l$ , bei der die Ecken  $a$  und  $b$  die gleiche Farbe  $j$  haben, entspricht genau einer echten  $q$ -Färbung von  $G^{(l)}$ , bei der die Ecke  $u$  die Farbe  $j$  hat und umgekehrt. Jeder echten  $q$ -Färbung von  $G - l$ , bei der  $a$  und  $b$  verschiedene Farben haben, entspricht genau einer echten  $q$ -Färbung von  $G$  und umgekehrt. Daraus ergibt sich die Rekursionsformel (12.13) in der Form

$$P(q, G - l) = P(q, G^{(l)}) + P(q, G) \quad (12.14)$$

und der Satz ist bewiesen. ||

**Bemerkung 12.10.** Im Zusammenhang mit der Tailenweite (man vgl. Definition 10.2) sind folgende Tatsachen leicht nachzuweisen. Für  $l \in K(G)$  gilt  $t(G - l) \geq t(G)$ ,  $t(G^{(l)}) \geq t(G) - 1$ , und im Fall  $t(G) \geq 4$  ist  $m(G^{(l)}) = m(G) - 1$ .

Im nächsten Satz, den wir *Fundamentalsatz über chromatische Polynome* nennen wollen, tragen wir einige wichtige Eigenschaften von  $P(q, G)$  zusammen, die man fast alle in den am Anfang dieses Abschnitts zitierten Arbeiten findet. Dieses Ergebnis wird dann auch den Namen "chromatisches Polynom" vollständig klären.

**Satz 12.17 (Fundamentalsatz über chromatische Polynome).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n = n(G)$ , so gilt

$$P(q, G) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i(G) q^{n-i}. \quad (12.15)$$

Setzen wir  $m(G) = m$ ,  $\kappa(G) = \kappa$  und  $a_i(G) = a_i$ , so gelten für das *chromatische Polynom* (12.15) und seine Koeffizienten folgende Aussagen:

i) Es sei  $l \in K(G)$ . Setzt man  $a_{-1}(G^{(l)}) = 0$ , so gilt für alle  $0 \leq i \leq n$  die Identität

$$a_i = a_i(G - l) + a_{i-1}(G^{(l)}).$$

ii)  $P(q, G)$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  mit  $a_0 = 1$  und  $a_1 = m$ .

iii) Die Koeffizienten  $a_i$  sind nicht negative ganze Zahlen, und es gilt  $a_i \neq 0$  genau dann, wenn  $0 \leq i \leq n - \kappa$  ist.

iv) Für alle  $0 \leq i \leq n - \kappa$  gilt

$$\binom{n - \kappa}{i} \leq a_i \leq \binom{m}{i}.$$

v) Für  $0 \leq i \leq t(G) - 2$  ist  $a_i = \binom{m}{i}$ .

vi) Sind  $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$  die Komponenten von  $G$ , so gilt

$$P(q, G) = \prod_{i=1}^{\kappa} P(q, G_i).$$

vii) Ist  $G$  die Vereinigung zweier Teilgraphen  $G_1$  und  $G_2$ , deren Durchschnitt ein vollständiger Graph  $K_r$  ist, so gilt

$$P(q, G) = \frac{P(q, G_1)P(q, G_2)}{P(q, K_r)} = \frac{P(q, G_1)P(q, G_2)}{q(q-1)\dots(q-r+1)}.$$



*Beweis.* Der Beweis von (12.15) und den Aussagen ii) – v) erfolgt durch Induktion nach  $m = m(G)$ . Wegen Bemerkung 12.8 a) sind (12.15) und ii) – v) für  $m = 0$  erfüllt. Nun gelte (12.15) und ii) – v) für alle Graphen mit weniger als  $m$  Kanten, also z.B. für  $G - l$  und  $G^{(l)}$ . Daraus ergibt sich wegen  $n = n(G - l) = n(G^{(l)}) + 1$

$$\begin{aligned} P(q, G - l) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i(G - l) q^{n(G-l)-i}, \\ P(q, G^{(l)}) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_i(G^{(l)}) q^{n(G^{(l)})-i} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i-1}(G^{(l)}) q^{n-i} \end{aligned}$$

und daraus zusammen mit der Rekursionsformel (12.13)

$$P(q, G) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \{a_i(G - l) + a_{i-1}(G^{(l)})\} q^{n-i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i(G) q^{n-i}. \quad (12.16)$$

Damit haben wir (12.15) und i) bestätigt.

Aus i) ergibt sich zusammen mit der Induktionsvoraussetzung  $a_0 = a_0(G - l) + a_{-1}(G^{(l)}) = 1$  und  $a_1 = a_1(G - l) + a_0(G^{(l)}) = m - 1 + 1 = m$ , womit auch ii) nachgewiesen ist.

iii) Nach Induktionsvoraussetzung sind die Koeffizienten  $a_i(G - l)$  und  $a_{i-1}(G^{(l)})$  nicht negative ganze Zahlen, womit wegen i) auch die Koeffizienten  $a_i = a_i(G - l) + a_{i-1}(G^{(l)})$  diese Eigenschaften besitzen.

Im folgenden benutzen wir die bekannte Tatsache  $\kappa(G - l) = \kappa(G) = \kappa$  oder  $\kappa(G - l) = \kappa(G) + 1 = \kappa + 1$  (man vgl. Satz 1.6).

Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $a_i(G - l) \neq 0$  für  $0 \leq i \leq n(G - l) - \kappa(G - l)$ . Daraus folgt: Ist  $\kappa(G - l) = \kappa$ , so gilt  $a_i(G - l) \neq 0$  für  $0 \leq i \leq n - \kappa$ , und ist  $\kappa(G - l) = \kappa + 1$ , so gilt  $a_i(G - l) \neq 0$  für  $0 \leq i \leq n - \kappa - 1$ . Daher ist  $a_i(G - l) \neq 0$  und damit wegen i) auch  $a_i \neq 0$  für  $0 \leq i \leq n - 1 - \kappa$ .

Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $a_i(G^{(l)}) \neq 0$  für  $0 \leq i \leq n(G^{(l)}) - \kappa(G^{(l)}) = n - 1 - \kappa$ , also ergibt sich insbesondere  $a_{n-\kappa-1}(G^{(l)}) \neq 0$ . Zusammen mit i) liefert diese Beobachtung dann  $a_{n-\kappa} = a_{n-\kappa}(G - l) + a_{n-\kappa-1}(G^{(l)}) \neq 0$ .

Weiter gilt nach Induktionsvoraussetzung  $a_i(G^{(l)}) = 0$  für  $i \geq n(G^{(l)}) - \kappa(G^{(l)}) + 1 = n - \kappa$ , also  $a_{i-1}(G^{(l)}) = 0$  für  $i \geq n - \kappa + 1$  und  $a_i(G - l) = 0$  für  $i \geq n(G - l) - \kappa(G - l) + 1$  und daher auch für  $i \geq n - \kappa + 1 \geq n(G - l) - \kappa(G - l) + 1$ . Zusammen mit i) folgt daraus  $a_i = 0$  für  $i \geq n - \kappa + 1$ , womit iii) vollständig bewiesen ist.

iv) Für  $0 \leq i \leq n(G - l) - \kappa(G - l)$  ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung und der Monotonie der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n - \kappa - 1}{i} \leq \binom{n - \kappa(G - l)}{i} \leq a_i(G - l) \leq \binom{m(G - l)}{i} = \binom{m - 1}{i}. \quad (12.17)$$

Ist  $\kappa(G - l) = \kappa$ , so gilt (12.17) für alle  $0 \leq i \leq n - \kappa$ . Ist aber  $\kappa(G - l) = \kappa + 1$ , so ist diese Ungleichung zunächst nur für  $0 \leq i \leq n - \kappa - 1$  richtig. Da nach iii) aber  $a_{n-\kappa(G-l)+1}(G - l) = a_{n-\kappa}(G - l) = 0$  gilt, bleibt uns (12.17) auch für  $i = n - \kappa$  erhalten, womit wir nun (12.17) für alle  $0 \leq i \leq n - \kappa$  nachgewiesen haben.

Für  $0 \leq i - 1 \leq n(G^{(l)}) - \kappa(G^{(l)}) = n - \kappa - 1$ , also für  $1 \leq i \leq n - \kappa$ , ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung und der Monotonie der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n - \kappa - 1}{i - 1} = \binom{n(G^{(l)}) - \kappa(G^{(l)})}{i - 1} \leq a_{i-1}(G^{(l)}) \leq \binom{m(G^{(l)})}{i - 1} \leq \binom{m - 1}{i - 1}. \quad (12.18)$$

Wegen  $a_{-1}(G^{(l)}) = 0$  bleibt (12.18) auch für  $i = 0$  erhalten, womit (12.18) für alle  $0 \leq i \leq n - \kappa$  richtig ist.

Zusammen mit der Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten und i) ergeben sich aus den Ungleichungen (12.17) und (12.18) die Abschätzungen iv) für alle  $0 \leq i \leq n - \kappa$ .

v) Für  $t(G) = 3$  folgt v) sofort aus ii). Nun sei  $t(G) \geq 4$ .

Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $a_i(G - l) = \binom{m-1}{i}$  für  $0 \leq i \leq t(G - l) - 2$ , also auch für  $0 \leq i \leq t(G) - 2$ , wenn wir  $t(G) - 2 \leq t(G - l) - 2$  beachten.

Aus Bemerkung 12.10 ergibt sich  $m(G^{(l)}) = m - 1$ . Daher folgt aus der Induktionsvoraussetzung  $a_{i-1}(G^{(l)}) = \binom{m-1}{i-1}$  für  $0 \leq i - 1 \leq t(G^{(l)}) - 2$ , also für  $1 \leq i \leq t(G^{(l)}) - 1$ . Wegen Bemerkung 12.10 gilt  $t(G) - 2 \leq t(G^{(l)}) - 1$ , womit wir  $a_{i-1}(G^{(l)}) = \binom{m-1}{i-1}$  für  $1 \leq i \leq t(G) - 2$  erhalten. Wegen  $a_{-1}(G^{(l)}) = 0$ , haben wir damit  $a_{i-1}(G^{(l)}) = \binom{m-1}{i-1}$  für alle  $0 \leq i \leq t(G) - 2$  gezeigt.

Die Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten liefert nun zusammen mit i) das gewünschte Ergebnis.

vi) Die Behauptung vi) ist sofort einzusehen, denn die echten Eckenfärbungen der einzelnen Komponenten können unabhängig voneinander vorgenommen werden.

vii) Jede echte Eckenfärbung von  $G$  entspricht genau einem Paar  $(h_1, h_2)$  von echten Eckenfärbungen von  $G_1$  und  $G_2$ , die auf  $K_r$  übereinstimmen und umgekehrt. Ist  $h_1$  eine echte  $q$ -Färbung von  $G_1$ , so gibt es genau  $\frac{P(q, G_2)}{P(q, K_r)}$  echte  $q$ -Färbungen  $h_2$  von  $G_2$ , die auf  $K_r$  mit  $h_1$  übereinstimmen. Zusammen mit (12.10) erhält man daraus die Aussage vii).  $\parallel$

Der Fundamentalsatz zeigt uns, daß sich an den Koeffizienten des chromatischen Polynoms einige Eigenschaften des Graphen ablesen lassen. Der Idealfall wäre, wenn man den Graphen aus dem chromatischen Polynom eindeutig zurückgewinnen könnte. Daß dies aber im allgemeinen nicht möglich ist, zeigt schon das nächste Ergebnis.

**Satz 12.18.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n = n(G)$  und der Größe  $m = m(G)$ . Ist  $G$  ein Wald, so gilt

$$P(q, G) = q^\kappa (q - 1)^{n-\kappa}, \tag{12.19}$$

wobei  $\kappa = \kappa(G)$  ist. Gilt umgekehrt (12.19) für eine natürliche Zahl  $\kappa$  mit  $1 \leq \kappa \leq n$ , so ist  $G$  ein Wald mit  $\kappa$  Komponenten.

*Beweis.* Ist  $G$  ein Wald mit  $\kappa$  Komponenten, so gilt nach Satz 2.4  $m = n - \kappa$ . Daraus ergibt sich zusammen mit dem Fundamentalsatz

$$\begin{aligned} P(q, G) &= \sum_{i=0}^{n-\kappa} (-1)^i \binom{m}{i} q^{n-i} \\ &= q^\kappa \sum_{i=0}^{n-\kappa} \binom{n-\kappa}{i} (-1)^i q^{n-\kappa-i} = q^\kappa (q - 1)^{n-\kappa}. \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt (12.19), so besitzt  $G$  nach Satz 12.17 iii)  $\kappa$  Komponenten. Darüber hinaus liefert (12.19) sofort  $a_1(G) = n - \kappa$ , womit nach Satz 12.17 ii)  $m = n - \kappa$  gilt. Daher ist  $G$  nach Satz 2.4 ein Wald mit  $\kappa$  Komponenten.  $\parallel$

**Satz 12.19.** Ist  $C_n$  ein Kreis der Länge  $n \geq 3$ , so gilt

$$P(q, C_n) = (q - 1)^n + (-1)^n (q - 1).$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Kreislänge. Für  $n = 3$  ergibt sich aus (12.12)

$$P(q, C_3) = q(q-1)(q-2) = (q-1)^3 - (q-1).$$

Für  $n \geq 4$  folgt aus der Rekursionsformel, Satz 12.18 und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} P(q, C_n) &= P(q, C_n - l) - P(q, C_{n-1}) \\ &= q(q-1)^{n-1} - \{(q-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(q-1)\} \\ &= (q-1)^n + (-1)^n(q-1). \end{aligned} \quad \parallel$$

**Bemerkung 12.11.** Aus Satz 12.17 i) und iii) folgt für jeden Faktor  $H$  eines schlichten Graphen  $G$  die Ungleichungen  $a_i(H) \leq a_i(G)$ .

Zur algorithmischen Bestimmung eines chromatischen Polynoms kann man (12.13) solange anwenden, bis alle auftretenden Graphen Wälder oder Kreise sind oder (12.14) solange verwenden, bis alle auftretenden Graphen vollständig sind. Dabei ist die erste Methode günstig für Graphen mit wenig Kanten, die zweite für Graphen mit vielen Kanten.

Die kleinste natürliche Zahl  $q$  mit  $P(q, G) > 0$  ist natürlich  $\chi(G)$ . Daraus ergibt sich zusammen mit (12.14)

$$\chi(G - l) = \min\{\chi(G^{(l)}), \chi(G)\}. \quad (12.20)$$

Wegen Gleichung (12.20) führt folgende Methode zu einer echten Eckenfärbung von  $G$ . Man wende (12.14) solange an, bis alle auftretenden Graphen vollständig sind. Versieht man den kleinsten vollständigen Graphen mit einer echten Eckenfärbung, so erhält man rückwärts eine echte Eckenfärbung des Ausgangsgraphen.

Dieser Algorithmus ist nicht effizient, denn ist  $r$  die Anzahl der zum vollständigen Graphen fehlenden Kanten, so benötigt der Algorithmus  $2^r$  Schritte.

Allerdings ist bis heute keine effizienter Algorithmus zur Bestimmung der chromatischen Zahl oder des chromatischen Polynoms bekannt.

Eine interessante Interpretation der Koeffizienten des chromatischen Polynoms gab Whitney [1] 1932.

**Satz 12.20 (Whitney [1] 1932).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $n = n(G)$  und  $m = m(G)$ . Ist  $\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i q^{n-i}$  das chromatische Polynom von  $G$ , so gilt

$$(-1)^i a_i = \sum_{t=0}^m (-1)^t N(t, n-i), \quad (12.21)$$

wobei  $N(t, j)$  die Anzahl der Faktoren von  $G$  zählt, die  $t$  Kanten und  $j$  Komponenten besitzen.

Einen Beweis von Satz 12.20 findet man z.B. in dem Buch von Aigner [1] auf den Seiten 116 – 117. Mit der Formel (12.21) von Whitney lassen sich weitere Koeffizienten des chromatischen Polynoms berechnen (man vgl. z.B. Farrell [1] 1980 sowie Chao und Li [1] 1985). Zusätzliche Informationen über chromatische Polynome liefert der Artikel von Read und Tutte [1] aus dem Jahre 1988.

## 12.4 Aufgaben

**Aufgabe 12.1.** Für jeden Multigraphen  $G$  beweise man die Ungleichung

$$m(G) \geq \frac{1}{2} \chi(G)(\chi(G) - 1).$$

**Aufgabe 12.2.** Es sei  $\mathbf{P}$  der im Abschnitt 13.1 skizzierte Petersen-Graph.

- i) Man zeige  $\chi(\mathbf{P}) = 3$ .
- ii) Man gebe einen 3-kritischen Teilgraphen  $H$  von  $\mathbf{P}$  mit maximaler Eckenzahl an.

**Aufgabe 12.3.** Ist  $G$  ein selbstkomplementärer Graph, so zeige man  $\sqrt{n(G)} \leq \chi(G)$ .

**Aufgabe 12.4.** Man zeige für Beispiel 12.1

$$\chi(G) = 2 < \psi(G) = 3 < \psi_s(G) = 4.$$

**Aufgabe 12.5.** Man beweise Satz 12.14.

**Aufgabe 12.6.** Es seien  $G$  und  $H$  zwei disjunkte Multigraphen. Man beweise

$$\psi(G + H) = \psi(G) + \psi(H).$$

**Aufgabe 12.7.** Ist  $G$  ein schlichter Graph,  $a \in E(G)$  und  $k \in K(G)$ , so zeige man:

$$\begin{aligned} \psi_s(G) &\geq \psi_s(G - a) \geq \psi_s(G) - 1 \\ \psi_s(G) &\geq \psi_s(G - k) \geq \psi_s(G) - 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.8.** Man beweise die Folgerungen 12.4 und 12.5.

**Aufgabe 12.9.** Man beweise die Bemerkung 12.6.

**Aufgabe 12.10.** Man beweise Bemerkung 12.7.

**Aufgabe 12.11.** Man beweise Bemerkung 12.10.

**Aufgabe 12.12.** Ist  $M$  ein Matching des vollständigen Graphen  $K_n$  und  $G = K_n - M$ , so zeige man  $\psi(G) = n - |M|$ .

**Aufgabe 12.13.** Man weise nacheinander die beiden folgenden Formeln nach.

$$\begin{aligned} P(q, K_{1,1,p}) &= q(q-1)(q-2)^p \\ P(q, K_{2,p}) &= q(q-1)[(q-2)^p + (q-1)^{p-1}] \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.14.** Man zeige, daß  $q^4 - 3q^3 + 3q^2$  kein chromatisches Polynom ist.

**Aufgabe 12.15.** Es sei  $a$  eine Endecke des schlichten Graphen  $G$ . Man zeige  $P(q, G) = (q-1)P(q, G-a)$ .

**Aufgabe 12.16.** Der schlichte Graph  $G$  habe das chromatische Polynom

$$P(q, G) = (q-1)^r R(q),$$

wobei  $r \in \mathbf{N}_0$  und  $R(q)$  ein Polynom mit  $R(1) \neq 0$  ist. Man beweise, daß  $G$  höchstens  $r$  Endkanten besitzt.

**Aufgabe 12.17.** Für welche  $r, s \in \mathbf{Z}$  ist

$$R(q) = q^5 - 5q^4 + 9q^3 - rq^2 + sq$$

ein chromatisches Polynom? Man bestimme bis auf Isomorphie alle Graphen  $G$  mit  $P(q, G) = R(q)$ .

**Aufgabe 12.18.** Wie muß  $r \in \mathbf{Z}$  notwendig gewählt werden, damit

$$R(q) = q^5 - 5q^4 + 10q^3 - 9q^2 + rq$$

ein chromatisches Polynom ist? Man bestimme für diese  $r$  bis auf Isomorphie alle Graphen  $G$  mit  $P(q, G) = R(q)$ .

# Kapitel 13

## Kanten- und Totalfärbung

### 13.1 Der chromatische Index

**Definition 13.1.** Es sei  $G$  ein Multigraph. Eine Abbildung  $h: K(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$  nennt man *Kantenfärbung* oder  *$q$ -Kantenfärbung*, wenn  $h(k_1) \neq h(k_2)$  für alle inzidenten Kanten  $k_1, k_2$  aus  $K(G)$  gilt. Die Werte  $1, 2, \dots, q$  heißen *Farben*, und der Graph  $G$  heißt  *$q$ -kantenfärbbar*. Besitzt der Graph  $G$  eine  $q$ -Kantenfärbung aber keine  $(q - 1)$ -Kantenfärbung, so nennt man  $q$  den *chromatischen Index* von  $G$ , in Zeichen  $q = \chi' = \chi'(G)$ . Ist  $h$  eine Kantenfärbung von  $G$  und  $K_i$  die Menge aller Kanten von  $G$  mit der Farbe  $i$ , so nennen wir  $K_i$  *Farbenklasse*.

Der Begriff der Kantenfärbung ist einer der ältesten in der Graphentheorie. Er wurde schon 1880 von Tait [1] eingeführt, der folgenden schönen Zusammenhang zwischen der Vierfarbenvermutung und der Kantenfärbung gefunden hat.

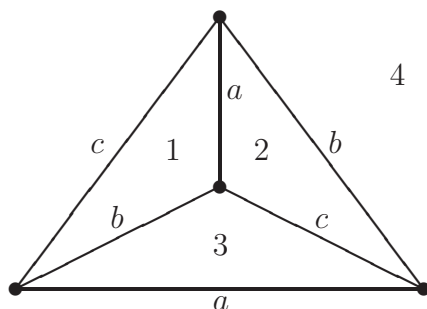
**Satz 13.1 (Tait [1] 1880).** Es sei  $G$  eine normale und 3-reguläre Landkarte. Die Landkarte  $G$  ist genau dann 4-färbbar, wenn  $G$  eine 3-Kantenfärbung besitzt.

*Beweis.* Die Länder von  $G$  seien mit den Farben 1, 2, 3 und 4 gefärbt. Da  $G$  keine Brücken besitzt, gehört jede Kante nach Folgerung 11.2 zum Rand von zwei verschiedenen Ländern. Nun färbe man die Kanten von  $G$  mit den Farben  $a, b$  und  $c$  nach dem folgenden Prinzip.

Eine Kante  $k$  erhält die Farbe  $a$ , wenn  $k$  zum Rand zweier Länder mit den Farben 1 und 2 oder 3 und 4 gehört.

Eine Kante  $k$  erhält die Farbe  $b$ , wenn  $k$  zum Rand zweier Länder mit den Farben 1 und 3 oder 2 und 4 gehört.

Eine Kante  $k$  erhält die Farbe  $c$ , wenn  $k$  zum Rand zweier Länder mit den Farben 1 und 4 oder 2 und 3 gehört.



Damit ist allen Kanten von  $G$  eine Farbe zugeordnet worden. Um zu zeigen, daß inzidente Kanten verschieden gefärbt sind, haben wir wegen der 3-Regularität nur vier Fälle zu unterscheiden. Diese vier Fälle sind in obiger Skizze abzulesen, womit wir den ersten Teil des Beweises erbracht haben.

Nun seien die Kanten von  $G$  mit den Farben  $a, b$  und  $c$  gefärbt. Ist  $M_{ab} \subseteq K(G)$  die Menge der Kanten, die die Farbe  $a$  oder  $b$  besitzen, so sei  $G_{ab} = G[M_{ab}]$  der von  $M_{ab}$  erzeugte Teilgraph. Wegen der 3-Regularität von  $G$ , besteht  $G_{ab}$  aus einer disjunkten Vereinigung von Kreisen. Es ist induktiv sofort einsichtig, daß man die Länder von  $G_{ab}$  mit den beiden Farben  $x$  und  $y$  färben kann. Ist  $M_{ac} \subseteq K(G)$  die Menge der Kanten, die die Farbe  $a$  oder  $c$  besitzen, so können die Länder von  $G_{ac} = G[M_{ac}]$  mit den Farben  $w$  und  $z$  gefärbt werden.

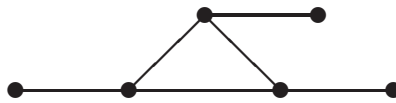
Durch diese Prozedur können wir jedem Land von  $G$  genau ein Farbenpaar  $(x, w)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, w)$  oder  $(y, z)$  zuordnen, womit wir die Länder von  $G$  mit vier verschiedenen Farben gefärbt haben. Nun zeigen wir, daß benachbarte Länder verschiedene Farben besitzen.

Ist die Kante zwischen zwei adjazenten Ländern mit  $a$  oder  $b$  gefärbt, so liegt ein Land im Inneren eines Kreises der aus Kanten besteht, die die Farben  $a$  oder  $b$  tragen, und das andere Land im Äußeren dieses Kreises. Damit weist das eine Land die Farbe  $x$  und das andere die Farbe  $y$  in der ersten Koordinate auf, womit sie notwendig verschieden gefärbt sind. Ist die Kante zwischen zwei adjazenten Ländern mit  $c$  gefärbt, so weist ein Land die Farbe  $w$  und das andere die Farbe  $z$  in der zweiten Koordinate auf, womit auch diese verschieden gefärbt sind. Da wir alle möglichen Fälle diskutiert haben, ist Satz 13.1 vollständig bewiesen.  $\parallel$

**Bemerkung 13.1.** Für jeden schlichten Graphen  $G$  gilt die Identität  $\chi'(G) = \chi(\mathcal{L}(G))$ .

**Bemerkung 13.2.** Ist  $h$  eine  $q$ -Kantenfärbung des Multigraphen  $G$ , so ist jede Farbenklasse ein Matching von  $G$ , und es gilt  $\bigcup_{i=1}^q K_i = K(G)$  mit  $K_i \cap K_j = \emptyset$  für alle  $1 \leq i < j \leq q$ , d.h. die  $q$ -Kantenfärbung  $h$  liefert eine Zerlegung der Kantenmenge in kantendisjunkte Matchings. Umgekehrt kann natürlich durch jede solche Zerlegung eine Kantenfärbung definiert werden.

Man erhält aber in der Regel keine optimale Kantenfärbung, d.h. eine solche, die mit möglichst wenig Farben auskommt, wenn man sukzessive maximale Matchings sucht. Beginnt man beispielsweise in dem skizzierten Graphen  $G$  mit dem maximalen Matching, das aus den drei Endkanten besteht, so gelangt man zu einer Zerlegung in vier kantendisjunkte Matchings, während offensichtlich  $\chi'(G) = 3$  gilt.



Trotz der in Satz 13.1 und den Bemerkungen angegebenen Beziehungen zur Landkartenfärbung, Eckenfärbung und Matchingtheorie hat sich die Kantenfärbung zu einer eigenständigen Disziplin innerhalb der Graphentheorie entwickelt. Dies ist auf die zentralen Resultate von Vizing aus den sechziger Jahren zurückzuführen. Sein bekanntestes Ergebnis, *Satz von Vizing* genannt, liefert eine nicht triviale obere Schranke für den chromatischen Index.

**Satz 13.2 (Satz von Vizing, Vizing [1] 1964).** Für jeden schlichten Graphen  $G$  gilt

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir weitere Bezeichnungen sowie Hilfssatz 13.1. Die nun folgende Vorgehensweise stützt sich auf Goldberg [2] 1984.



**Definition 13.2.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $k = vw_1$  eine Kante von  $G$ . Weiter besitze der Teilgraph  $G - k$  eine  $q$ -Kantenfärbung  $h$ . Ein Tupel  $(vw_1, vw_2, \dots, vw_t)$  von Kanten aus  $G$  heißt  $h$ -Fächer oder Fächer um  $v$ , falls  $h(vw_i) \in \Omega(w_{i-1})$  für  $i = 2, 3, \dots, t$  gilt, wobei  $\Omega(z)$  für eine beliebige Ecke  $z$  die Menge der Farben bezeichnet, die in  $G - k$  an  $z$  nicht vorkommen. Die Menge der Ecken  $w_i$  aller Fächer um  $v$  heißt *Fächermenge*, in Zeichen  $F = F_{h,v}$ . Sind  $i, j$  zwei Farben und ist  $i \in \Omega(z)$ , so heißt der längste in  $z$  beginnende, abwechselnd mit  $j$  und  $i$  gefärbte Weg, die  $\{i, j\}$ -Kette von  $z$  (im Fall  $j \in \Omega(z)$  besteht die  $\{i, j\}$ -Kette von  $z$  nur aus der Ecke  $z$ ).

**Bemerkung 13.3.** Färbt man in der Situation von Definition 13.2 die Kante  $vw_{i-1}$  mit  $h(vw_i)$  für  $i = 2, 3, \dots, t$  und entfärbt die Kante  $vw_t$ , so erhält man eine  $q$ -Kantenfärbung von  $G - vw_t$ . Dieses Vorgehen bezeichnet man als *Umfärben des Fächers*.

**Hilfssatz 13.1.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $k = vw_1$  eine Kante von  $G$ . Weiter seien  $\chi'(G) = q + 1, d(v, G) \leq q$  und  $h$  eine  $q$ -Kantenfärbung von  $G - k$ . Dann gelten folgende Aussagen:

- i) Für alle  $z \in F_{h,v}$  ist  $\Omega(v) \cap \Omega(z) = \emptyset$ .
- ii) Sind  $z \in F_{h,v}, j \in \Omega(z)$  und  $i \in \Omega(v)$ , so ist die  $\{i, j\}$ -Kette von  $z$  gleich der  $\{i, j\}$ -Kette von  $v$ .
- iii) Für verschiedene  $z, u \in F_{h,v}$  gilt  $\Omega(z) \cap \Omega(u) = \emptyset$ .
- iv) Es gilt

$$\sum_{u \in F_{h,v}} |\Omega(u)| \leq |F_{h,v}| - 1.$$

- v) In keinem Fächer um  $v$  kommt eine Kante mehr als einmal vor.

*Beweis.* i) Wir nehmen an, daß i) falsch ist. Dann existieren ein Fächer  $(vw_1, vw_2, \dots, vw_t)$  mit  $w_t = z$  und eine Farbe  $i \in \Omega(v) \cap \Omega(z)$ . Das Umfärben des Fächers und das Färben der Kante  $vz$  mit  $i$  ergeben eine  $q$ -Kantenfärbung von  $G$ . Dies widerspricht  $\chi'(G) = q + 1$ .

ii) Wir nehmen an, daß ii) für ein  $z \in F_{h,v}$  falsch ist. Da  $z$  zur Fächermenge gehört, existiert ein Fächer  $(vw_1, vw_2, \dots, vw_t)$  mit  $w_t = z$ , von dem wir o.B.d.A. annehmen dürfen, daß er unter allen Fächern, die ii) widersprechen, minimale Kantenzahl besitzt. Aufgrund dieser Minimalität ist für  $r < t$  kein  $w_r$  Endecke der  $\{i, j\}$ -Kette von  $z$ . Vertauscht man in der  $\{i, j\}$ -Kette von  $z$  die Farben, so erhält man eine  $q$ -Kantenfärbung  $h'$  von  $G - k$ . Da das Vertauschen der Farben in der  $\{i, j\}$ -Kette die Farben an den Ecken  $w_1, w_2, \dots, w_{t-1}$  nicht verändert hat, ist  $(vw_1, vw_2, \dots, vw_t)$  auch ein Fächer bezüglich  $h'$ . Nun gilt aber  $i \in \Omega(v) \cap \Omega(z)$ , was i) widerspricht.

iii) Da  $d(v, G - k) < q$  gilt, existiert ein  $j \in \Omega(v)$ . Seien nun  $z, u \in F_{h,v}$  und  $i \in \Omega(z) \cap \Omega(u)$ . Nach i) ist  $i \neq j$  und wegen ii) sind die  $\{i, j\}$ -Ketten von  $z$  und  $u$  gleich der  $\{i, j\}$ -Kette von  $v$ , woraus  $z = u$  folgt.

iv) Es sei  $z \in F_{h,v}$  und  $i \in \Omega(z)$ . Dann existiert nach i) eine Kante  $k_0 = vy$  mit  $h(k_0) = i$ . Durch Angabe eines Fächers zeigen wir  $y \in F_{h,v}$ . Wegen  $z \in F_{h,v}$  existiert ein Fächer  $(vw_1, vw_2, \dots, vw_t)$  mit  $w_t = z$ . Ist  $k_0 \in \{vw_1, vw_2, \dots, vw_t\}$ , so ist bereits dieser Fächer geeignet. Anderenfalls aber ist  $(vw_1, vw_2, \dots, vw_t, k_0)$  ein solcher Fächer. Damit ist gezeigt, daß zu jedem  $i \in \bigcup_{u \in F_{h,v}} \Omega(u)$  eine mit  $i$  gefärbte Kante existiert, die  $v$  mit einem Element aus  $F_{h,v}$  verbindet. Da alle diese Kanten mit  $v$  inzidieren, sind sie notwendigerweise verschieden. Wegen  $w_1 \in F_{h,v}$  und  $vw_1 \notin K(G - k)$  ist die Anzahl dieser Kanten höchstens  $|F_{h,v}| - 1$ .



Mit iii) folgt schließlich

$$\sum_{u \in F_{h,v}} |\Omega(u)| = \left| \bigcup_{u \in F_{h,v}} \Omega(u) \right| \leq |F_{h,v}| - 1.$$

v) Angenommen, in dem Fächer  $(vw_1, vw_2, \dots, vw_t)$  gibt es eine Kante, die zweimal oder öfter vorkommt. Wählen wir dann die kleinsten Indizes  $i < j$  mit  $l = vw_i = vw_j$ , so gilt  $w_{i-1} \neq w_{j-1}$  und  $h(l) \in \Omega(w_{i-1}) \cap \Omega(w_{j-1})$ , im Widerspruch zu iii). ||

*Beweis von Satz 13.2.* Die Ungleichung  $\Delta(G) \leq \chi'(G)$  ist klar, da an jeder Ecke maximalen Grades genau  $\Delta(G)$  Farben vorkommen müssen. Nun zu  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Wir gehen dabei indirekt vor und wählen ein Gegenbeispiel  $G$  mit minimaler Kantenzahl. Dann gilt für eine beliebige Kante  $k = vw_1 \in K(G)$

$$\chi'(G - k) \leq \Delta(G - k) + 1 \leq \Delta(G) + 1,$$

wonach eine  $(\Delta(G) + 1)$ -Kantenfärbung  $h$  von  $G - k$  existiert. Bezüglich  $h$  gilt nun für jede Ecke  $u$

$$|\Omega(u)| = \Delta(G) + 1 - d(u, G - k) \geq 1.$$

Daraus folgt

$$\sum_{u \in F_{h,v}} |\Omega(u)| \geq |F_{h,v}|,$$

was Hilfssatz 13.1 iv) mit  $q = \Delta(G) + 1$  widerspricht. ||

Mit mehr Aufwand, aber ohne wesentlich andere Ideen zu benutzen, kann man Satz 13.2 auf Multigraphen ausweiten. Wir geben hier nur Vizings Abschätzung an. Für Verschärfungen sei der Leser auf Andersen [1] 1977 bzw. Goldberg [2] 1984 verwiesen.

**Satz 13.3 (Satz von Vizing, Vizing [1] 1964).** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \max_{a,b \in E(G)} m_G(a, b).$$

**Folgerung 13.1 (Shannon [1] 1949).** Für jeden Multigraphen  $G$  gilt  $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$ .

*Beweis.* Wir setzen  $\Delta(G) = \Delta$  und nehmen an, daß die Folgerung falsch ist. Dann existiert ein Multigraph  $G$  mit  $\chi'(G) = q > \frac{3}{2}\Delta$  und  $\chi'(G - k) = q - 1$  für jede Kante  $k \in K(G)$ . Nach Satz 13.3 gibt es dann zwei Ecken  $u$  und  $v$  mit  $q - m_G(u, v) \leq \Delta$ . Ist  $k_0$  eine Kante, die  $u$  und  $v$  verbindet und  $h$  eine  $(q - 1)$ -Kantenfärbung von  $G - k_0$ , so gelten folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |\Omega(u) \cup \Omega(v)| &\leq q - 1 - (m_G(u, v) - 1) \leq \Delta \\ |\Omega(u)| &\geq q - 1 - (\Delta - 1) = q - \Delta \\ |\Omega(v)| &\geq q - 1 - (\Delta - 1) = q - \Delta \end{aligned}$$

Wegen  $|\Omega(u) \cap \Omega(v)| = |\Omega(u)| + |\Omega(v)| - |\Omega(u) \cup \Omega(v)|$ , ergibt sich daraus

$$|\Omega(u) \cap \Omega(v)| \geq 2(q - \Delta) - \Delta = 2q - 3\Delta > 0.$$

Demnach kann  $h$  zu einer  $(q - 1)$ -Kantenfärbung von  $G$  fortgesetzt werden, indem man  $k_0$  mit einer Farbe aus  $\Omega(u) \cap \Omega(v)$  färbt. Dies widerspricht  $\chi'(G) = q$ . ||

Bevor wir den chromatischen Index einiger Graphen berechnen und damit auch die Schärfe der gegebenen Abschätzungen zeigen, führen wir eine Klassifizierung ein, die wegen der Sätze 13.2 und 13.3 naheliegend ist.

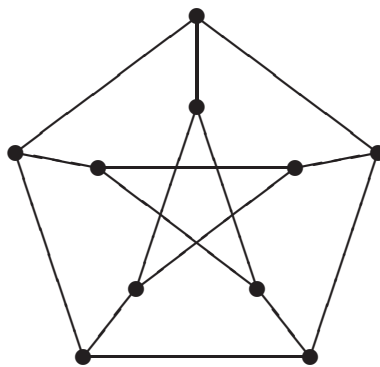
**Definition 13.3.** Ein Multigraph  $G$  heißt *Klasse 1-Graph* oder *Klasse 1*, falls  $\chi'(G) = \Delta(G)$  ist, anderenfalls heißt  $G$  *Klasse 2-Graph* oder *Klasse 2*.

**Beispiel 13.1.** i) Der *Shannonsche Multigraph*  $\text{Sh}(m)$  besteht aus drei Ecken, die untereinander mit  $\lfloor \frac{1}{2}m \rfloor$ ,  $\lfloor \frac{1}{2}m \rfloor$  und  $\lfloor \frac{1}{2}(m+1) \rfloor$  Kanten verbunden sind. Offensichtlich gilt

$$\chi'(\text{Sh}(m)) = |K(\text{Sh}(m))| = \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor.$$

Für gerades  $m$  werden also die oberen Schranken aus Satz 13.3 und Folgerung 13.1 angenommen.

- ii) Der vollständige Graph  $K_{2n}$  ist Klasse 1 (man vgl. Satz 7.14). Bezeichnet  $K_{2n}^*$  den Graphen, der aus  $K_{2n}$  durch Entfernen eines perfekten Matchings hervorgeht, so ist auch  $K_{2n}^*$  Klasse 1 (man vgl. Folgerung 7.3).
- iii) Jeder reguläre Graph mit ungerader Eckenzahl und nicht leerer Kantenmenge ist Klasse 2, also insbesondere Kreise ungerader Länge und der  $K_{2n+1}$  für  $n \geq 1$ , denn keiner dieser Graphen besitzt ein perfektes Matching.
- iv) Jeder bipartite Graph ist Klasse 1, also insbesondere Kreise gerader Länge (man vgl. Satz 6.11 von König).
- v) Der wohl bekannteste 3-reguläre Graph ist der skizzierte *Petersen-Graph*  $\mathbf{P}$ . Im Jahre 1898 hat Petersen [2] gezeigt, daß  $\mathbf{P}$  Klasse 2 bzw. nicht 1-faktorisierbar ist. Wir wollen dafür zwei Beweise vorstellen.



Der Petersen-Graph  $\mathbf{P}$

1. *Beweis [4].* Angenommen, es existiert eine 3-Kantenfärbung  $h: K(\mathbf{P}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . Dann benötigen wir für den äußeren 5-Kreis 3 Farben. O.B.d.A. seien die Kanten des äußeren 5-Kreises wie in Abbildung 1 gefärbt. Dann folgt  $h(k_1) = 2$  und  $h(k_2) = h(k_3) = 3$  und daher  $h(k_4) = 1$ . Nun können wir aber die Kante  $k$  nicht mehr mit 1, 2 oder 3 färben, womit wir einen Widerspruch erzielt haben. ||

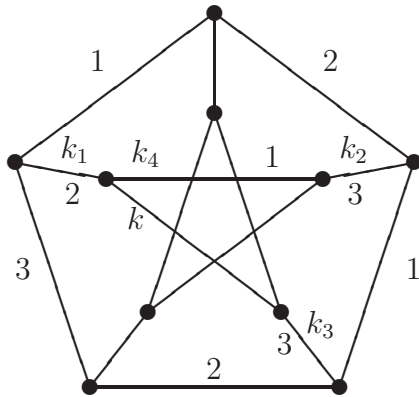


Abbildung 1

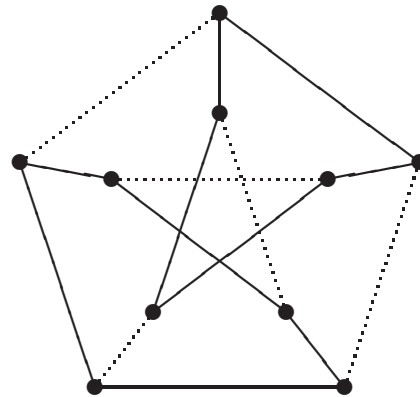


Abbildung 2

Angeregt durch einen weiteren einfachen Beweis von Naserasr und Škrekovski [1] 2003, habe ich in einer Note (vermutlich meiner einzigen “didaktischen” Arbeit) noch einen Beweis dafür gegeben, daß  $\mathbf{P}$  nicht 1-faktorisierbar ist.

2. *Beweis*, (Volkman [19] 2004). Angenommen,  $K(\mathbf{P})$  läßt sich in 3 perfekte Matchings zerlegen. Dann enthält mindestens ein perfektes Matching  $M$  zwei Kanten des äußeren 5-Kreises. O.B.d.A. bestehe  $M$  aus den gepunkteten Kanten in Abbildung 2. Da nun  $\mathbf{P} - M$  aus zwei disjunkten 5-Kreisen besteht, gibt es kein weiteres perfektes Matching, und wir haben unsere Annahme widerlegt. ||

Alle aus dem Petersen-Graphen durch Entfernen einer Ecke hervorgehenden Graphen sind isomorph. Wir nennen einen solchen Graphen  $\mathbf{P}^*$ . Es gilt  $\chi'(\mathbf{P}^*) = 4$  (man vgl. Aufgabe 13.1).

Als nächstes wollen wir die untere Schranke  $\Delta$  für den chromatischen Index verbessern. Das dieser Verbesserung zugrundeliegende einfache Abzählargument wurde unabhängig von verschiedenen Personen beobachtet. Implizit ist es sogar schon bei Vizing [4] 1965 vorhanden.

**Definition 13.4.** Ist  $G$  ein Multigraph mit  $|E(G)| \geq 3$ , so setzen wir

$$\varphi(G) = \frac{2|K(G)|}{|E(G)| - 1}$$

und

$$\Phi(G) = \max \varphi(H),$$

wobei das Maximum über alle Teilgraphen  $H$  von  $G$  ungerader Ordnung mit  $n(H) \geq 3$  zu bilden ist.

**Satz 13.4.** Für jeden Multigraphen  $G$  mit  $|E(G)| \geq 3$  gilt

$$\chi'(G) \geq \max\{\Delta(G), \lceil \Phi(G) \rceil\}.$$

*Beweis.* Es genügt natürlich zu zeigen, daß  $\chi'(G) \geq \Phi(G)$  gilt. Sei dazu  $H$  ein Teilgraph von  $G$  ungerader Ordnung mit  $n(H) \geq 3$  und  $\Phi(G) = \varphi(H)$ . Ist  $h$  eine  $q$ -Kantenfärbung von  $G$ , so ist die Einschränkung von  $h$  auf  $K(H)$  eine  $q$ -Kantenfärbung von  $H$ . Da höchstens  $\frac{1}{2}(|E(H)| - 1)$  Kanten von  $H$  mit einer Farbe gefärbt sein können, folgt  $q \geq \frac{2|K(H)|}{|E(H)| - 1}$ . Daraus ergibt sich

$$\chi'(G) \geq \chi'(H) \geq \varphi(H) = \Phi(G). \quad ||$$

Satz 13.4 ist ein starkes Klasse 2-Kriterium. Wir geben zwei Anwendungen.

**Folgerung 13.2 (Vizing [4] 1965).** Es sei  $G$  ein schlichter und  $r$ -regulärer Graph ( $r > 0$ ) ungerader Ordnung. Ist  $K' \subseteq K(G)$  mit  $|K'| < \frac{r}{2}$ , so ist  $G' = G - K'$  Klasse 2.

*Beweis.* Da  $n(G)$  ungerade ist, etwa  $n(G) = 2p + 1$ , muß  $r$  notwendigerweise gerade sein. Da  $G$  schlicht ist, gilt  $r < n(G)$ , woraus  $\Delta(G') = r$  folgt. Es ist

$$|K(G')| = |K(G)| - |K'| > \frac{r}{2}(2p + 1) - \frac{r}{2} = rp,$$

woraus sich

$$\Phi(G') \geq \varphi(G') > r = \Delta(G')$$

ergibt. Mit Satz 13.4 folgt die Behauptung. ||

**Folgerung 13.3 (Vizing [4] 1965).** Es sei  $G$  ein schlichter und  $r$ -regulärer Graph ( $r \geq 2$ ) gerader Ordnung. Besitzt  $G$  eine Schnittecke, so ist  $G$  Klasse 2.

*Beweis.* Sei  $v$  eine Schnittecke von  $G$ . Nach Voraussetzung ist  $|E(G - v)|$  ungerade, womit der Graph  $G - v$  eine ungerade Komponente  $H$  der Ordnung  $n(H) \geq 3$  besitzt. Da  $v$  eine Schnittecke ist, liegen nicht alle Nachbarn von  $v$  in  $E(H)$ , woraus sich  $m_G(v, E(H)) < r$  ergibt. Es folgt

$$\varphi(H) = \frac{2|K(H)|}{|E(H)| - 1} = \frac{|E(H)|r - m_G(v, E(H))}{|E(H)| - 1} > r,$$

also  $\Phi(G) \geq \varphi(H) > r$ , womit  $G$  nach Satz 13.4 Klasse 2 ist. ||

**Bemerkung 13.4.** Ist  $p \in \mathbf{N}$  mit  $p \geq 2$ , so lassen sich unter Ausnutzung der Folgerungen 13.2 und 13.3 (schlichte) Klasse 2-Graphen  $G$  konstruieren, die  $\Delta(G) = p$  erfüllen.

## 13.2 Kritische Graphen

In Anlehnung an eine Arbeit von Dirac [1] 1952 über Eckenfärbungen wurden 1965 von Vizing [4] kritische Graphen in der Kantenfärbungstheorie wie folgt eingeführt.

**Definition 13.5.** Ein schlichter, zusammenhängender Klasse 2-Graph  $G$  heißt *kritisch*, falls für jede Kante  $k \in K(G)$  gilt:

$$\chi'(G - k) < \chi'(G) \tag{13.1}$$

Dies ist nicht die einzige Möglichkeit kritische Graphen einzuführen. So forderten etwa Beineke und Wilson [1] 1973 die Ungleichung (13.1) nicht für Kanten, sondern für Ecken. Diese Graphen nennt man heute *eckenkritisch*. Natürlich ist jeder kritische Graph auch eckenkritisch. Die Umkehrung davon gilt jedoch nicht, was man z.B. an den Graphen  $K_{2n+1}$  für  $n \geq 2$  erkennt (man vgl. Aufgabe 13.3). Es hat sich aber gezeigt, daß die Menge der eckenkritischen Graphen zu groß gewählt ist, um starke Ergebnisse zu erzielen.

**Bemerkung 13.5.** Aus Satz 13.2 folgt, daß für jede Kante  $k$  eines kritischen Graphen  $G$ , der Teilgraph  $G - k$  eine  $\Delta(G)$ -Kantenfärbung besitzt.

Bevor wir das zentrale Ergebnis über kritische Graphen herleiten (Satz 13.5), wollen wir zwei einfach zu zeigende Eigenschaften festhalten. Diese wurden erstmals von Vizing [4] 1965 formuliert, lassen sich aber über die in Bemerkung 13.1 angegebene Beziehung zu Eckenfärbungen auch sofort aus Ergebnissen von Dirac [1] 1952 ableiten.

**Hilfssatz 13.2.** Ist  $G$  ein kritischer Graph, und sind  $u$  und  $v$  zwei adjazente Ecken von  $G$ , so gilt

$$d(u, G) + d(v, G) \geq \Delta(G) + 2.$$

*Beweis.* Da  $G$  ein kritischer Graph ist, existiert eine  $\Delta(G)$ -Kantenfärbung von  $G - uv$ . Aus  $\Omega(u) \cap \Omega(v) = \emptyset$  folgt

$$\begin{aligned} \Delta(G) &\geq |\Omega(u) \cup \Omega(v)| = |\Omega(u)| + |\Omega(v)| \\ &\geq \Delta(G) + 1 - d(u, G) + \Delta(G) + 1 - d(v, G), \end{aligned}$$

was äquivalent zur Behauptung ist. ||

**Hilfssatz 13.3.** Ein kritischer Graph hat keine Schnitteen.

*Beweis.* Angenommen, es existiert ein kritischer Graph  $G$  mit einer Schnitteecke  $v$ . Es seien  $H_1, H_2, \dots, H_p$  die Komponenten von  $G - v$ . Nach Voraussetzung lassen sich die von den Eckenmengen  $E(H_i) \cup \{v\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , in  $G$  induzierten Teilgraphen mit  $\Delta(G)$  Farben färben. Benennt man die Farben derart, daß alle mit  $v$  inzidenten Kanten verschieden gefärbt sind, so erhält man eine  $\Delta(G)$ -Kantenfärbung von  $G$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $G$  Klasse 2 ist. ||

**Definition 13.6.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $v \in E(G)$ . Die Anzahl der mit  $v$  adjazenten Ecken maximalen Grades bezeichnen wir mit  $d^*(v) = d^*(v, G)$ .

Der folgende Satz heißt *Vizings Adjazenz Lemma*; er wird häufig durch VAL abgekürzt. Er gibt in kritischen Graphen eine untere Schranke für  $d^*(v)$ , welche starke Konsequenzen für deren Struktur hat.

**Satz 13.5 (Vizings Adjazenz Lemma, Vizing [3] 1965).** Es sei  $G$  ein kritischer Graph. Sind  $v$  und  $w$  zwei adjazente Ecken von  $G$ , so gilt

$$d^*(v, G) \geq \max\{2, \Delta(G) - d(w, G) + 1\}.$$

*Beweis.* Ist  $h$  eine  $\Delta(G)$ -Kantenfärbung von  $G - vw$ , so werden wir zunächst die beiden folgende Aussagen beweisen.

1) Sind  $(vw, vw_1, \dots, vw_r)$  und  $(vw, vz_1, \dots, vz_t)$  zwei Fächer um  $v$  mit  $w_1 \neq z_1$ , so gilt  $w_i \neq z_j$  für alle Indizes  $i$  und  $j$ .

2) Ist  $(vw, vw_1, \dots, vw_r)$  ein Fächer um  $v$ , der nicht durch Anfügen einer weiteren Kante vergrößert werden kann, so gilt  $d(w_r, G) = \Delta(G)$ .

Angenommen, es existieren Indizes  $i$  und  $j$  mit  $w_i = z_j$ . Dann wählen wir solche Indizes kleinstmöglich und erhalten deshalb  $w_{i-1} \neq z_{j-1}$ . Dies liefert einen Widerspruch zum Hilfssatz 13.1 iii), denn wegen  $vw_i = vz_j$  ist dann  $h(vw_i) \in \Omega(w_{i-1}) \cap \Omega(z_{j-1})$ .

Angenommen, es gilt  $d(w_r, G) < \Delta(G)$ . Dann fehlt an  $w_r$  eine Farbe  $i$ . Nach Hilfssatz 13.1 i) existiert eine zu  $v$  inzidente und mit  $i$  gefärbte Kante. Da der Fächer nicht vergrößert werden kann, ist diese Kante eine Fächerkante, etwa  $vw_j$  mit  $j < r$ . Aus Hilfssatz 13.1 iii) folgt dann  $w_{j-1} = w_r$  und demnach  $vw_{j-1} = vw_r$ , im Widerspruch zu Hilfssatz 13.1 v). Somit sind die Aussagen 1) und 2) bewiesen.

Wählt man nun zu jeder Farbe  $i$  aus  $\Omega(w)$  einen nicht vergrößerbaren Fächer aus, dessen zweite Kante mit  $i$  gefärbt ist, so ergibt sich mit 1) und 2)

$$d^*(v, G) \geq |\Omega(w)| = \Delta(G) - d(w, G) + 1.$$

Ist  $d(w, G) < \Delta(G)$ , so ist das die Behauptung. Anderenfalls ist  $w$  selbst eine weitere mit  $v$  adjazente Ecke maximalen Grades, und es folgt  $d^*(v, G) \geq 2$ .  $\parallel$

**Folgerung 13.4 (Vizing [3] 1965).** Jeder kritische Graph hat mindestens drei Ecken maximalen Grades.

*Beweis.* Nach Satz 13.5 ist jede Ecke mit mindestens zwei Ecken maximalen Grades adjazent. Angewandt auf eine Ecke maximalen Grades liefert dies die Behauptung.  $\parallel$

**Folgerung 13.5 (Fiorini, Wilson [1] 1977).** Es sei  $G$  ein kritischer Graph mit  $\zeta$  Ecken maximalen Grades. Dann gilt

$$\delta(G) \geq \Delta(G) - \zeta + 2.$$

*Beweis.* Sei  $w \in E(G)$  mit  $d(w, G) = \delta(G)$ . Nach VAL ist  $w$  zu einer Ecke  $v$  maximalen Grades adjazent. Für  $v$  folgt mit VAL

$$d^*(v, G) \geq \Delta(G) - d(w, G) + 1 = \Delta(G) - \delta(G) + 1.$$

Also besitzt  $G$  außer  $v$  noch mindestens  $\Delta(G) - \delta(G) + 1$  Ecken maximalen Grades, woraus sich  $\zeta \geq \Delta(G) - \delta(G) + 2$  ergibt.  $\parallel$

**Folgerung 13.6 (Chetwynd, Hilton [2] 1985).** Ist  $G$  ein kritischer Graph mit  $\zeta$  Ecken maximalen Grades, so gilt

$$\Delta(G) \geq \frac{2|E(G)|}{\zeta}.$$

*Beweis.* Ist  $X = \{v | d(v, G) = \Delta(G)\}$ , so gilt natürlich  $|X| = \zeta$ . Ist  $\bar{X} = E(G) - X$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{v \in E(G)} d^*(v, G) &= \sum_{v \in X} d^*(v, G) + \sum_{v \in \bar{X}} d^*(v, G) \\ &= 2m(G[X]) + m(\bar{X}, X) = \sum_{v \in X} d(v, G) = \zeta \Delta(G). \end{aligned}$$

Aus dieser Identität folgt mit Vizings Adjazenz Lemma

$$\zeta \Delta(G) = \sum_{v \in E(G)} d^*(v, G) \geq 2|E(G)|. \quad \parallel$$

Kritische Graphen wurden eingeführt, um mehr über die Klasse 2-Graphen zu erfahren. Dazu ist natürlich unabdingbar, das Verhältnis von kritischen Graphen zu Klasse 2-Graphen zu untersuchen.

**Satz 13.6 (Vizing [3] 1965).** Ist  $G$  ein schlichter Klasse 2-Graph, so besitzt  $G$  für jedes  $p = 2, 3, \dots, \Delta(G)$  einen kritischen Teilgraphen  $H_p$  mit  $\Delta(H_p) = p$ .

*Beweis.* Nach Satz 13.2 gilt  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ . Sei zuerst  $p = \Delta(G)$ . Entfernt man sukzessive Kanten aus  $G$ , solange dadurch der chromatische Index nicht verringert wird, so resultiert ein Graph  $G^*$  mit  $\chi'(G^*) = \Delta(G) + 1$  und  $\chi'(G^* - k) < \chi'(G^*)$  für alle  $k \in K(G^*)$ . Nach Satz 13.2 gilt  $\Delta(G^*) \geq \chi'(G^*) - 1 = \Delta(G)$ , also  $\Delta(G^*) = \Delta(G)$ . Nach Konstruktion besitzt  $G^*$  eine Komponente  $H$  mit  $\Delta(G^*) = \Delta(H)$  und sonst allenfalls noch isolierte Ecken.  $H_{\Delta(G)} = H$  ist ein kritischer Teilgraph von  $G$  mit  $\Delta(H) = \Delta(G)$ .

Sei nun  $p < \Delta(G) = \Delta$ . Ist  $k = vw$  eine Kante des kritischen Graphen  $H$ , so färbe man die Kanten von  $H - k$  mit  $\Delta$  Farben. Dann fehlt an  $v$  eine Farbe  $i$  und an  $w$  eine Farbe  $j \neq i$ . Nun wähle man  $\Delta - p$  von  $i$  und  $j$  verschiedene Farben aus und entferne alle mit diesen Farben gefärbten Kanten aus  $H$ . Im folgenden zeigen wir, daß der resultierende Graph  $R$  den Maximalgrad  $p$  besitzt.

Da  $H$  kritisch ist, existiert nach Folgerung 13.4 in  $H - k$  eine Ecke  $a$  mit  $d(a, H - k) = \Delta$ . Diese Ecke inzidiert in  $H - k$  mit genau  $\Delta$  Farben, woraus sich  $d(a, R) = p$ , also  $\Delta(R) \geq p$  ergibt.

Nun wollen wir noch  $\Delta(R) \leq p$  nachweisen. Dazu nehmen wir an, daß  $\Delta(R) \geq p + 1$  gilt. Existiert eine Ecke  $x \neq v, w$  mit  $d(x, R) \geq p + 1$ , so sind die Kanten an der Ecke  $x$  mit  $d(x, R)$  Farben gefärbt und zusätzlich gibt es noch die  $\Delta - p$  entfernten Farben, womit wir insgesamt mindestens  $p + 1 + \Delta - p = \Delta + 1$  Farben im Spiel haben, was natürlich nicht möglich ist. Ist o.B.d.A.  $d(v, R) \geq p + 1$ , so sind die Kanten an der Ecke  $v$  mit  $d(v, R) - 1$  Farben gefärbt (denn die Kante  $k \in K(R)$  ist ungefärbt). Zusätzlich gibt es noch die  $\Delta - p$  entfernten Farben und die Farbe  $i$ , die an der Ecke  $v$  fehlt. Daher hätten wir auch in diesem Fall mindestens  $p + \Delta - p + 1 = \Delta + 1$  Farben im Spiel, womit wir  $\Delta(R) = p$  nachgewiesen haben.

Weiter ergibt sich aus dem Satz von Vizing  $p \leq \chi'(R) \leq p + 1$ . Da  $\chi'(R) = p$  sofort zu einer  $\Delta$ -Färbung von  $H$  führen würde, folgt schließlich  $\chi'(R) = p + 1$ . Verfärbt man mit  $R$  wie mit  $G$  im Fall  $p = \Delta(G)$ , so folgt die Existenz von  $H_p$ . ||

Unmittelbar aus Satz 13.6 und Folgerung 13.4 ergibt sich

**Folgerung 13.7.** Jeder schlichte Graph mit höchstens zwei Ecken maximalen Grades ist Klasse 1.

Der folgende Hilfssatz zeigt, daß gewisse Ecken und Kanten keinen Einfluß auf die Klasse eines Graphen haben. Er wird im nächsten Abschnitt mit Erfolg angewendet werden.

**Hilfssatz 13.4 (Chetwynd, Hilton [2] 1985).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit mindestens drei Ecken maximalen Grades. Weiter seien  $v \in E(G)$  und  $vw \in K(G)$ , und es gelte  $d^*(v, G) \leq 1$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $G$  ist Klasse 1.
- ii)  $G - vw$  ist Klasse 1.
- iii)  $G - v$  ist Klasse 1.

*Beweis.* Da  $G$  mindestens drei Ecken maximalen Grades besitzt und  $v$  mit höchstens einer von diesen adjazent ist, gilt  $\Delta(G) = \Delta(G - vw) = \Delta(G - v)$ . Daraus ergeben sich unmittelbar die beiden Implikationen i)  $\implies$  ii) und ii)  $\implies$  iii).

Um iii)  $\implies$  i) nachzuweisen, nehmen wir an, daß  $G - v$  Klasse 1 aber  $G$  Klasse 2 ist. Nach Satz 13.6 besitzt  $G$  einen kritischen Teilgraphen  $H$  mit  $\Delta(H) = \Delta(G)$ . Mit VAL ist jede Ecke aus  $H$  zu mindestens zwei Ecken maximalen Grades adjazent. Demnach ist  $v \notin E(H)$  und deshalb  $H$  ein Teilgraph von  $G - v$ . Dies ergibt einen Widerspruch, denn wegen  $\Delta(H) = \Delta(G) = \Delta(G - v)$  ist dann auch  $G - v$  Klasse 2. ||

Wir wollen nun Beispiele für kritische Graphen vorstellen. Dazu untersuchen wir zunächst Graphen von niedriger Ordnung. Die Resultate ergeben sich dabei aus Arbeiten von Jakobsen [2] 1974, Beineke und Fiorini [1] 1976 sowie Chetwynd und Yap [1] 1983.



**Satz 13.7.** Unter allen schlichten Graphen  $G$  ohne isolierte Ecken der Ordnung  $n(G) \leq 5$  sind genau vier kritisch, und dies sind gerade die Graphen mit

$$|K(G)| = \left\lfloor \frac{|E(G)|}{2} \right\rfloor \Delta(G) + 1. \quad (13.2)$$

Insbesondere sind alle diese Graphen von ungerader Ordnung.

*Beweis.* Es sei  $G$  ein kritischer Graph der Ordnung  $|E(G)| \leq 5$ .

Ist  $\Delta(G) = 2$ , so ist  $G$  zwangsläufig ein Kreis ungerader Länge. Die beiden Kreise  $C_3$  und  $C_5$  erfüllen die Bedingung (13.2).

Ist  $\Delta(G) = 3$ , so gilt nicht nur  $|E(G)| \geq 4$ , sondern sogar  $|E(G)| = 5$ , denn der  $K_4$  ist Klasse 1 und daher auch jeder seiner Teilgraphen mit Maximalgrad 3. Da  $G$  keine Endecke besitzen kann und nach Folgerung 13.4 mindestens 3 Ecken vom Grad 3 haben muß, schließen wir aus dem Handschlaglemma, daß  $G$  vier Ecken vom Grad 3 und eine Ecke vom Grad 2 besitzt. Damit ist aber  $G$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, denn von den vier Ecken vom Grad 3 sind nur die beiden Nachbarn der Ecke vom Grad 2 nicht adjazent. Aus  $\varphi(G) = \frac{7}{2} > 3$  folgt mit Satz 13.4, daß  $G$  Klasse 2 ist. Darüber hinaus erfüllt dieser Graph die Identität (13.2) und ist kritisch, da keiner seiner echten Teilgraphen vom Maximalgrad 3 kritisch ist.

Im verbleibenden Fall  $\Delta(G) = 4$  ist  $|E(G)| = 5$ . Da  $G$  mindestens drei Ecken vom Grad 4 besitzt, gibt es noch genau die beiden Möglichkeiten, daß  $G$  der  $K_5$  oder  $G = K_5 - k$  ist, wobei  $k$  eine beliebige Kante des  $K_5$  bedeutet. Wegen  $\varphi(K_5 - k) = \frac{9}{2} > 4$  ist der  $K_5 - k$  kritisch und der  $K_5$  nicht. Auch für den  $K_5 - k$  gilt (13.2).

Erfüllt ein Graph  $G$  die Bedingung (13.2), so ist  $|E(G)|$  ungerade, denn anderenfalls wäre

$$|K(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in E(G)} d(v, G) \leq \frac{|E(G)|}{2} \Delta(G) = \left\lfloor \frac{|E(G)|}{2} \right\rfloor \Delta(G).$$

Daß genau die vier als kritisch nachgewiesenen Graphen diejenigen sind, die der Identität (13.2) genügen, sei dem Leser überlassen (man vgl. Aufgabe 13.5). ||

Wir geben folgendes weitergehende Ergebnis an, dessen Beweis recht aufwendig ist.

**Satz 13.8.** Mit Ausnahme von  $\mathbf{P}^*$  (man vgl. Beispiel 13.1) gilt für jeden kritischen Graphen  $G$  mit höchstens zehn Ecken die Identität (13.2). Insbesondere sind diese kritischen Graphen alle von ungerader Ordnung.

Unser nächstes Ziel ist es, Beispiele für kritische Graphen mit beliebig hohem Maximalgrad und Minimalgrad 2 anzugeben.

**Definition 13.7.** Es seien  $G$  ein Graph,  $k \in K(G)$  und  $a \notin E(G)$ . Mit  $G^{k,a}$  bezeichnen wir den durch  $k$  und  $a$  erzeugten Unterteilungsgraphen.

**Satz 13.9 (Fiorini [1] 1974).** Ist  $n \geq 2$ , so sind die beiden Graphen  $(K_{n,n})^{k,a}$  und  $(K_{2n})^{k,a}$  kritisch.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz für  $(K_{n,n})^{k,a}$ . Für  $(K_{2n})^{k,a}$  kann die Argumentation analog durchgeführt werden.

Es gilt

$$\Phi((K_{n,n})^{k,a}) \geq \varphi((K_{n,n})^{k,a}) = \frac{2n^2 + 1}{2n} > n = \Delta((K_{n,n})^{k,a}),$$

womit dieser Graph nach Satz 13.4 Klasse 2 ist. Satz 13.6 liefert die Existenz eines kritischen Teilgraphen  $H$  von  $(K_{n,n})^{k,a}$  mit  $\Delta(H) = n$ . Da  $K_{n,n}$  und somit auch  $K_{n,n} - k$  Klasse 1 sind, ist  $a \in E(H)$ . Für die beiden in  $(K_{n,n})^{k,a}$  mit  $a$  adjazenten Ecken  $x_1$  und  $x_2$  folgt nach VAL, daß sie auch in  $H$  Ecken maximalen Grades sind, woraus sich  $E(H) = E((K_{n,n})^{k,a})$  ergibt. Aus Satz 13.5 erhalten wir für  $i = 1, 2$

$$d^*(x_i, H) \geq \Delta(H) - d(a, H) + 1 = n - 1,$$

wonach alle Ecken aus  $(K_{n,n})^{k,a}$ , die von  $a$  verschieden sind, in  $H$  den Grad  $n$  besitzen. Daher ist  $H = (K_{n,n})^{k,a}$  ein kritischer Graph. ||

Die in Satz 13.9 angegebenen kritischen Graphen können bei dem folgenden Konstruktionsverfahren als Ausgangsgraphen benutzt werden. Die bemerkenswerte Idee dieser Konstruktion geht auf Hajós [1] 1961 zurück.

**Definition 13.8.** Es seien  $G$  und  $G'$  zwei disjunkte Graphen mit nicht leeren Kantenmengen. Sind  $uv \in K(G)$  und  $u'v' \in K(G')$ , so wird eine *Hajós-Vereinigung* von  $G$  und  $G'$  folgendermaßen gebildet: Man entferne die beiden Kanten  $uv$  und  $u'v'$ , identifiziere  $u$  mit  $u'$  und verbinde die beiden Ecken  $v$  und  $v'$  durch eine neue Kante.

**Bemerkung 13.6.** In der Regel sind verschiedene Hajós-Vereinigungen zweier Graphen nicht isomorph. In seltenen Fällen ist dies jedoch möglich, so ist z.B. jede Hajós-Vereinigung zweier Kreise  $C_n$  und  $C_p$  ein Kreis  $C_{n+p-1}$ .

**Satz 13.10 (Jakobsen [1] 1973).** Es seien  $G$  und  $G'$  zwei kritische Graphen mit  $\Delta = \Delta(G) = \Delta(G')$ . Sind  $u \in E(G)$  und  $u' \in E(G')$  mit  $d(u, G) + d(u', G') \leq \Delta + 2$ , so liefert jede Hajós-Vereinigung von  $G$  und  $G'$ , bei der  $u$  und  $u'$  identifiziert werden, einen kritischen Graphen.

*Beweis.* Es sei  $H$  eine Hajós-Vereinigung von  $G$  und  $G'$ , bei der die Ecken  $u$  und  $u'$  zur Ecke  $u^*$  identifiziert und die Kanten  $uv$  und  $u'v'$  entfernt wurden. Mit der Voraussetzung  $d(u, G) + d(u', G') \leq \Delta + 2$  ergibt sich  $d(u^*, H) \leq \Delta$ . Da die Eckengrade der verbleibenden Ecken aus  $H$  mit den entsprechenden aus  $G$  und  $G'$  übereinstimmen, gilt zusammen mit Folgerung 13.4  $\Delta(H) = \Delta$ . Zuerst zeigen wir, daß  $H$  Klasse 2 ist. Angenommen,  $H$  ist Klasse 1. Dann besitzt  $H$  eine  $\Delta$ -Kantenfärbung  $h$ , die jeweils eine  $\Delta$ -Kantenfärbung für  $G - uv$  und  $G' - u'v'$  liefert, wobei die Farbe  $h(vv')$  an  $u$  oder an  $u'$  nicht vorkommt. Da dann aber  $G$  oder  $G'$  mit  $\Delta$  Farben gefärbt werden kann, erhalten wir einen Widerspruch.

Um zu zeigen, daß  $H$  kritisch ist, müssen wir für jede Kante  $k \in K(H)$  nachweisen, daß  $H - k$  mit  $\Delta$  Farben gefärbt werden kann. Ist  $k = vv'$ , so ist dies klar, da  $\Delta$ -Kantenfärbungen von  $G - uv$  und  $G' - u'v'$ , nach eventueller Umbenennung der Farben, zu einer  $\Delta$ -Kantenfärbung von  $H - vv'$  zusammengefügt werden können. Sei nun o.B.d.A.  $k$  eine Kante von  $G - uv$ . Da  $G' - u'v'$   $\Delta$ -färbbar ist, kann auch der Teilgraph von  $H$  mit der Eckenmenge  $E(G') \cup \{v\}$  und der Kantenmenge  $(K(G') - \{u'v'\}) \cup \{vv'\}$  mit  $\Delta$  Farben gefärbt werden. Ist  $f$  eine  $\Delta$ -Kantenfärbung dieses Graphen, so muß die Farbe  $f(vv')$  an  $u'$  vorkommen, da anderenfalls  $G'$   $\Delta$ -färbbar wäre. Nach Voraussetzung ist  $G - k$  auch  $\Delta$ -färbbar. Mittels einer  $\Delta$ -Kantenfärbung von  $G - k$  erhält man leicht eine  $\Delta$ -Kantenfärbung  $g$  des Graphen mit der Eckenmenge  $E(G) \cup \{v\}$  und der Kantenmenge  $(K(G) - \{uv, k\}) \cup \{vv'\}$ , bei der die Farbe  $g(vv')$  an  $u$  nicht vorkommt. O.B.d.A. dürfen wir deshalb annehmen, daß  $g(vv') = f(vv')$  gilt, und daß die Farben, die an  $u$  und  $u'$  vorkommen, alle verschieden sind (ist dies nicht der Fall, so kann dies durch eine Umbenennung der Farben erreicht werden). Nun können die Kantenfärbungen  $f$  und  $g$  zu einer  $\Delta$ -Kantenfärbung von  $H - k$  zusammengefügt werden. ||

Die in den Sätzen 13.8 und 13.9 gegebenen Beispiele kritischer Graphen sind alle von ungerader Ordnung. Auch eine Hajós-Vereinigung zweier Graphen ungerader Ordnung liefert einen Graphen ungerader Ordnung, so daß wir auch mit Satz 13.10 keine kritischen Graphen gerader Ordnung konstruieren können, ohne vorher mindestens einen solchen zu kennen. Jakobsen [2] hat 1974 die Vermutung geäußert, daß jeder kritische Graph von ungerader Ordnung ist. Jedoch im Jahre 1981 gelang es Goldberg [1], eine Familie kritischer Graphen gerader Ordnung mit Maximalgrad 3 zu konstruieren, so daß die in die Literatur unter dem Namen “*critical graph conjecture*” eingegangene Vermutung widerlegt ist.

### 13.3 Klassifizierung

Die Frage, welche Graphen Klasse 1 und welche Klasse 2 sind, nennt man heute *Klassifizierung* oder *Klassifizierungsproblem*. Die Schwierigkeit dieses Problems erkennt man daran, daß - wie in Satz 13.1 bewiesen - die Vierfarbenvermutung dazu äquivalent ist, daß jede normale und 3-reguläre Landkarte Klasse 1 ist.

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir schon einige Klassifizierungen durchgeführt. Mit den Ergebnissen über kritische Graphen wird diese Arbeit in zwei Richtungen fortgeführt. Zunächst beschäftigen wir uns mit planaren Graphen.

**Satz 13.11 (Vizing [4] 1965).** Jeder schlichte und planare Graph  $G$  mit  $\Delta(G) \geq 10$  ist Klasse 1.

*Beweis.* Angenommen, es existiert ein planarer Klasse 2-Graph mit  $\Delta(G) \geq 10$ . Dann gibt es nach Satz 13.6 einen kritischen planaren Graphen  $H$  mit  $\Delta(H) = \Delta(G) \geq 10$ . Ist  $S = \{x \in E(H) \mid d(x, H) \leq 5\}$ , so ist  $S$  wegen Satz 11.5 nicht leer. Da auch  $H - S$  planar ist, existiert wiederum nach Satz 11.5 eine Ecke  $v$  in  $H - S$  mit  $d(v, H - S) \leq 5$ . Die Ecke  $v$  ist natürlich mit einer Ecke  $w \in S$  adjazent, woraus sich mit VAL der folgende Widerspruch ergibt:

$$5 \geq d(v, H - S) \geq d^*(v, H) \geq \Delta(H) - d(w, H) + 1 \geq 6. \quad \parallel$$

**Bemerkung 13.7.** Im gleichen Jahr gelang es Vizing [3] selber, diesen Satz auf planare Graphen mit Maximalgrad acht oder neun zu erweitern. In dieser Arbeit äußerte er die Vermutung, daß Satz 13.11 sogar für alle planaren Graphen mit  $\Delta \geq 6$  gilt. Für  $\Delta = 7$  ist diese Vermutung inzwischen durch Limin Zhang [1] 2000 sowie Sanders und Yue Zhao [4] 2001 bestätigt worden. Der Fall  $\Delta = 6$  ist weiterhin offen. Ist  $3 \leq \Delta \leq 5$ , so gibt es sowohl planare Klasse 1-Graphen als auch planare Klasse 2-Graphen (man vgl. Aufgabe 13.10).

Wir wollen weitere Klassifizierungsergebnisse betrachten, die auf einer Idee von Chetwynd und Hilton [2] aus dem Jahre 1985 beruhen, die vereinfacht wie folgt beschrieben werden kann.

Betrachtet man in einem Graphen  $G$  den von den Ecken maximalen Grades induzierten Teilgraphen, so kann man manchmal - etwa mit Folgerung 13.7 - schon an diesem erkennen, daß  $G$  Klasse 1 ist. Ist dies nicht der Fall, so besteht noch die Möglichkeit, geeignete Matchings  $M_1, M_2, \dots, M_t$  zu suchen, so daß bewiesen werden kann, daß die Farbenklassen einer Klasse 1-Färbung von  $G - (M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_t)$  zusammen mit den Matchings  $M_1, M_2, \dots, M_t$  die Farbenklassen einer Klasse 1-Färbung von  $G$  bilden.

Das erste mit dieser Methode erzielte Ergebnis war die Klassifizierung aller Graphen mit genau drei Ecken maximalen Grades.

**Satz 13.12 (Chetwynd, Hilton [2] 1985).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph mit genau drei Ecken maximalen Grades, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $G$  ist Klasse 2.
- ii)  $G$  ist kritisch.
- iii)  $G$  ist von ungerader Ordnung  $n(G) = 2p + 1$ , und die Kantenmenge von  $\overline{G}$  ist ein  $(p - 1)$ -elementiges Matching.

*Beweis.* Aus i) folgt ii). Nach Satz 13.6 besitzt  $G$  einen kritischen Teilgraphen  $H$  mit  $\Delta(G) = \Delta(H)$ , der nach Folgerung 13.4 dieselben drei Ecken maximalen Grades wie  $G$  haben muß. Aus Folgerung 13.5 ergibt sich  $\delta(H) \geq \Delta(H) - 1$ , womit  $d(a, G) = d(a, H)$  für alle  $a \in E(H)$  gilt. Der Zusammenhang von  $G$  liefert notwendig  $E(G) = E(H)$  und damit  $G = H$ .

Aus iii) folgt i). Diese Implikation erhält man unmittelbar aus Folgerung 13.2.

Aus ii) folgt iii). Da für den  $K_3$  die Behauptung offensichtlich richtig ist, können wir von  $|E(G)| \geq 4$  und daher auch von  $\delta(G) < \Delta(G)$  ausgehen. Mit Folgerung 13.5 erhalten wir  $\delta(G) \geq \Delta(G) - 1$ , also  $\delta(G) = \Delta(G) - 1$ . Daher gilt

$$2|K(G)| = |E(G)|(\Delta(G) - 1) + 3,$$

womit  $|E(G)|$  ungerade ist. Setzen wir  $|E(G)| = 2p + 1$ , so ist iii) bewiesen, falls wir  $\Delta(G) = 2p$  gezeigt haben. Dazu nehmen wir an, daß  $\Delta(G) \leq 2p - 1$  gilt.

1. *Fall.* Ist  $p = 2$ , also  $n(G) = 5$ , so ergibt sich aus Folgerung 13.6 unmittelbar  $\Delta(G) \geq 4$ , was unserer Annahme  $\Delta(G) \leq 3$  widerspricht.

2. *Fall.* Ist  $p = 3$ , also  $n(G) = 7$ , so ergibt sich aus Folgerung 13.6  $\Delta(G) \geq 5$ . Da  $\Delta(G) = 5$  nach dem Handschlaglemma nicht möglich ist, folgt  $\Delta(G) \geq 6$ , was unserer Annahme  $\Delta(G) \leq 5$  widerspricht.

3. *Fall.* Ist  $p = 4$ , also  $n(G) = 9$ , so ergibt sich aus Folgerung 13.6  $\Delta(G) \geq 6$ . Da  $\Delta(G) = 7$  nach dem Handschlaglemma nicht möglich ist, liefert unsere Annahme notwendig  $\Delta(G) = 6$ .

Sind  $u, v, w$  die drei Ecken maximalen Grades von  $G$ , so sind sie nach VAL untereinander adjazent. Ist  $x$  eine Ecke, die zu  $u$  nicht adjazent ist, so muß sie nach VAL notwendig zu  $v$  und  $w$  adjazent sein. Setzen wir  $G' = G - \{u, v, x\}$ , so seien  $y_1, y_2$  und  $y_3$  diejenigen Ecken in  $G'$ , die zu  $w$  adjazent sind und  $a_1$  und  $a_2$  die Ecken in  $G'$ , die nicht zu  $w$  adjazent sind. Aus  $\delta(G') \geq 2$  folgt leicht, daß in  $G'$  ein perfektes Matching  $M$  existiert. Nun besitzt der Graph  $G^* = G - (M \cup \{uv\})$  genau die vier Ecken  $u, v, w$  und  $x$  von maximalem Grad 5 mit  $d^*(u, G^*) = 1$ . Damit sind die Graphen  $G^*$  und  $G^* - uw$  nach Hilfssatz 13.4 von der gleichen Klasse. Der Graph  $G^* - uw$  besitzt genau zwei Ecken maximalen Grades, so daß er und damit auch  $G^*$  wegen Folgerung 13.7 Klasse 1 ist. Die Farbenklassen einer 5-Kantenfärbung von  $G^*$  und das Matching  $M \cup \{uv\}$  bilden die Farbenklassen einer 6-Kantenfärbung von  $G$ , was der Voraussetzung widerspricht, daß  $G$  kritisch ist.

4. *Fall.* Ist  $p \geq 5$  und sind  $u, v$  und  $w$  die drei Ecken maximalen Grades von  $G$ , so sind diese nach VAL paarweise adjazent. Wegen unserer Annahme  $\Delta(G) \leq 2p - 1$  existiert eine Ecke  $x \in E(G) - \{u, v, w\}$ , die nicht mit  $u$  adjazent ist. Zusammen mit Folgerung 13.6 erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta(G - \{u, v\}) &\geq \Delta(G) - 3 \geq \left\lceil \frac{2|E(G)|}{3} \right\rceil - 3 = \left\lceil \frac{4p + 2}{3} \right\rceil - 3 \\ &\geq \frac{2p - 1}{2} = \frac{1}{2}|E(G - \{u, v\})|. \end{aligned}$$

Daher liefert der Satz von Dirac (Satz 4.5) die Existenz eines Hamiltonkreises in  $G - \{u, v\}$  und damit auch die Existenz eines Matchings  $M$ , das mit Ausnahme von  $x$  alle Ecken von

$G - \{u, v\}$  berührt. Setzen wir  $G^* = G - (M \cup \{uv\})$ , so besitzt  $G^*$  genau die vier Ecken  $u, v, w$  und  $x$  von maximalem Grad  $\Delta(G) - 1$ . Da  $d^*(u, G^*) = 1$  gilt, sind die beiden Graphen  $G^*$  und  $G^* - uv$  nach Hilfssatz 13.4 von der gleichen Klasse. Der Graph  $G^* - uv$  besitzt genau zwei Ecken maximalen Grades, so daß er und damit auch  $G^*$  wegen Folgerung 13.7 Klasse 1 ist. Die Farbenklassen einer  $(\Delta(G) - 1)$ -Kantenfärbung von  $G^*$  und das Matching  $M \cup \{uv\}$  bilden die Farbenklassen einer  $\Delta(G)$ -Kantenfärbung von  $G$ , was der Voraussetzung widerspricht, daß  $G$  kritisch ist.  $\parallel$

Die Klassifizierung der Graphen mit genau vier Ecken maximalen Grades findet man bei Chetwynd und Hilton [1] 1984. Sie ist wesentlich aufwendiger als der Beweis von Satz 13.12. Dafür ist die Tatsache verantwortlich, daß die untere Schranke für den Minimalgrad aus Folgerung 13.5 bei größerer Anzahl von Ecken maximalen Grades kleiner wird. Deshalb muß bei beliebig vorgegebener Anzahl der Ecken maximalen Grades den Voraussetzungen eine Minimalgradbedingung hinzugefügt werden, damit die skizzierte Beweisidee Früchte trägt. Die diesbezüglich besten Ergebnisse sind in den beiden folgenden Sätzen zusammengefaßt.

**Satz 13.13 (Niessen, Volkmann [1] 1990).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $2p$  mit genau  $\zeta$  Ecken maximalen Grades. Ist

$$\delta(G) \geq p + \zeta - 2,$$

so ist  $G$  Klasse 1.

**Satz 13.14 (Niessen, Volkmann [1] 1990).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $2p - 1$  mit genau  $\zeta$  Ecken maximalen Grades. Ist

$$\delta(G) \geq (p - 1) + \zeta + \left\lfloor \frac{\zeta \Delta(G)}{2p - 1} \right\rfloor,$$

so ist  $\chi'(G) = \max\{\Delta(G), \lceil \varphi(G) \rceil\}$ .

Die schwierigen Beweise dieser beiden Sätze werden hier nicht vorgestellt. Wir wollen aber eine interessante Anwendung von Satz 13.14 geben, die im Zusammenhang mit der *1-Faktorisierungs-Vermutung* steht, deren Ursprung schon in den fünfziger Jahren zu finden ist.

**1-Faktorisierungs-Vermutung.** Jeder schlichte und  $r$ -reguläre Graph der Ordnung  $2p$  mit  $r \geq p$  ist 1-faktorisierbar bzw. Klasse 1.

**Hilfssatz 13.5 (Chetwynd, Hilton [2] 1985).** Ist  $G$  ein schlichter und  $r$ -regulärer Graph der Ordnung  $2p$  mit  $p \geq 2$ , so gilt für jede Ecke  $v \in E(G)$

$$\chi'(G) = \chi'(G - v).$$

*Beweis.* Ist  $G \cong K_{2p}$ , so folgt die Behauptung aus Satz 13.2 sowie den Beispielen 13.1 ii) und iii).

Ist  $G$  nicht isomorph zum  $K_{2p}$ , so gilt  $\Delta(G - v) = \Delta(G) = \Delta$ . Im Fall  $\chi'(G - v) = \Delta + 1$  folgt wegen  $\chi'(G - v) \leq \chi'(G)$  mit Satz 13.2 sofort  $\chi'(G) = \Delta + 1$ . Ist aber  $\chi'(G - v) = \Delta$  und  $h$  eine  $\Delta$ -Kantenfärbung von  $G - v$ , so sind  $|K(G - v)| = \Delta(p - 1)$  Kanten mit  $\Delta$  Farben gefärbt. Da mit einer Farbe höchstens  $\lfloor \frac{1}{2}|E(G - v)| \rfloor = p - 1$  Kanten gefärbt sein können, folgt sogar, daß mit jeder Farbe genau  $p - 1$  Kanten gefärbt sind. Daher fehlt jede dieser  $\Delta$  Farben an genau einer Ecke von  $G - v$  und die Ecken, an denen eine Farbe fehlt,



können nur die Nachbarn von  $v$  in  $G$  sein, weil alle anderen Ecken in  $G - v$  den Grad  $\Delta$  besitzen. Demnach läßt sich  $h$  zu einer  $\Delta$ -Kantenfärbung von  $G$  fortsetzen, indem man die mit  $v$  inzidenten Kanten mit der an der Nachbarecke von  $v$  fehlenden Farbe färbt.  $\parallel$

**Hilfssatz 13.6 (Niessen, Volkmann [1] 1990).** Ist  $G$  ein schlichter, regulärer Graph der Ordnung  $2p$  vom Regularitätsgrad  $2p - r$  mit

$$2p \geq 4r + 2 \left\lfloor \frac{(2p - r)(r - 1)}{2p - 1} \right\rfloor - 2,$$

so ist  $G$  Klasse 1, also 1-faktorierbar.

*Beweis.* Da der  $K_{2p}$  Klasse 1 ist, können wir im folgenden  $G \neq K_{2p}$ , also  $r \geq 2$  voraussetzen. Ist  $v$  eine beliebige Ecke von  $G$ , so gilt  $n(G - v) = 2p - 1$ ,  $\Delta(G - v) = 2p - r = \Delta(G)$ ,  $\delta(G - v) = 2p - r - 1$  und  $m(G - v) = m(G) - (2p - r) = (p - 1)(2p - r) = (p - 1)\Delta(G - v)$ . Daraus ergibt sich sofort  $\varphi(G - v) = \Delta(G - v)$ . Weiter besitzt  $G - v$  genau  $\zeta = r - 1$  Ecken maximalen Grades. Durch Einsetzen der berechneten Größen, erkennt man, daß die gegebene Ungleichung zu

$$\delta(G - v) \geq (p - 1) + \zeta + \left\lfloor \frac{\zeta \Delta(G - v)}{2p - 1} \right\rfloor$$

äquivalent ist, womit nach Satz 13.14  $\chi'(G - v) = \Delta(G - v) = \Delta(G)$  gilt. Nun liefert Hilfssatz 13.5 das gewünschte Resultat.  $\parallel$

Das nun folgende Ergebnis wurde unabhängig auch von Chetwynd und Hilton [3] 1989 auf direktem Wege bewiesen.

**Satz 13.15 (Chetwynd, Hilton [3] 1989, Niessen, Volkmann [1] 1990).** Jeder  $(2p - r)$ -reguläre und schlichte Graph gerader Ordnung  $2p$  mit  $2p - r \geq (\sqrt{7} - 1)p \approx 1,647p$ , ist 1-faktorierbar.

*Beweis.* Für  $0 < c \leq 3 - \sqrt{7}$  gilt  $c^2 - 6c + 2 \geq 0$  und damit  $\frac{2}{c} \geq 6 - c$ . Setzt man  $c = \frac{r}{p}$ , so folgt für  $r \leq (3 - \sqrt{7})p$  die Ungleichung  $\frac{2p}{r} \geq 6 - \frac{r}{p}$  und damit

$$2p \geq 6r - \frac{r^2}{p} = 4r + \frac{2p - r}{p}r.$$

Schließlich erhält man daraus für  $2p - r \geq (\sqrt{7} - 1)p$

$$\begin{aligned} 2p &\geq 4r + \frac{2p - r}{p}r \geq 4r + 2 \frac{(2p - r)(r - 1)}{2p - 1} \\ &\geq 4r + 2 \left\lfloor \frac{(2p - r)(r - 1)}{2p - 1} \right\rfloor - 2. \end{aligned}$$

Daher erfüllt  $G$  die Voraussetzungen von Hilfssatz 13.6, womit die 1-Faktorierbarkeit von  $G$  nachgewiesen ist.  $\parallel$

Von der 1-Faktorisierungs-Vermutung gibt es noch die nun folgende genauere Fassung.

**1-Faktorisierungs-Vermutung.** Jeder schlichte und  $r$ -reguläre Graph der Ordnung  $2p$  ist Klasse 1, wenn  $p$  ungerade und  $r \geq p$  bzw.  $p$  gerade und  $r \geq p - 1$  gilt.

**Beispiel 13.2.** An Hand von Beispielen wollen wir zeigen, daß man diese Fassung der 1-Faktorisierungs-Vermutung nicht weiter verschärfen kann.

- i) Für ungerades  $p \geq 3$  ist der  $2K_p$  ein nicht zusammenhängender  $(p-1)$ -regulärer Klasse 2-Graph.
- ii) Zusammenhängende Beispiele für ungerades  $p \geq 5$  kann man wie folgt konstruieren. In jeder Komponente des  $2K_p$  wird eine Kante entfernt, etwa  $ab$  und  $uv$ . Danach werden die Kanten  $au$  und  $bv$  hinzugefügt. Der neu entstandene Graph ist  $(p-1)$ -regulär und nach Satz 13.4 (z.B. mit  $H = K_p - k$ ) wegen  $p \geq 5$  Klasse 2.
- iii) Ist  $p \geq 4$  gerade und  $C$  ein Hamiltonscher Kreis im  $K_{p+1}$ , so ist  $G = (K_{p+1} - K(C)) \cup K_{p-1}$  ein nicht zusammenhängender  $(p-2)$ -regulärer Klasse 2-Graph.
- iv) Zusammenhängende Beispiele für gerades  $p \geq 6$  lassen sich wie folgt konstruieren. Man gehe von zwei vollständigen Graphen  $K_{p+1}$  und  $K_{p-1}$  aus. Man entferne aus dem  $K_{p+1}$  zwei disjunkte Matchings  $M_1$  und  $M_2$  mit  $2|M_1| = 2|M_2| = p$ , die mit verschiedenen Ecken  $a$  und  $b$  aus dem  $K_{p+1}$  nicht inzidieren. Ist in diesem Graphen  $y$  eine Ecke, die mit  $a$  und  $b$  adjazent ist, so entferne man weiter die Kanten  $ay$  und  $by$ . In dem verbleibenden Graphen  $H$  gilt  $d(y, H) = p-4$  und  $d(x, H) = p-2$  für alle Ecken  $x \neq y$ , und wegen  $p \geq 6$  ist  $H$  zusammenhängend (nach dem Satz von Ore (Satz 4.6) sogar Hamiltonsch für  $p \geq 8$ ). Ist  $uv$  eine beliebige Kante aus dem  $K_{p-1}$ , so vereinige man den Graphen  $H$  mit  $K_{p-1} - uv$  und füge die Kanten  $uy$  und  $vy$  hinzu. Der so entstandene Graph  $G$  ist schlicht, zusammenhängend und  $(p-2)$ -regulär. Nach Konstruktion ist  $y$  eine Schnittecke von  $G$ , womit  $G$  nach Folgerung 13.3 ein Klasse 2-Graph ist.

Viele weitere interessante Aspekte und Anwendungen der Kantenfärbungstheorie findet man in den Büchern von Fiorini und Wilson [1] 1977 und Yap [1] 1986.

## 13.4 Totalfärbung

**Definition 13.9.** Es sei  $G$  ein Multigraph. Eine Abbildung  $h: E(G) \cup K(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$  nennt man *Totalfärbung* oder  $q$ -*Totalfärbung*, wenn  $h(a) \neq h(b)$  für alle adjazenten oder inzidenten Elemente  $a, b \in E(G) \cup K(G)$  gilt. Besitzt  $G$  eine  $q$ -Totalfärbung aber keine  $(q-1)$ -Totalfärbung, so nennt man  $q$  die *totalchromatische Zahl* von  $G$ , in Zeichen  $q = \chi_T = \chi_T(G)$ . Eine Teilmenge  $X \subseteq E(G) \cup K(G)$  nennen wir *unabhängig*, wenn zwei Elemente aus  $X$  weder adjazent noch inzident sind. Die totalchromatische Zahl ist natürlich die minimale Anzahl von solchen unabhängigen Mengen von Ecken und Kanten, in die man  $E(G) \cup K(G)$  zerlegen kann.

Wir werden hier nicht sehr tief in die Theorie der Totalfärbungen einsteigen, sondern nur einige einfache Resultate beweisen. Darüber hinaus stellen wir die hochinteressante Totalfärbungs-Vermutung von Vizing [1] und Behzad [1] vor und nennen einige wichtige Ergebnisse, die diese Vermutung erhärten.

**Bemerkung 13.8.** Für jeden Multigraphen  $G$  ergibt sich unmittelbar aus der Definition der totalchromatischen Zahl

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi_T(G) \leq \chi(G) + \chi'(G).$$

Im Jahre 1967 zeigten Behzad, Chartrand und Cooper [1], daß die Gleichheit  $\chi_T(G) = \chi(G) + \chi'(G)$  höchstens für bipartite Graphen möglich ist.



**Satz 13.16 (Behzad, Chartrand und Cooper [1] 1967).** Gilt für einen Multigraphen  $G$  die Identität  $\chi_T(G) = \chi(G) + \chi'(G)$ , so ist  $G$  notwendig bipartit.

*Beweis.* Ist  $q = \chi(G)$  und  $p = \chi'(G)$ , so sei  $E_1, E_2, \dots, E_q$  eine Partition von  $E(G)$  und  $K_1, K_2, \dots, K_p$  eine Zerlegung der Kantenmenge  $K(G)$  in disjunkte Teilmengen. Damit haben wir  $E(G) \cup K(G)$  in  $q + p$  unabhängige Mengen zerlegt. Ist  $G$  nicht bipartit, so gilt nach Satz 12.1  $\chi(G) \geq 3$ . Dann existiert zu jeder Kante  $k$  aus (z.B.)  $K_1$  eine Partitionsmenge  $E_i$ , so daß  $k$  zu keiner Ecke aus  $E_i$  inzident ist. Fügt man jede Kante aus  $K_1$  zu einer solchen Partitionsmenge  $E_i$  hinzu, so erhält man eine Zerlegung von  $E(G) \cup K(G)$  in  $q + p - 1$  unabhängige Mengen von Ecken und Kanten, woraus sich unmittelbar  $\chi_T(G) \leq q + p - 1 < \chi(G) + \chi'(G)$  ergibt. ||

**Satz 13.17.** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt  $\chi_T(G) \leq 2\Delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Nach Satz 12.2 bzw. Bemerkung 12.3 können wir den Graphen  $G$  zunächst mit einer echten  $(\Delta(G) + 1)$ -Eckenfärbung versehen. Sind  $k_1, k_2, \dots, k_m$  die Kanten von  $G$ , so färben wir nun die Kanten induktiv mit den Farben  $1, 2, \dots, 2\Delta(G) + 1$ . Ist  $k_1 = a_1b_1$ , so färbe man  $k_1$  mit einer Farbe, die von denjenigen Farben verschieden ist, mit der die Ecken  $a_1$  und  $b_1$  gefärbt sind. Sind die Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_i$  für  $i < m$  schon gefärbt, so daß inzidente Elemente verschiedene Farben besitzen, so ist die Kante  $k_{i+1}$  zu höchstens  $2\Delta(G) - 2$  (gefärbten) Kanten und zu genau zwei gefärbten Ecken inzident. Daher steht von den  $2\Delta(G) + 1$  Farben mindestens eine zur Verfügung, mit der man  $k_{i+1}$  färben kann, so daß wieder inzidente Elemente verschieden gefärbt sind. ||

**Bemerkung 13.9.** Die Beweistechniken aus den Sätzen 12.2 und 13.17 liefern unmittelbar einen effizienten Algorithmus für eine  $(2\Delta(G) + 1)$ -Totalfärbung eines gegebenen Multigraphen  $G$ .

Analog zum Satz von Vizing (Satz 13.2) formulierten Vizing [1] 1964 und Behzad [1] 1965 unabhängig voneinander folgende Vermutung für die totalchromatische Zahl, die als Totalfärbungs-Vermutung in die Literatur eingegangen ist.

**Totalfärbungs-Vermutung (Vizing [1] 1964, Behzad [1] 1965).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Von einem vollständigen Beweis dieser attraktiven Vermutung ist man im Augenblick noch sehr weit entfernt.

**Satz 13.18.** Für bipartite Graphen gilt die Totalfärbungs-Vermutung.

*Beweis.* Ist  $G$  ein bipartiter Graph, so lassen sich die Kanten nach dem Satz von König (Satz 6.11) mit  $\Delta(G)$  verschiedenen Farben färben. Färbt man nun die Ecken der beiden Partitions Mengen mit zwei weiteren Farben, so erhält man eine  $(\Delta(G) + 2)$ -Totalfärbung von  $G$ . ||

**Satz 13.19 (Behzad [2] 1971).** Es sei  $C_n$  ein Kreis der Länge  $n$  und  $p$  eine natürliche Zahl.

- i) Ist  $n = 3p$ , so gilt  $\chi_T(C_n) = 3$ .
- ii) Ist  $n = 3p + 1$  oder  $n = 3p + 2$ , so gilt  $\chi_T(C_n) = 4$ .

*Beweis.* Für einen Kreis  $C_n$  benutzen wir im folgenden die Schreibweise

$$C_n = a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n} a_1,$$

wobei  $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$  die Ecken und  $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$  die Kanten des Kreises bedeuten.

i) Ist  $n = 3p$ , so hat  $C_n$  die Form

$$C_n = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots a_{6p-2} a_{6p-1} a_{6p} a_1.$$

Wir geben den Elementen  $a_1, a_4, a_7, \dots, a_{6p-2}$  die Farbe 1, den Elementen  $a_2, a_5, \dots, a_{6p-1}$  die Farbe 2 und den verbleibenden Elementen die Farbe 3. Diese Färbung liefert eine 3-Totalfärbung des  $C_{3p}$ , womit i) bewiesen ist.

ii) Ist  $n = 3p + 1$ , so hat  $C_n$  die Form

$$C_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{6p-4} a_{6p-3} a_{6p-2} a_{6p-1} a_{6p} a_{6p+1} a_{6p+2} a_1.$$

Wir geben den Elementen  $a_1, a_4, a_7, \dots, a_{6p-2}$  die Farbe 1, den Elementen  $a_2, a_5, \dots, a_{6p-4}$  die Farbe 2, den Elementen  $a_3, a_6, \dots, a_{6p-3}$  die Farbe 3, den beiden Elementen  $a_{6p-1}$  und  $a_{6p+2}$  die Farbe 4, dem Element  $a_{6p}$  die Farbe 2 und schließlich dem Element  $a_{6p+1}$  die Farbe 3. Diese Färbung liefert eine 4-Totalfärbung des  $C_{3p+1}$ . Da man ohne Mühe erkennt, daß man mit 3 Farben nicht auskommt, haben wir  $\chi_T(C_{3p+1}) = 4$  nachgewiesen.

Ist  $n = 3p + 2$ , so hat  $C_n$  die Form

$$C_n = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots a_{6p} a_{6p+1} a_{6p+2} a_{6p+3} a_{6p+4} a_1.$$

Wir geben den Elementen  $a_1, a_4, a_7, \dots, a_{6p+1}$  die Farbe 1, den Elementen  $a_2, a_5, \dots, a_{6p+2}$  die Farbe 2, dem Element  $a_{6p+4}$  die Farbe 4 und den verbleibenden Elementen die Farbe 3. Diese Färbung liefert eine 4-Totalfärbung des  $C_{3p+2}$ . Da man auch hier ohne Mühe erkennt, daß man mit 3 Farben nicht auskommt, haben wir  $\chi_T(C_{3p+2}) = 4$  nachgewiesen, womit der Satz vollständig bestätigt ist. ||

**Bemerkung 13.10.** Mit Satz 13.19 haben wir die Totalfärbungs-Vermutung auch für Kreise nachgewiesen.

**Satz 13.20.** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\Delta(G) = n(G) - 1$ , so gilt die Totalfärbungs-Vermutung

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

*Beweis.* Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Ecken von  $G$ . Fügt man zu  $G$  eine Ecke  $w$  und die Kanten  $k_1 = wx_1, k_2 = wx_2, \dots, k_n = wx_n$  hinzu, so entsteht ein neuer schlichter Graph  $G'$  mit  $\Delta(G') = n = \Delta(G) + 1$ . Nach dem Satz von Vizing (Satz 13.2) besitzt  $G'$  eine  $(\Delta(G) + 2)$ -Kantenfärbung. Entfernt man nun die Ecke  $w$  aus  $G'$  und färbt die Ecke  $x_i$  von  $G$  mit der Farbe der Kante  $k_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$ , so hat man aus der Kantenfärbung von  $G'$  eine  $(\Delta(G) + 2)$ -Totalfärbung von  $G$  gewonnen. ||

Im Beweis von Satz 13.20 haben wir das Totalfärbungsproblem durch einen kleinen Trick auf ein Kantenfärbungsproblem zurückgeführt. Diese Technik wurde erstmalig 1989 in einer Arbeit von Yap, J.-F. Wang und Z.-F. Zhang [1] vorgestellt, die die Totalfärbungs-Vermutung für Graphen mit hohem Maximalgrad bestätigt haben.

**Satz 13.21 (Yap, Wang und Zhang [1] 1989).** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit Maximalgrad  $\Delta(G) \geq n(G) - 4$ , so gilt

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Folgende Ergänzung von Satz 13.21 wurde mit der gleichen Methode nachgewiesen.

**Satz 13.22 (Yap, Chew [1] 1992).** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\Delta(G) = n(G) - 5$ , so gilt

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Auch wir wollen diese Beweistechnik nochmals verwenden, um die totalchromatische Zahl für vollständige Graphen zu bestimmen.

**Satz 13.23 (Behzad, Chartrand und Cooper [1] 1967).** Es gilt

- i)  $\chi_T(K_{2p+1}) = 2p + 1 = \Delta(K_{2p+1}) + 1$  und
- ii)  $\chi_T(K_{2p}) = 2p + 1 = \Delta(K_{2p}) + 2.$

*Beweis.* i) Ist  $G = K_{2p+1}$ , so gilt für den Graphen  $G'$  aus dem Beweis des Satzes 13.20  $G' = K_{2p+2}$ . Nach Satz 7.14 besitzt  $G'$  eine  $(2p + 1)$ -Kantenfärbung, womit  $G = K_{2p+1}$  eine  $(2p+1)$ -Totalfärbung besitzt. Beachtet man noch Bemerkung 13.8, so ergibt sich unmittelbar i).

ii) Um  $\chi_T(K_{2p}) = 2p + 1 = \Delta(K_{2p}) + 2$  nachzuweisen, genügt es wegen Satz 13.20 zu zeigen, daß man die Ecken und Kanten des  $K_{2p}$  nicht in  $2p$  unabhängige Mengen zerlegen kann. Ist  $X$  eine unabhängige Menge, so enthält  $X$  höchstens eine Ecke und höchstens  $p$  Kanten. Da in  $X$  aber nicht gleichzeitig  $p$  Kanten und eine Ecke enthalten sein dürfen, ergibt sich  $|X| \leq p$ . Könnte man nun die Ecken und Kanten in  $2p$  unabhängige Mengen zerlegen, so würde daraus  $|E(K_{2p})| + |K(K_{2p})| \leq 2p^2$  folgen, was offensichtlich nicht richtig ist.  $\parallel$

**Satz 13.24 (Behzad, Chartrand und Cooper [1] 1967).** Es gilt

- i)  $\chi_T(K_{p,q}) = q + 1 = \Delta(K_{p,q}) + 1$  für  $q > p$  und
- ii)  $\chi_T(K_{p,p}) = p + 2 = \Delta(K_{p,p}) + 2.$

*Beweis.* i) Es sei  $G = K_{p,q}$  und  $E_1, E_2$  ein Partition der Ecken von  $G$  mit  $q = |E_1| > |E_2| = p$ . Nach dem Satz von König (Satz 6.11) kann man die Kanten von  $G$  in  $q$  Matchings  $K_1, K_2, \dots, K_q$  zerlegen. Wegen  $q > p$  existiert zu jeder Ecke  $x \in E_1$  ein Matching  $K_i$ , so daß  $x$  zu keiner Kante aus  $K_i$  inzident ist. Fügt man jede Ecke aus  $E_1$  zu einem solchen Matching hinzu, so erhält man insgesamt eine Zerlegung von  $E(G) \cup K(G)$  in  $q+1$  unabhängige Mengen von Ecken und Kanten, woraus zusammen mit Bemerkung 13.8 das gewünschte Ergebnis folgt.

ii) Ist  $G = K_{p,p}$ , so erkennt man ohne Mühe, daß für jede unabhängige Menge  $X \subseteq E(G) \cup K(G)$  notwendig  $|X| \leq p$  gilt. Da bekanntlich  $|E(G)| + |K(G)| = p^2 + 2p$  gilt, erhalten wir zusammen mit Satz 13.18  $\chi_T(K_{p,p}) = p + 2 = \Delta(K_{p,p}) + 2.$   $\parallel$

Im Jahre 1989 bestätigte Yap [2] die Totalfärbungs-Vermutung für die vollständigen  $p$ -partiten Graphen. Aber welche vollständigen  $p$ -partiten Graphen  $G$  die Gleichung  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$  und welche die Gleichung  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$  erfüllen ist bisher noch nicht ganz geklärt. Das wohl beste Ergebnis im Zusammenhang mit der Totalfärbungs-Vermutung wurde 1993 von Hilton und Hind [1] mit Methoden aus der Eckenfärbungstheorie bewiesen.

**Satz 13.25 (Hilton, Hind [1] 1993).** Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $\Delta(G) \geq \frac{3}{4}n(G)$ , so gilt

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Weitere Informationen zu diesem Thema findet der Leser in dem Artikel “Recent developments in total colouring” von Hind [1] aus dem Jahre 1994. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß die Totalfärbungs-Vermutung auch für Multigraphen ausgesprochen wurde.

**Totalfärbungs-Vermutung (Vizing [1] 1964, Behzad [1] 1965).** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + \max_{a,b \in E(G)} m_G(a,b) + 1.$$

## 13.5 Aufgaben

**Aufgabe 13.1.** Man beweise, daß alle aus dem Petersen-Graphen durch Entfernen einer Ecke hervorgehenden Graphen isomorph sind. Bezeichnet man diesen Isomorphietyp mit  $\mathbf{P}^*$ , so zeige man  $\chi'(\mathbf{P}^*) = 4$ .

**Aufgabe 13.2.** Man konstruiere Beispiele, die den Bedingungen aus Bemerkung 13.4 genügen.

**Aufgabe 13.3.** Man zeige, daß für  $n \geq 2$  die Graphen  $K_{2n+1}$  eckenkritisch aber nicht kritisch sind.

**Aufgabe 13.4.** Man beweise: Für einen schlichten Graphen  $G$  gilt genau dann  $\Phi(G) > \Delta(G)$ , wenn  $G$  einen Teilgraphen  $H$  mit

$$|K(H)| \geq \left\lfloor \frac{|E(H)|}{2} \right\rfloor \Delta(G) + 1$$

besitzt. Ist dies der Fall, so gilt  $\Delta(H) = \Delta(G)$ .

**Aufgabe 13.5.** Man zeige, daß es genau vier schlichte Graphen mit höchstens fünf Ecken gibt, für die

$$|K(G)| = \left\lfloor \frac{|E(G)|}{2} \right\rfloor \Delta(G) + 1$$

gilt (man vgl. Satz 13.7).

**Aufgabe 13.6.** Man zeige, daß  $\mathbf{P}^*$  kritisch ist.

**Aufgabe 13.7.** Man zeige, daß  $(K_{2n})^{k,a}$  kritisch ist (man vgl. Satz 13.9).

**Aufgabe 13.8.** Man bestimme alle schlichten und zusammenhängenden Kaktusgraphen, die Klasse 1 bzw. Klasse 2 sind.

**Aufgabe 13.9.** Ist  $G$  ein kritischer Graph, so beweise man

$$m(G) \geq \frac{1}{8}(3\Delta(G)^2 + 6\Delta(G) - 1).$$

**Aufgabe 13.10.** Man beweise: Ist  $G$  ein schlichter,  $r$ -regulärer Graph der Ordnung  $2n$  mit  $r \geq 2$ , so ist  $G^{k,a}$  für jede Kante  $k \in K(G)$  ein Klasse 2-Graph.

**Aufgabe 13.11.** Es seien  $G$  und  $G'$  zwei schlichte Graphen mit  $\Delta = \Delta(G) = \Delta(G')$  und  $\Phi(G), \Phi(G') > \Delta$ . Man zeige für jede Hajós-Vereinigung  $H$  der Graphen  $G$  und  $G'$  mit  $\Delta(H) = \Delta$  die Ungleichung  $\Phi(H) > \Delta$ .

**Aufgabe 13.12.** Für  $3 \leq \Delta \leq 5$  gebe man schlichte und planare Klasse 1- und Klasse 2-Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) = \Delta$  an.

**Aufgabe 13.13.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph ungerader Ordnung mit  $\Delta(G) = n(G) - 1$ . Man zeige  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ .

**Aufgabe 13.14.** Man zeige: Ist  $G$  ein schlichter und 3-partiter Klasse 1-Graph, so gilt  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ .

# Kapitel 14

## Mehrfacher Zusammenhang

### 14.1 Ecken- und Kantenzusammenhang in Graphen

**Definition 14.1.** Ein nicht trivialer, zusammenhängender Multigraph  $G$  heißt  $q$ -fach eckenzusammenhängend oder  $q$ -fach zusammenhängend ( $q \in \mathbb{N}$ ), wenn  $|E(G)| \geq q + 1$  und  $G - E'$  für alle  $E' \subseteq E(G)$  mit  $|E'| \leq q - 1$  zusammenhängend ist. Ist  $G$   $q$ -fach eckenzusammenhängend, aber nicht  $(q + 1)$ -fach eckenzusammenhängend, so heißt  $q = \sigma = \sigma(G)$  *Eckenzusammenhangszahl* oder *Zusammenhangszahl* von  $G$ . Ist der Multigraph  $G$  nicht zusammenhängend, oder ist  $G$  der triviale Graph, so heißt  $G$  *0-fach zusammenhängend*, und wir setzen  $\sigma(G) = 0$ .

Ein nicht trivialer, zusammenhängender Multigraph  $G$  heißt  $q$ -fach kantenzusammenhängend ( $q \in \mathbb{N}$ ), wenn  $G - K'$  für alle  $K' \subseteq K(G)$  mit  $|K'| \leq q - 1$  zusammenhängend ist. Ist  $G$   $q$ -fach kantenzusammenhängend, aber nicht  $(q + 1)$ -fach kantenzusammenhängend, so heißt  $q = \lambda = \lambda(G)$  *Kantenzusammenhangszahl* von  $G$ . Ist der Multigraph  $G$  nicht zusammenhängend, oder ist  $G$  der triviale Graph, so heißt  $G$  *0-fach kantenzusammenhängend*, und wir setzen  $\lambda(G) = 0$ .

- Bemerkung 14.1.**
- i) Nach Definition 14.1 gilt für jeden Multigraphen  $G$ , dass  $\sigma(G) \leq n(G) - 1$ .
  - ii) Aus Definition 14.1 erhält man  $\sigma(K_n) = \delta(K_n) = n - 1$ .
  - iii) Für einen zusammenhängenden Multigraphen  $G$  gilt genau dann  $\lambda(G) = 1$ , wenn  $G$  eine Brücke besitzt.
  - iv) Für einen zusammenhängenden Multigraphen  $G$  gilt genau dann  $\sigma(G) = 1$ , wenn  $G$  eine Schritzecke besitzt, oder  $G$  aus genau zwei Ecken und  $p$  parallelen Kanten besteht.

**Satz 14.1 (Whitney [2] 1932).** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt

$$\sigma(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G). \quad (14.1)$$

*Beweis.* Wir setzen  $\sigma(G) = \sigma$ ,  $\lambda(G) = \lambda$  und  $\delta(G) = \delta$ . Ist  $G$  nicht zusammenhängend, oder ist  $G$  der triviale Graph, so gilt nach Definition 14.1  $\sigma = \lambda = 0$ , womit (14.1) erfüllt ist. Daher sei im folgenden  $\kappa(G) = 1$  und  $|E(G)| \geq 2$ .

Zunächst zeigen wir  $\lambda \leq \delta$ . Nach Voraussetzung gilt  $\delta \geq 1$ . Ist  $a$  eine Ecke aus  $G$  mit  $d(a, G) = \delta$ , so entferne man aus  $G$  alle Kanten, die mit  $a$  inzidieren. Da dieser neue Graph nicht mehr zusammenhängend ist, ergibt sich sofort  $\lambda \leq \delta$ .

Um  $\sigma \leq \lambda$  zu beweisen, können wir o.B.d.A.  $G$  als schlicht voraussetzen. Denn entfernt man aus einem Graphen alle parallelen Kanten, so bleibt die Zusammenhangszahl unverändert,

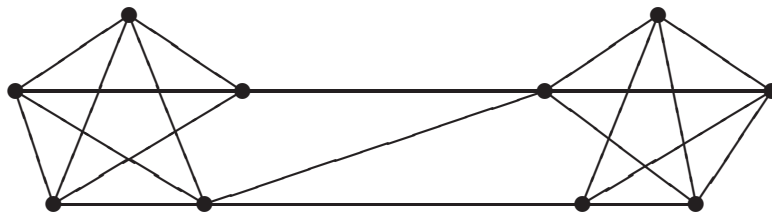
während die Kantenzusammenhangszahl kleiner werden kann.

Ist  $\lambda = 1$ , so besitzt  $G$  nach Bemerkung 14.1 eine Brücke  $k = ab$ . Dann gilt aber auch  $\sigma = 1$ , denn entweder ist  $G \cong K_2$ , oder mindestens eine der beiden Ecken  $a, b$  ist eine Schnitt Ecke.

Ist  $\lambda \geq 2$ , so existiert in  $G$  eine Kantenmenge  $K' = \{k_1, k_2, \dots, k_\lambda\}$  mit der Eigenschaft, daß  $G - K'$  nicht zusammenhängend ist, und der Graph  $H = G - \{k_2, k_3, \dots, k_\lambda\}$  die Brücke  $k_1 = ab$  besitzt. Wählt man für  $2 \leq i \leq \lambda$  zu jeder Kante  $k_i$  eine inzidente Ecke  $x_i \neq a, b$ , so ist einer der beiden Graphen  $G - \{a, x_2, \dots, x_\lambda\}$  bzw.  $G - \{b, x_2, \dots, x_\lambda\}$  nicht zusammenhängend, oder einer dieser beiden Graphen besteht nur aus einer Ecke. Wegen  $|\{x_2, x_3, \dots, x_\lambda\}| \leq \lambda - 1$  ergibt sich daraus die gewünschte Ungleichung  $\sigma \leq \lambda$ . ||

**Bemerkung 14.2.** Aus Bemerkung 14.1 und (14.1) folgt nun sofort  $\lambda(K_n) = n - 1$ . Im Zusammenhang mit dem Satz von Whitney konstruierten Chartrand und Harary [1] 1968 Beispiele von Graphen  $G$  mit  $\sigma(G) = p$ ,  $\lambda(G) = q$  und  $\delta(G) = r$  für beliebig vorgegebene natürliche Zahlen  $0 < p \leq q \leq r$ .

**Beispiel 14.1.** Für den skizzierten Graphen  $G$  gilt  $\sigma(G) = 2$ ,  $\lambda(G) = 3$  und  $\delta(G) = 4$ . Dabei ist  $\sigma(G) = 2$ , aber vor allen Dingen  $\lambda(G) = 3$  erst durch längeres "scharfes" Hinsehen zu erkennen. Mit Hilfe einiger der folgenden Resultate werden wir diese beiden Größen von  $G$  nochmals bestimmen.



**Satz 14.2 (Chartrand, Harary [1] 1968).** Ist  $G$  ein schlichter aber nicht vollständiger Graph, so gilt

$$\sigma(G) \geq 2\delta(G) + 2 - n(G).$$

*Beweis.* Wir wählen eine Eckenmenge  $S \subseteq E(G)$  mit  $|S| = \sigma(G)$ , so daß  $\kappa(G - S) \geq 2$  gilt. Sind  $H_1$  und  $H_2$  zwei Komponenten von  $G - S$ , so gilt für  $x_i \in E(H_i)$  ( $i = 1, 2$ )

$$N[x_i, G] \subseteq E(H_i) \cup S$$

und daher

$$2 + 2\delta(G) \leq |N[x_1, G]| + |N[x_2, G]| \leq n(G) + |S|.$$

Wegen  $|S| = \sigma(G)$  folgt daraus die Behauptung. ||

Das folgende Beispiel wird uns zeigen, daß die Ungleichung in Satz 14.2 bestmöglich ist.

**Beispiel 14.2.** Es seien  $r$  und  $t$  zwei natürliche Zahlen mit  $1 \leq r \leq t$ . In dem Graphen  $K_{t+1-r} \cup K_r \cup K_{t+1-r}$  verbinde man jeweils alle Ecken der beiden vollständigen Graphen  $K_{t+1-r}$  mit allen Ecken des vollständigen Graphen  $K_r$ . Für den so konstruierten Graphen  $H$  erhält man dann  $n(H) = 2t + 2 - r$ ,  $\delta(H) = t$  und  $\sigma(H) = r$ , woraus sich unmittelbar  $\sigma(H) = 2\delta(H) + 2 - n(H)$  ergibt.



**Folgerung 14.1.** Ist  $s \geq 0$  eine ganze Zahl und  $G$  ein schlichter Graph, der die Bedingung  $n(G) \leq \delta(G) + 2 + s$  erfüllt, so gilt  $\sigma(G) \geq \delta(G) - s$ . Der Spezialfall  $s = 0$  liefert zusammen mit dem Satz von Whitney die folgende Aussage. Ist  $G$  ein schlichter Graph mit  $n(G) \leq \delta(G) + 2$ , so gilt  $\sigma(G) = \lambda(G) = \delta(G)$ .

**Bemerkung 14.3.** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei disjunkte Multigraphen sowie  $x_1, x_2, \dots, x_r \in E(G_1)$  und  $y_1, y_2, \dots, y_r \in E(G_2)$  jeweils  $r$  verschiedene Ecken aus  $G_1$  und  $G_2$ . Ist  $G$  die Vereinigung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  zusammen mit den  $r$  neuen Kanten  $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ry_r$ , so ist folgende Ungleichung leicht einzusehen:

$$\sigma(G) \geq \min\{\sigma(G_1), \sigma(G_2), r\}$$

Man gebe ein Beispiel mit  $\sigma(G) > \min\{\sigma(G_1), \sigma(G_2), r\}$  an (man vgl. Aufgabe 14.2).

Aus Folgerung 14.1 und Bemerkung 14.3 ergibt sich für den Graphen  $G$  aus Beispiel 14.1 sofort  $\sigma(G) = 2$ .

Nun wenden wir uns dem Problem zu, hinreichende Bedingungen für  $\lambda = \delta$  zu finden. Ein erstes solches Ergebnis geht auf Chartrand zurück. Zum Beweis dieses Resultats verwenden wir folgende einfache aber nützliche Charakterisierung des  $q$ -fachen Kantenzusammenhangs.

**Satz 14.3 (Chartrand [1] 1966).** Ein Multigraph  $G$  ist genau dann  $q$ -fach kantenzusammenhängend, wenn für alle Teilmengen  $S \subseteq E(G)$  mit  $S \neq E(G), \emptyset$  gilt:

$$m_G(S, \overline{S}) \geq q$$

*Beweis.* Es sei  $G$   $q$ -fach kantenzusammenhängend. Ist  $q = 0$ , so gibt es nichts zu zeigen. Daher sei nun  $q \geq 1$ . Angenommen, es gibt eine Eckenmenge  $S$  in  $G$  mit  $S \neq E(G), \emptyset$  und  $m_G(S, \overline{S}) = r < q$ . Entfernt man aus  $G$  die  $r$  Kanten zwischen  $S$  und  $\overline{S}$ , so zerfällt der zusammenhängende Graph  $G$  in verschiedene Komponenten, was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet.

Nun gelte umgekehrt  $m_G(S, \overline{S}) \geq q$  für alle  $S \subseteq E(G)$  mit  $S \neq E(G), \emptyset$ . Der Fall  $q = 0$  ist sofort klar. Sei also  $q \geq 1$ . Angenommen, es existiert eine Kantenmenge  $K'$  mit  $|K'| = r < q$ , so daß  $G - K'$  aus mindestens zwei Komponenten besteht. Ist  $A$  die Eckenmenge einer Komponente von  $G - K'$ , so gilt  $A \neq E(G), \emptyset$  und  $m_G(A, \overline{A}) \leq r < q$ , was einen Widerspruch zur Voraussetzung ergibt. ||

**Satz 14.4 (Chartrand [1] 1966).** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n(G) \leq 2\delta(G) + 1$ , so gilt  $\lambda(G) = \delta(G)$ .

*Beweis.* Ist  $\delta(G) = 0$ , so ist nichts zu beweisen. Im Fall  $\delta(G) \geq 1$  wollen wir für jede echte Teilmenge  $S \neq \emptyset$  von  $E(G)$  die Ungleichung  $m_G(S, \overline{S}) \geq \delta(G)$  nachweisen. Es gelte o.B.d.A.  $1 \leq |S| \leq \frac{1}{2}n(G)$ , also  $1 \leq |S| \leq \delta(G)$ . Da  $G$  schlicht ist, folgt  $2|K(G[S])| \leq |S|(|S| - 1)$ , woraus sich

$$m_G(S, \overline{S}) \geq |S|\delta(G) - |S|(|S| - 1) \geq \delta(G)|S| - \delta(G)(|S| - 1) = \delta(G)$$

ergibt. Mit den Sätzen 14.1 und 14.3 erhält man daraus das gewünschte Resultat. ||

Ein Analogon zu Bemerkung 14.3 ist

**Bemerkung 14.4.** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei disjunkte Multigraphen. Ist  $G$  die Vereinigung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  zusammen mit  $r$  neuen Kanten, die  $G_1$  mit  $G_2$  verbinden, so gilt

$$\lambda(G) \geq \min\{\lambda(G_1), \lambda(G_2), r\}.$$

Man gebe ein Beispiel mit  $\lambda(G) > \min\{\lambda(G_1), \lambda(G_2), r\}$  an (man vgl. Aufgabe 14.3).

Aus dieser Bemerkung und Satz 14.4 ergibt sich für den Graphen  $G$  aus Beispiel 14.1 sofort  $\lambda(G) = 3$ .

Der Satz von Chartrand (Satz 14.4) wurde durch die folgenden interessanten Ergebnisse verallgemeinert.

**Satz 14.5 (Lesniak [1] 1974).** Gilt für alle verschiedenen, nicht adjazenten Ecken  $x$  und  $y$  eines schlichten Graphen  $G$  die Bedingung  $d(x, G) + d(y, G) \geq n(G) - 1$ , so ist  $\lambda(G) = \delta(G)$ .

**Satz 14.6 (Plesnik [1] 1975).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph. Ist  $G$  vom Durchmesser 1 oder 2, so gilt  $\lambda(G) = \delta(G)$ .

**Satz 14.7 (Plesnik, Znám [1] 1989).** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph. Gibt es in  $G$  keine vier Ecken  $a_1, b_1, a_2, b_2$  mit

$$d(a_1, a_2), d(a_1, b_2), d(b_1, a_2), d(b_1, b_2) \geq 3, \quad (14.2)$$

so gilt  $\lambda = \lambda(G) = \delta(G) = \delta$ .

**Bemerkung 14.5.** Implizit befindet sich Satz 14.7 schon in einer Arbeit von Goldsmith [1] aus dem Jahre 1981.

Folgende Implikationskette ist leicht einzusehen:

Satz 14.7  $\implies$  Satz 14.6  $\implies$  Satz 14.5  $\implies$  Satz 14.4. (man vgl. Aufgabe 14.4).

Mit meinem Schüler Prof. Dr. Peter Dankelmann habe ich ein Ergebnis bewiesen, das Satz 14.7 als Spezialfall enthält. Zur Herleitung dieses Resultats benötigen wir folgende Definition.

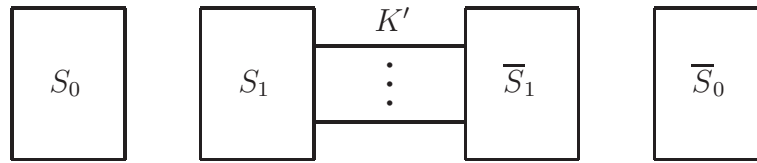
**Definition 14.2.** Ist  $G$  ein Graph und  $X, Y \subseteq E(G)$ , so wird der *Abstand* zwischen  $X$  und  $Y$  durch

$$d(X, Y) = d_G(X, Y) = \min\{d(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

definiert. Ein Paar  $X, Y \subseteq E(G)$  mit  $d(X, Y) = p > 0$  nennen wir *p-abstandsmaximal*, wenn keine Eckenmengen  $A \supseteq X$  und  $B \supseteq Y$  mit  $A \neq X$  oder  $B \neq Y$  existieren, so daß  $d(A, B) = p$  gilt.

**Satz 14.8 (Dankelmann, Volkmann [1] 1995).** Es sei  $G$  ein schlichter, zusammenhängender Graph. Erfüllen alle 3-abstandsmaximalen Eckenpaare  $X, Y \subseteq E(G)$  die Bedingung  $\delta(G[X \cup Y]) = 0$ , so gilt  $\lambda = \lambda(G) = \delta(G) = \delta$ .

*Beweis.* Im Fall  $n(G) = 1$  gibt es nichts zu beweisen. Ist  $n(G) \geq 2$ , so nehmen wir an, daß  $\lambda < \delta$  gilt. Dann existiert eine Kantenmenge  $K' \subseteq K(G)$  mit  $|K'| = \lambda$ , so daß  $G - K'$  aus genau zwei Komponenten  $G_1$  und  $G_2$  besteht. Wir setzen  $S = E(G_1)$  und  $\bar{S} = E(G_2)$ . Weiter seien  $S_1 \subseteq S$  und  $\bar{S}_1 \subseteq \bar{S}$  diejenigen Eckenmengen, die mit den Kanten aus  $K'$  inzidieren und  $S_0 = S - S_1$  sowie  $\bar{S}_0 = \bar{S} - \bar{S}_1$  (man vgl. die Skizze). Es gilt natürlich  $|S_1|, |\bar{S}_1| \leq \lambda < \delta$ .



1. *Fall:* Es gelte  $S_0, \bar{S}_0 \neq \emptyset$ . Nach Konstruktion beträgt der Abstand zwischen  $S_0$  und  $\bar{S}_0$  mindestens 3. Nun wählen wir ein 3-abstandsmaximales Paar  $X, Y \subseteq E(G)$  mit  $S_0 \subseteq X$  und  $\bar{S}_0 \subseteq Y$ . Nach Voraussetzung enthält dann  $G[X]$  oder  $G[Y]$  eine isolierte Ecke  $u$ . Sei o.B.d.A.  $u \in X$ .

Ist  $u \in S_0$ , so erhalten wir den Widerspruch  $\delta \leq |N(u, G)| \leq |S_1| \leq \lambda$ .  
 Ist  $u \in S_1$ , so erhalten wir den Widerspruch

$$\begin{aligned} \delta &\leq d(u, G) = |N(u, G) \cap \bar{S}_1| + |N(u, G) \cap S_1| \\ &\leq |N(u, G) \cap \bar{S}_1| + \sum_{x \in N(u, G) \cap S_1} |N(x, G) \cap \bar{S}_1| \\ &\leq \sum_{x \in S_1} |N(x, G) \cap \bar{S}_1| = \lambda < \delta. \end{aligned}$$

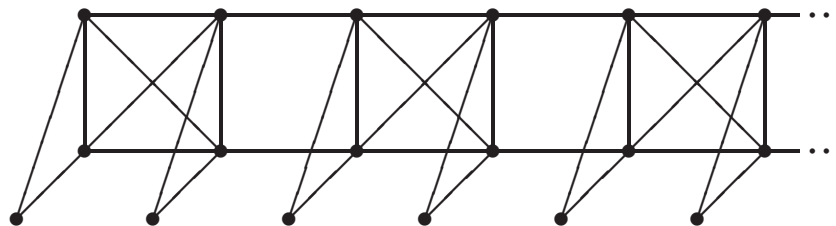
Ist  $u \in \bar{S}_1$ , so gilt wieder  $N(u, G) \subseteq S_1 \cup \bar{S}_1$ , und man erhält analog zum Fall  $u \in S_1$  einen Widerspruch.

2. *Fall:* Ist o.B.d.A.  $S_0 = \emptyset$ , so erhält man analog zum Fall  $u \in S_1$  für eine beliebige Ecke  $a \in S_1$  den Widerspruch  $\delta \leq d(a, G) \leq \lambda < \delta$ .

Daher liefert uns der Satz von Whitney die gewünschte Aussage. ||

*Beweis von Satz 14.7.* Ist  $X, Y \subseteq E(G)$  ein Paar 3-abstandsmaximaler Eckenmengen, so gilt nach (14.2) die Bedingung  $\delta(G[X \cup Y]) = 0$ , womit sich Satz 14.7 aus Satz 14.8 ergibt. ||

**Bemerkung 14.6.** Die Voraussetzungen in den Sätzen 14.4 bis 14.7 lassen nur Graphen zu, deren Durchmesser höchstens 4 beträgt. Die folgende Skizze zeigt einen Graphen von beliebig großem Durchmesser, der die Bedingungen von Satz 14.8 erfüllt.



Entsprechende Beispiele existieren auch für  $\delta = \lambda \geq 3$  (man vgl. Aufgabe 14.5).

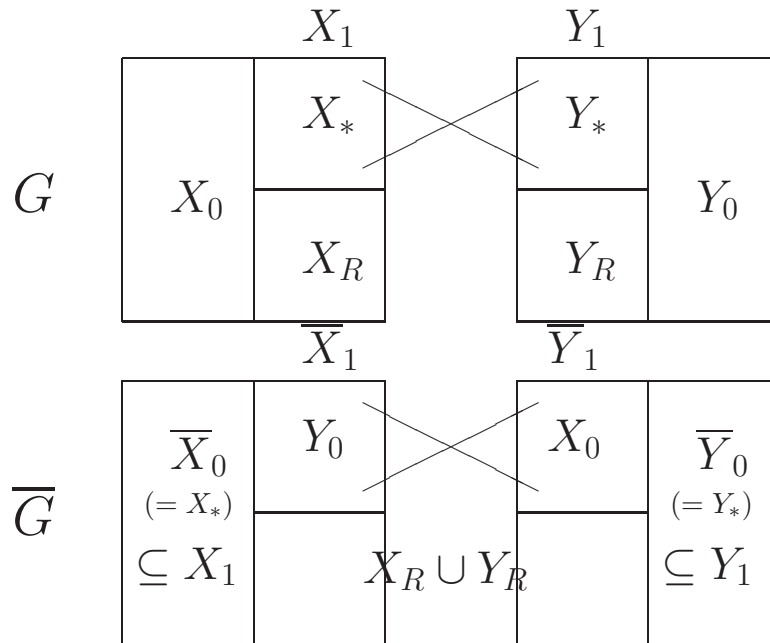
Nun kommen wir zu einem äußerst attraktiven Resultat, das ich kürzlich zusammen mit Frau Dr. Angelika Hellwig entdeckt habe.

**Satz 14.9 (Hellwig, Volkmann [8] 2008).** Ist  $G$  ein schlichter Graph, so gilt

$$\lambda(G) = \delta(G) \text{ oder } \lambda(\bar{G}) = \delta(\bar{G}).$$

*Beweis.* Ist  $\text{dm}(G) \leq 2$  oder  $\text{dm}(\overline{G}) \leq 2$ , so folgt das gewünschte Resultat unmittelbar aus dem Satz von Plesnik (Satz 14.6). Daher sei nun  $\text{dm}(G) \geq 3$  und  $\text{dm}(\overline{G}) \geq 3$ , und wir nehmen an, daß  $\lambda(G) \leq \delta(G) - 1$  und  $\lambda(\overline{G}) \leq \delta(\overline{G}) - 1$  gilt.

Wegen Satz 14.3 existiert eine Menge  $X \subset E(G)$  mit  $m_G(X, E(G) - X) = \lambda(G)$ . Setzen wir  $Y = E(G) - X$ , so seien  $X_1 \subseteq X$  und  $Y_1 \subseteq Y$  diejenigen Eckenmengen, die mit den Kanten inzidieren die in  $G$  von  $X$  nach  $Y$  gehen und  $X_0 = X - X_1$  sowie  $Y_0 = Y - Y_1$  (man vgl. die Skizze). Es gilt natürlich  $|X_1|, |Y_1| \leq \lambda(G) \leq \delta(G) - 1$  und daher  $|X_0| \geq 2$  und  $|Y_0| \geq 2$  (man vgl. den Beweis von Satz 14.8).



Wegen  $Y_0 \neq \emptyset$  folgt  $d_{\overline{G}}(x, a) \leq 2$  für alle  $x \in X_0$  und  $a \in E(G)$ , und wegen  $X_0 \neq \emptyset$  folgt  $d_{\overline{G}}(y, b) \leq 2$  für alle  $y \in Y_0$  und  $b \in E(G)$ . Ebenso erkennt man  $d_{\overline{G}}(a, b) \leq 2$  für  $a, b \in X_1$  und  $d_{\overline{G}}(a, b) \leq 2$  für  $a, b \in Y_1$ .

Nun sei  $\overline{X} \subset E(\overline{G})$  mit  $m_{\overline{G}}(\overline{X}, E(\overline{G}) - \overline{X}) = \lambda(\overline{G})$ . Setzen wir  $\overline{Y} = E(\overline{G}) - \overline{X}$ , so seien  $\overline{X}_1 \subseteq \overline{X}$  und  $\overline{Y}_1 \subseteq \overline{Y}$  diejenigen Eckenmengen, die mit den Kanten inzidieren die in  $\overline{G}$  von  $\overline{X}$  nach  $\overline{Y}$  gehen und  $\overline{X}_0 = \overline{X} - \overline{X}_1$  sowie  $\overline{Y}_0 = \overline{Y} - \overline{Y}_1$  (man vgl. die Skizze). Es gilt wieder  $|\overline{X}_0|, |\overline{Y}_0| \geq 2$  und  $d_{\overline{G}}(\overline{X}_0, \overline{Y}_0) \geq 3$ .

Aus den Abschätzungen über die Entfernungen in  $\overline{G}$  ergibt sich zunächst  $\overline{X}_0, \overline{Y}_0 \subseteq X_1 \cup Y_1$  und damit  $\overline{X}_0 \subseteq X_1$  und  $\overline{Y}_0 \subseteq Y_1$  oder  $\overline{X}_0 \subseteq Y_1$  und  $\overline{Y}_0 \subseteq X_1$ . O.B.d.A. gelte  $\overline{X}_0 \subseteq X_1$  und  $\overline{Y}_0 \subseteq Y_1$ . In  $G$  bezeichnen wir die Eckenmenge  $\overline{X}_0$  mit  $X_*$  und  $\overline{Y}_0$  mit  $Y_*$ , und wir setzen  $X_R = X_1 \setminus X_*$  und  $Y_R = Y_1 \setminus Y_*$ .

In  $\overline{G}$  sind die Ecken aus  $X_0$  adjazent zu den Ecken aus  $Y$  und die Ecken aus  $Y_0$  adjazent zu den Ecken aus  $X$ . Daher folgt  $Y_0 \subseteq \overline{X}_1$ ,  $X_0 \subseteq \overline{Y}_1$  und  $X_R \cup Y_R \subseteq \overline{X}_1 \cup \overline{Y}_1$ .

Nun fassen wir einige der erzielten Beobachtungen zusammen.

- (1) Ist  $x \in X_*$  und  $y \in Y_*$ , so gilt  $xy \in K(G)$ .
- (2) Ist  $x \in X_0$  und  $y \in Y_0$ , so gilt  $xy \in K(\overline{G})$ .
- (3) Aus (1) folgt  $\lambda(G) \geq |X_*||Y_*| + \max\{|X_R|, |Y_R|\} \geq |X_*||Y_*| + \frac{|X_R|+|Y_R|}{2}$ .
- (4) Aus (2) folgt  $\lambda(\overline{G}) \geq |X_0||Y_0| + \frac{|X_R|+|Y_R|}{2}$ .

$$(5) \quad \delta(G) \leq |X| - 1 = |X_0| + |X_R| + |X_*| - 1$$

$$(6) \quad \delta(G) \leq |Y| - 1 = |Y_0| + |Y_R| + |Y_*| - 1$$

$$(7) \quad \delta(\overline{G}) \leq |X_*| + |Y_0| + \frac{|X_R| + |Y_R|}{2} - 1 \text{ oder } \delta(\overline{G}) \leq |Y_*| + |X_0| + \frac{|X_R| + |Y_R|}{2} - 1.$$

1. Fall: Es gelte  $\delta(\overline{G}) \leq |X_*| + |Y_0| + \frac{|X_R| + |Y_R|}{2} - 1$ . Wegen  $\lambda(G) \leq \delta(G) - 1$ , liefern die Ungleichungen (3) und (5)

$$|X_*||Y_*| + |X_R| \leq \lambda(G) \leq \delta(G) - 1 \leq |X_0| + |X_R| + |X_*| - 2$$

und daher

$$|X_*||Y_*| \leq |X_0| + |X_*| - 2,$$

also

$$|X_0| - 1 \geq |X_*||Y_*| - |X_*| + 1.$$

Verwenden wir (4), (7),  $|Y_*| \geq 2$  und  $|Y_0| \geq 2$ , so erreichen wir mit Hilfe der letzten Ungleichung den Widerspruch

$$\begin{aligned} \lambda(\overline{G}) &\geq |X_0||Y_0| + \frac{|X_R| + |Y_R|}{2} \\ &= |Y_0| + |Y_0|(|X_0| - 1) + \frac{|X_R| + |Y_R|}{2} - 1 + 1 + |X_*| - |X_*| \\ &\geq \delta(\overline{G}) + |Y_0|(|X_0| - 1) + 1 - |X_*| \\ &\geq \delta(\overline{G}) + |Y_0|(|X_*||Y_*| - |X_*| + 1) + 1 - |X_*| \\ &= \delta(\overline{G}) + |X_*|(|Y_0||Y_*| - |Y_0| - 1) + 1 + |Y_0| \\ &\geq \delta(\overline{G}) + |X_*|(2|Y_0| - |Y_0| - 1) + 1 + |Y_0| \\ &= \delta(\overline{G}) + |X_*|(|Y_0| - 1) + 1 + |Y_0| \\ &\geq \delta(\overline{G}) + |X_*|(2 - 1) + 1 + |Y_0| \\ &> \delta(\overline{G}). \end{aligned}$$

2. Fall: Es gelte  $\delta(\overline{G}) \leq |Y_*| + |X_0| + \frac{|X_R| + |Y_R|}{2} - 1$ . Wegen  $\lambda(G) \leq \delta(G) - 1$ , liefern (3) und (6)

$$|X_*||Y_*| + |Y_R| \leq \lambda(G) \leq \delta(G) - 1 \leq |Y_0| + |Y_R| + |Y_*| - 2$$

und daher

$$|X_*||Y_*| \leq |Y_0| + |Y_*| - 2,$$

also

$$|Y_0| - 1 \geq |X_*||Y_*| - |Y_*| + 1.$$

Aus (3), (7),  $|X_*| \geq 2$  und  $|X_0| \geq 2$  erzielen wir mit Hilfe dieser Ungleichung analog zum 1. Fall den Widerspruch

$$\begin{aligned} \lambda(\overline{G}) &\geq |X_0||Y_0| + \frac{|X_R| + |Y_R|}{2} \\ &= |X_0| + |Y_*| + \frac{|X_R| + |Y_R|}{2} - 1 - |Y_*| + |X_0|(|Y_0| - 1) + 1 \\ &\geq \delta(\overline{G}) + |X_0|(|Y_0| - 1) + 1 - |Y_*| \\ &\geq \delta(\overline{G}) + |Y_*|(|X_0||X_*| - |X_0| - 1) + 1 + |X_0| \\ &> \delta(\overline{G}). \end{aligned}$$

||

Weitere hinreichende Bedingungen für  $\lambda = \delta$  oder  $\sigma = \delta$  und entsprechende Resultate für Digraphen findet man in den nächsten Abschnitten, dem Übersichtsartikel von Fàbrega und Fiol [3] 2004, der Dissertation meiner Schülerin Dr. Angelika Hellwig [1] 2005 und z.B. in den Arbeiten von Goldsmith und White [1] 1978, Goldsmith und Entringer [1] 1979, Esfahanian [1] 1985, Soneoka, Nakada, Imase und Peyrat [1] 1987, Fàbrega und Fiol [1] 1989 und [2] 1996, Fiol [1] 1992 und [2] 1993, Dankelmann, Volkmann [3] 2000, Fricke, Oellermann, Swart [1] 2000, Balbuena, Carmona [1] 2001, Volkmann [15] 2003, [24, 28] sowie Hellwig, Volkmann [1] 2003, [2] 2004, [3], [4] 2005.

## 14.2 Ecken- und Bogenzusammenhang in Digraphen

**Definition 14.3.** Ein schlichter Digraph der Ordnung  $n$ , in dem je zwei beliebige Ecken auf einem 2-Kreis liegen heißt *vollständiger Digraph*  $K_n^*$ .

**Definition 14.4.** Ein nicht trivialer, stark zusammenhängender Multidigraph  $D$  heißt  *$q$ -fach stark zusammenhängend* ( $q \in \mathbb{N}$ ), wenn  $|E(D)| \geq q + 1$  und  $D - E'$  für alle  $E' \subseteq E(D)$  mit  $|E'| \leq q - 1$  stark zusammenhängend ist. Ist  $D$   $q$ -fach stark zusammenhängend, aber nicht  $(q + 1)$ -fach stark zusammenhängend, so heißt  $q = \sigma = \sigma(D)$  *starke Zusammenhangszahl* von  $D$ . Ist  $D$  nicht stark zusammenhängend, oder ist  $D$  der triviale Digraph, so heißt  $D$  *0-fach stark zusammenhängend*, und wir setzen  $\sigma(D) = 0$ .

Ein nicht trivialer, stark zusammenhängender Multidigraph  $D$  heißt  *$q$ -fach bogenzusammenhängend* ( $q \in \mathbb{N}$ ), wenn  $D - B'$  für alle  $B' \subseteq B(D)$  mit  $|B'| \leq q - 1$  stark zusammenhängend ist. Ist  $D$   $q$ -fach bogenzusammenhängend, aber nicht  $(q + 1)$ -fach bogenzusammenhängend, so heißt  $q = \lambda = \lambda(D)$  *Bogenzusammenhangszahl* von  $D$ . Ist  $D$  nicht stark zusammenhängend, oder ist  $D$  der triviale Digraph, so heißt  $D$  *0-fach bogenzusammenhängend*, und wir setzen  $\lambda(D) = 0$ .

**Bemerkung 14.7.** i) Nach Definition 14.4 gilt für jeden Multidigraphen  $D$ , dass  $\sigma(D) \leq n(D) - 1$ .

ii) Aus den Definitionen 14.3 und 14.4 erhält man  $\sigma(K_n^*) = \delta(K_n^*) = n - 1$ .

**Definition 14.5.** Ist  $D$  ein Multidigraph, und sind  $A$  und  $B$  zwei Teilmengen aus  $E(D)$ , so bedeute  $(A, B) = (A, B)_D$  die Menge der Bogen aus  $D$ , die ihre Anfangsecke in  $A$  und ihre Endecke in  $B$  besitzen. Weiter setzen wir  $m_D(A, B) = m(A, B) = |(A, B)|$ .

**Satz 14.10.** Ein Multidigraph  $D$  ist genau dann  $q$ -fach bogenzusammenhängend, wenn für alle  $S \subseteq E(D)$  mit  $S \neq E(D), \emptyset$  gilt:

$$m_D(S, \overline{S}) \geq q$$

*Beweis.* Es sei  $D$   $q$ -fach bogenzusammenhängend. Ist  $q = 0$ , so gibt es nichts zu beweisen. Daher sei nun  $q \geq 1$ . Angenommen, es gibt eine Eckenmenge  $S$  in  $D$  mit  $S \neq E(D), \emptyset$  und  $m_D(S, \overline{S}) = r < q$ . Entfernt man aus  $D$  die  $r$  Bogen von  $S$  nach  $\overline{S}$ , so ist der verbleibende Digraph nicht mehr stark zusammenhängend, was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet.

Nun gelte umgekehrt  $m_D(S, \overline{S}) \geq q$  für alle  $S \subseteq E(D)$  mit  $S \neq E(D), \emptyset$ . Ist  $q = 0$ , so sind wir fertig. Sei also  $q \geq 1$ . Angenommen, es existiert eine Bogenmenge  $B' \subseteq B(D)$  mit  $|B'| = r < q$ , so daß  $D' = D - B'$  nicht stark zusammenhängend ist. Dann gibt es eine Ecke  $a$  in  $D$ , so daß nicht alle Ecken in  $D'$  von  $a$  aus erreichbar sind. Es sei  $S = S(a)$  diejenige

Eckenmenge von  $E(D)$ , die in  $D'$  von  $a$  aus erreichbar ist. Insbesondere gilt  $a \in S$  und somit  $S \neq E(D), \emptyset$ . Nach Voraussetzung ist

$$m_{D'}(S, \bar{S}) \geq m_D(S, \bar{S}) - r \geq q - r \geq 1,$$

womit in  $D'$  mindestens ein Bogen von  $S$  nach  $\bar{S}$  existiert, was nach Definition von  $S$  aber nicht möglich ist. ||

**Definition 14.6.** Ist  $x$  eine Ecke des Digraphen  $D$ , so wird der *Eckengrad* oder *Grad* von  $x$  durch  $\delta(D) = \min\{d^+(x, D), d^-(x, D)\}$  definiert. Man nennt  $\delta(D) = \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$  bzw.  $\Delta(D) = \max\{\Delta^+(D), \Delta^-(D)\}$  *Minimalgrad* bzw. *Maximalgrad* von  $D$ .

Analog zum Beweis des Satzes 14.1 von Whitney kann man ein entsprechendes Resultat für Digraphen herleiten. In Anlehnung an den Beweis von Satz 14.8, wollen wir hier einen etwas längeren aber dafür durchsichtigeren Beweis vorstellen.

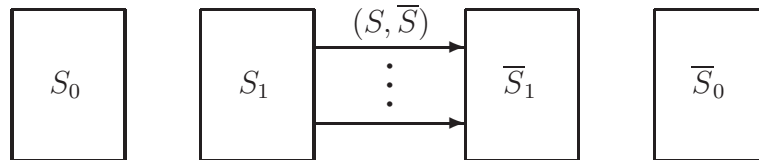
**Satz 14.11 (Geller, Harary [1] 1971).** Ist  $D$  ein Multidigraph, so gilt

$$\sigma(D) \leq \lambda(D) \leq \delta(D). \tag{14.3}$$

*Beweis.* Wir setzen  $\sigma(D) = \sigma$ ,  $\lambda(D) = \lambda$  und  $\delta(D) = \delta$ . Ist  $D$  nicht stark zusammenhängend, oder ist  $D$  der triviale Digraph, so gilt nach Definition 14.4  $\sigma = \lambda = 0$ , womit (14.3) erfüllt ist. Daher sei im folgenden  $D$  stark zusammenhängend mit  $|E(D)| \geq 2$ . Natürlich gilt  $\lambda \leq \delta$ .

Um  $\sigma \leq \lambda$  zu beweisen, können wir o.B.d.A.  $D$  als schlicht voraussetzen. Denn entfernt man aus einem Digraphen alle parallelen Bogen, so bleibt die starke Zusammenhangszahl unverändert, während die Bogenzusammenhangszahl kleiner werden kann.

Wegen Satz 14.10 existiert eine Menge  $S \subset E(D)$  mit  $m(S, \bar{S}) = \lambda \geq 1$ . Nun seien  $S_1 \subseteq S$  und  $\bar{S}_1 \subseteq \bar{S}$  diejenigen Eckenmengen, die mit den Bogen aus  $(S, \bar{S})$  inzidieren und  $S_0 = S - S_1$  sowie  $\bar{S}_0 = \bar{S} - \bar{S}_1$  (man vgl. die Skizze). Es gilt natürlich  $|S_1|, |\bar{S}_1| \leq \lambda$ .



1. *Fall:* Es gelte  $S_0 \neq \emptyset$  oder  $\bar{S}_0 \neq \emptyset$ . Ist o.B.d.A.  $S_0 \neq \emptyset$ , so ist  $D - S_1$  nicht mehr stark zusammenhängend, also  $\sigma \leq |S_1| \leq \lambda$ .

2. *Fall:* Es gelte  $S_0 = \bar{S}_0 = \emptyset$ . Ist  $m(S, \bar{S}) = |S_1||\bar{S}_1|$ , so ergibt sich  $\lambda = m(S, \bar{S}) = |S_1||\bar{S}_1| \geq n - 1 \geq \sigma$ . Ist  $m(S, \bar{S}) \neq |S_1||\bar{S}_1|$ , so fehlt ein Bogen  $uv$  von  $S_1$  nach  $\bar{S}_1$ . Dann ist  $D - N^+(u, D)$  nicht stark zusammenhängend, und es folgt

$$\begin{aligned} \sigma &\leq |N^+(u, D)| = |N^+(u, D) \cap \bar{S}_1| + |N^+(u, D) \cap S_1| \\ &\leq |N^+(u, D) \cap \bar{S}_1| + \sum_{x \in N^+(u, D) \cap S_1} |N^+(x, D) \cap \bar{S}_1| \\ &\leq \sum_{x \in S_1} |N^+(x, D) \cap \bar{S}_1| = \lambda. \end{aligned} \quad ||$$

**Definition 14.7.** Es sei  $G$  ein Multigraph. Ersetzt man in  $G$  jede Kante durch zwei entgegengesetzt gerichtete Bogen, so erhält man einen eindeutig definierten Multidigraphen  $D(G)$ .  $D(G)$  heißt der dem Graphen  $G$  zugeordnete Digraph.



**Satz 14.12.** Ist  $G$  ein Multigraph, so gilt:

- i) Es gibt eine bijektive Zuordnung der Wege von  $G$  (mit Berücksichtigung des Anfangspunktes gemäß Definition 1.9) zu den orientierten Wegen von  $D(G)$ .
- ii)  $\sigma(G) = \sigma(D(G))$ .
- iii)  $\lambda(G) = \lambda(D(G))$ .

*Beweis.* i) Nach Definition von  $D(G)$  ist die Aussage klar.

ii) Für  $E' \subseteq E(G) = E(D(G))$  ergibt sich  $\sigma(G) = \sigma(D(G))$  aus der Tatsache, daß  $G - E'$  genau dann zusammenhängend ist, wenn  $D(G) - E'$  stark zusammenhängend ist.

iii) Ist  $G$   $q$ -fach kantenzusammenhängend, so gilt für alle  $S \subseteq E(G)$  mit  $S \neq E(G), \emptyset$  nach Satz 14.3 die Abschätzung  $m_G(S, \overline{S}) \geq q$ . Aus der Definition von  $D(G)$  folgt dann wegen  $E(G) = E(D(G))$  sofort  $m_{D(G)}(S, \overline{S}) \geq q$  und daher zusammen mit Satz 14.10 der  $q$ -fache Bogenzusammenhang von  $D(G)$ . Analog zeigt man die umgekehrte Richtung, womit auch iii) bewiesen ist. ||

**Bemerkung 14.8.** Aus den Sätzen 14.11 und 14.12 ergibt sich sofort Satz 14.1 von Whitney, denn ist  $D(G)$  der dem Graphen  $G$  zugeordnete Digraph, so gilt  $\sigma(G) = \sigma(D(G))$ ,  $\lambda(G) = \lambda(D(G))$  und  $\delta(G) = \delta(D(G))$ .

**Definition 14.8.** Ist  $D$  ein Digraph mit den Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so heißt die Folge der Eckengrade  $d(x_1, D), d(x_2, D), \dots, d(x_n, D)$  *Gradsequenz* von  $D$ . Eine Folge  $d_1, d_2, \dots, d_n$  nicht negativer ganzer Zahlen nennt man auch *Gradsequenz*, wenn ein Digraph  $D$  existiert, der diese Folge als Gradsequenz besitzt.

**Satz 14.13 (Dankelmann, Volkmann [2] 1997).** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph der Ordnung  $n$  mit der Gradsequenz  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta(D) = \delta$  und der Bogenzusammenhangszahl  $\lambda(D) = \lambda$ . Ist  $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$  oder ist  $\delta \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$  und

$$\sum_{i=1}^p (d_i + d_{n+i-\delta-1}) \geq p(n-2) + 2\delta - 1$$

für ein  $p$  mit  $1 \leq p \leq \delta$ , so gilt  $\lambda = \delta$ .

*Beweis.* Angenommen, es gilt  $\lambda < \delta$ . Dann existiert nach Satz 14.10 eine Eckenmenge  $X \neq E(D), \emptyset$  mit  $m(X, \overline{X}) < \delta$ .

Analog zum Beweis von Satz 14.4 (Chartrand) zeigen wir zunächst, daß  $X$  und  $\overline{X}$  mindestens  $\delta + 1$  Ecken enthalten, und somit  $\delta \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$  gelten muß.

Enthält o.B.d.A.  $X$  höchstens  $\delta$  Elemente, so ergibt sich der Widerspruch

$$|X|\delta \leq \sum_{x \in X} d^+(x, D) \leq |X|(|X| - 1) + m(X, \overline{X}) < \delta(|X| - 1) + \delta = |X|\delta.$$

Sind  $S \subset X$  und  $T \subset \overline{X}$  zwei Mengen mit  $p$  Elementen für  $1 \leq p \leq \delta$ , so folgt

$$\sum_{v \in S} d^+(v, D) \leq p(|X| - 1) + \delta - 1,$$

$$\sum_{v \in T} d^-(v, D) \leq p(|\overline{X}| - 1) + \delta - 1.$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{v \in S \cup T} d(v, D) \leq p(n-2) + 2\delta - 2.$$

Wählt man  $S$  und  $T$  so, daß  $S \cup T$  die  $p$  Ecken höchsten Grades aber nicht die  $\delta + 1 - p$  Ecken kleinsten Grades enthält, so ergibt sich folgender Widerspruch zur Voraussetzung:

$$\begin{aligned} p(n-2) + 2\delta - 2 &\geq \sum_{v \in S \cup T} d(v, D) \geq \sum_{i=1}^p (d_i + d_{n+i-\delta-1}) \\ &\geq p(n-2) + 2\delta - 1. \end{aligned} \quad \parallel$$

**Folgerung 14.2 (Xu [1] 1994).** Sei  $D$  ein schlichter Digraph der Ordnung  $n$ , der Bogenzusammenhangszahl  $\lambda$  und vom Minimalgrad  $\delta$ . Existieren  $\lfloor n/2 \rfloor$  disjunkte Paare  $\{v_i, w_i\}$  von Ecken mit

$$d(v_i, D) + d(w_i, D) \geq n$$

für alle  $i = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ , so gilt  $\lambda = \delta$ .

*Beweis.* Ist  $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$ , so gilt  $\lambda = \delta$  nach Satz 14.13. Ist  $\delta \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$ , so wähle man von den  $\lfloor n/2 \rfloor$  Paaren  $\{v_i, w_i\}$  diejenigen Paare  $\{v'_1, w'_1\}, \{v'_2, w'_2\}, \dots, \{v'_\delta, w'_\delta\}$  mit den  $\delta$  kleinsten Eckengraden aus. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{\delta} (d_i + d_{n+i-\delta-1}) \geq \sum_{i=1}^{\delta} (d(v'_i, D) + d(w'_i, D)) \geq \delta n > \delta(n-2) + 2\delta - 1.$$

Nun liefert Satz 14.13 mit  $p = \delta$  das gewünschte Ergebnis. ||

**Folgerung 14.3 (Dankelmann, Volkmann [2] 1997).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit der Gradsequenz  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta$  und  $\lambda(G) = \lambda$ . Ist  $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$  oder ist  $\delta \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$  und

$$\sum_{i=1}^p (d_i + d_{n+i-\delta-1}) \geq p(n-2) + 2\delta - 1$$

für ein  $p$  mit  $1 \leq p \leq \delta$ , so gilt  $\lambda = \delta$ .

*Beweis.* Ist  $D(G)$  der dem Graphen  $G$  zugeordnete Digraph, so stimmen die Gradsequenzen von  $G$  und  $D(G)$  überein, und nach Satz 14.12 gilt  $\lambda(G) = \lambda(D(G))$ . Damit liefert Satz 14.13 das Ergebnis. ||

**Folgerung 14.4 (Bollobás [1] 1979).** Sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  mit der Gradsequenz  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta$  und  $\lambda(G) = \lambda$ . Erfüllt jede natürliche Zahl  $q$  mit  $q \leq \min\{n/2 - 1, \delta\}$  die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^q (d_i + d_{n-i}) \geq qn - 1,$$

so gilt  $\lambda = \delta$ .

Das nächste Beispiel zeigt, daß Folgerung 14.13 und Satz 14.13 bestmöglich sind.

**Beispiel 14.3.** Seien  $H_1$  und  $H_2$  zwei Kopien des vollständigen Graphen  $K_t$  mit  $t \geq 3$  und  $E(H_1) = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$  sowie  $E(H_2) = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$ . Nun bestehe  $G$  aus der Vereinigung von  $H_1$  und  $H_2$  sowie den Kanten  $x_1y_1, x_1y_2, \dots, x_1y_{t-2}$ .

Dann gilt  $n(G) = n = 2t$ ,  $\delta(G) = \delta = t - 1 = n/2 - 1$ ,  $\lambda(G) = t - 2$  und

$$\sum_{i=1}^{\delta} (d_i + d_{n+i-\delta-1}) = 2t(t - 1) - 2 = \delta(n - 2) + 2\delta - 2.$$

Nun wollen wir nachweisen, daß Satz 14.8 für Digraphen erhalten bleibt. Zur Herleitung dieses Resultates benötigen wir folgende Definition.

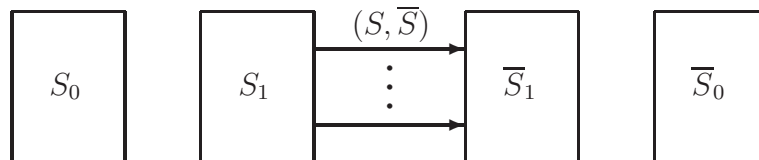
**Definition 14.9.** Ist  $D$  ein Digraph und  $X, Y \subseteq E(D)$ , so wird der *Abstand* von  $X$  nach  $Y$  durch

$$d(X, Y) = d_D(X, Y) = \min\{d_D(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

definiert. Ein Paar  $X, Y \subseteq E(D)$  mit  $d_D(X, Y) = p > 0$  nennen wir *p-abstandsmaximal*, wenn keine Eckenmengen  $A \supseteq X$  und  $B \supseteq Y$  mit  $A \neq X$  oder  $B \neq Y$  existieren, so daß  $d_D(A, B) = p$  gilt.

**Satz 14.14 (Hellwig, Volkmann [1] 2003).** Es sei  $D$  ein schlichter, stark zusammenhängender Digraph. Wenn für alle 3-abstandsmaximalen Eckenpaare  $X, Y \subseteq E(D)$  der induzierte Digraph  $D[X \cup Y]$  eine isolierte Ecke enthält, so gilt  $\lambda = \lambda(D) = \delta(D) = \delta$ .

*Beweis.* Im Fall  $n(D) = 1$  gibt es nichts zu beweisen. Ist  $n(D) \geq 2$ , so nehmen wir an, daß  $\lambda < \delta$  gilt. Wegen Satz 14.10 existiert eine Menge  $S \subset E(D)$  mit  $m(S, \bar{S}) = \lambda \geq 1$ . Nun seien  $S_1 \subseteq S$  und  $\bar{S}_1 \subseteq \bar{S}$  diejenigen Eckenmengen, die mit den Bogen aus  $(S, \bar{S})$  inzidieren und  $S_0 = S - S_1$  sowie  $\bar{S}_0 = \bar{S} - \bar{S}_1$  (man vgl. die Skizze). Es gilt natürlich  $|S_1|, |\bar{S}_1| \leq \lambda < \delta$ .



1. *Fall:* Es gelte  $S_0, \bar{S}_0 \neq \emptyset$ . Nach Konstruktion beträgt der Abstand von  $S_0$  nach  $\bar{S}_0$  mindestens 3. Nun wählen wir ein 3-abstandsmaximales Paar  $X, Y \subset E(D)$  mit  $S_0 \subseteq X$  und  $\bar{S}_0 \subseteq Y$ . Nach Voraussetzung enthält  $D[X \cup Y]$  eine isolierte Ecke  $u$ .

Ist  $u \in S_0$ , so erhalten wir den Widerspruch  $\delta \leq |N^+(u, D)| \leq |S_1| < \delta$ .

Ist  $u \in S_1$ , so erhalten wir den Widerspruch

$$\begin{aligned} \delta &\leq |N^+(u, D)| = |N^+(u, D) \cap \bar{S}_1| + |N^+(u, D) \cap S_1| \\ &\leq |N^+(u, D) \cap \bar{S}_1| + \sum_{x \in N^+(u, D) \cap S_1} |N^+(x, D) \cap \bar{S}_1| \\ &\leq \sum_{x \in S_1} |N^+(x, D) \cap \bar{S}_1| = \lambda < \delta. \end{aligned}$$

Ist  $u \in \overline{S}_1$ , so erhalten wir den Widerspruch

$$\begin{aligned} \delta &\leq |N^-(u, D)| = |N^-(u, D) \cap S_1| + |N^-(u, D) \cap \overline{S}_1| \\ &\leq |N^-(u, D) \cap S_1| + \sum_{x \in N^-(u, D) \cap \overline{S}_1} |N^-(x, D) \cap S_1| \\ &\leq \sum_{x \in \overline{S}_1} |N^-(x, D) \cap S_1| = \lambda < \delta. \end{aligned}$$

Ist  $u \in \overline{S}_0$ , so erhalten wir den Widerspruch  $\delta \leq |N^-(u, D)| \leq |\overline{S}_1| < \delta$ .

2. *Fall:* Es gelte  $S_0 = \emptyset$  oder  $\overline{S}_0 = \emptyset$ . Ist  $S_0 = \emptyset$ , so erhält man analog zum Fall  $u \in S_1$  für eine beliebige Ecke  $a \in S_1 = S$  den Widerspruch  $\delta \leq |N^+(a, D)| \leq \lambda < \delta$ . Ist  $\overline{S}_0 = \emptyset$ , so erhält man analog zum Fall  $u \in \overline{S}_1$  für eine beliebige Ecke  $a \in \overline{S}_1 = \overline{S}$  den Widerspruch  $\delta \leq |N^-(a, D)| \leq \lambda < \delta$ . ||

Betrachtet man wieder den zugeordneten Digraphen  $G(D)$ , so erkennt man, daß Satz 14.8 sofort aus den Sätzen 14.12 und 14.14 folgt. Darüber hinaus ergibt sich aus Satz 14.14 auch ein älteres Ergebnis von Jolivet [1], das den Satz 14.6 von Plesnik umfaßt.

**Folgerung 14.5 (Jolivet [1] 1972).** Ist  $D$  ein schlichter und stark zusammenhängender Digraph vom Durchmesser  $\text{dm}(D) \leq 2$ , so gilt  $\lambda(D) = \delta(D)$ .

**Satz 14.15 (Hellwig, Volkmann [7] 2006).** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph der Ordnung  $n \geq 4$  mit starker Zusammenhangszahl  $\sigma$  und Gradsequenz  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta$ . Ist  $\sigma \leq \delta - p$  für eine ganze Zahl  $p$  mit  $1 \leq p \leq \delta$ , so gilt

$$\sigma \geq \frac{1}{p+1} \left( \sum_{i=0}^{2p+1} d_{n-i} \right) + 2 - n. \quad (14.4)$$

*Beweis.* Wegen der Voraussetzung  $\sigma \leq \delta - 1$  ist  $D$  nicht vollständig. Daher existiert eine Eckenmenge  $S$  mit  $|S| = \sigma$ , so daß  $D - S$  nicht mehr stark zusammenhängend ist. Nach Satz 1.27 gibt es mindestens eine starke Zusammenhangskomponente  $D^*$  von  $D - S$ , so daß es keinen Bogen von  $D^*$  nach  $D - (E(D^*) \cup S)$  gibt. Nun sei  $X = E(D^*)$  und  $Y = E(D - (X \cup S))$ .

Zunächst zeigen wir, daß  $X$  und  $Y$  aus mindestens  $p + 1$  Ecken bestehen. Angenommen, es gilt  $|X| \leq p$ . Da es keinen Bogen von  $X$  nach  $Y$  gibt, folgt für jede Ecke  $v$  aus  $X$

$$\delta \leq d^+(v) \leq |X| - 1 + |S| \leq p - 1 + \sigma$$

und damit  $\sigma \geq \delta - p + 1$ . Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung  $\sigma \leq \delta - p$ . Ebenso zeigt man  $|Y| \geq p + 1$ .

Wählt man  $U \subseteq X$  und  $W \subseteq Y$  mit  $|U| = |W| = p + 1$ , so erhält man

$$\sum_{u \in U} d^+(u) \leq (p+1)(|X| - 1 + |S|),$$

$$\sum_{w \in W} d^-(w) \leq (p+1)(|Y| - 1 + |S|).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2p+1} d_{n-i} &\leq \sum_{v \in U \cup W} d(v) \leq \sum_{v \in U} d^+(v) + \sum_{v \in W} d^-(v) \\ &\leq (p+1)(|X| + |Y|) + 2(p+1)|S| - 2(p+1) \\ &= (p+1)(n - |S|) + 2(p+1)|S| - 2(p+1) \\ &= (p+1)n + (p+1)\sigma - 2(p+1). \end{aligned}$$

Dies führt nun unmittelbar zu (14.4) und damit ist Satz 14.15 bewiesen. ||

Natürlich folgt daraus sofort die Graphenversion von Satz 14.15, die wir hier nicht formulieren wollen. Außerdem ergibt sich aus Satz 14.15 die Digraphenversion von Satz 14.2.

**Folgerung 14.6 (Geller, Harary [1] 1971).** Ist  $D$  ein schlichter nicht vollständiger Digraph, so gilt

$$\sigma(D) \geq 2\delta(D) + 2 - n(D). \tag{14.5}$$

*Beweis.* Für  $n = n(D) \leq 3$  ist (14.5) natürlich richtig. Sei nun  $n \geq 4$ ,  $\delta = \delta(D)$  und  $\sigma = \sigma(D)$ . Da  $D$  nicht vollständig ist, gilt  $d_n = \delta \leq n - 2$ . Ist  $\sigma = \delta$ , so ergibt sich daraus sofort (14.5). Ist  $\sigma \leq \delta - 1$ , so folgt aus (14.4) für  $p = 1$

$$\sigma \geq \frac{d_n + d_{n-1} + d_{n-2} + d_{n-3}}{2} + 2 - n \geq \frac{4\delta}{2} + 2 - n = 2\delta + 2 - n. \tag{||}$$

Weitere Ergebnisse dieser Art findet der Leser im Abschnitt 14.4 und in dem Übersichtsartikel "Maximally edge-connected and vertex-connected graphs and digraphs: A survey" von Hellwig und Volkmann [9] aus dem Jahre 2008.

Der im Kapitel 1 bewiesene Satz von Robbins [1] (Satz 1.26) folgt induktiv aus dem nächsten Resultat, das sich mit sogenannten gemischten Graphen beschäftigt, die wir in der folgenden Definition kurz erklären werden.

**Definition 14.10.** Ein *gemischter Graph*  $Q = (E(Q), K(Q))$  besteht aus einer Eckenmenge  $E(Q)$  und einer Menge von Kanten oder Bogen  $K(Q)$ .

$$W = (a_0, k_1, a_1, k_2, a_2, \dots, a_{i-1}, k_i, a_i, \dots, k_s, a_s)$$

heißt *orientierter Weg* von  $Q$ , wenn die Ecken  $a_i$  paarweise verschieden sind, und  $k_i$  eine Kante oder ein Bogen von  $a_{i-1}$  nach  $a_i$  ist.  $Q$  heißt *stark zusammenhängend*, wenn für je zwei Ecken  $a, b$  ein orientierter Weg von  $a$  nach  $b$  und von  $b$  nach  $a$  existiert.

**Satz 14.16 (Boesch, Tindell [1] 1980).** Es sei  $Q$  ein stark zusammenhängender gemischter Graph ohne Schlingen und  $k$  eine Kante von  $Q$ . Die Kante  $k$  kann genau dann so orientiert werden, daß der daraus neu entstehende gemischte Graph wieder stark zusammenhängend ist, wenn  $k$  keine Brücke des untergeordneten Graphen  $G$  von  $Q$  ist.

*Beweis.* Die angegebene Bedingung ist offensichtlich notwendig. Für die Umkehrung nehmen wir an, daß keine Orientierung von  $k = ab$  zu einem stark zusammenhängenden gemischten Graphen führt. Dann bleibt zu zeigen, daß  $k$  eine Brücke von  $G$  ist.

Setzt man  $H = Q - k$ , so gibt es wegen unserer Annahme in  $H$  keinen orientierten Weg von  $a$  nach  $b$  und keinen orientierten Weg von  $b$  nach  $a$ . Ist  $S = S(a)$  diejenige Eckenmenge

von  $E(Q)$ , die man in  $H$  durch einen orientierten Weg von  $a$  aus erreichen kann, so gibt es in  $H$  für alle  $x \in S$  auch einen orientierten Weg von  $x$  nach  $a$ . Denn nach Voraussetzung existiert in  $Q$  ein orientierter Weg von  $x$  nach  $a$ . Würde  $k$  zu diesem Weg gehören, so gäbe es in  $H$  einen orientierten Weg von  $a$  über  $x$  nach  $b$ , im Widerspruch zur obigen Aussage.

Wegen  $b \in \overline{S}$  ist  $\overline{S} \neq \emptyset$ , und zu jeder Ecke  $y$  aus  $\overline{S}$  existiert in  $H$  ein orientierter Weg von  $b$  nach  $y$ . Denn in  $Q$  gibt es einen orientierten Weg von  $b$  nach  $y$ . Dieser Weg kann die Kante  $k$  nicht enthalten, weil sonst  $y \in S$  gelten würde.

Nach diesen Überlegungen zeigen wir, daß  $k$  die einzige Kante des untergeordneten Graphen  $G$  ist, die von  $S$  nach  $\overline{S}$  geht.

Denn nach Definition von  $S$  kann es in  $H$  keine Kante und keinen Bogen von  $S$  nach  $\overline{S}$  geben. Würde in  $H$  ein Bogen von  $\overline{S}$  nach  $S$  existieren, so gäbe es in  $H$  auch einen Weg von  $b$  nach  $a$ , was aber nicht möglich ist. ||

Im Jahre 1960 gab Nash-Williams folgende tiefliegende Verallgemeinerung des Satzes von Robbins.

**Satz 14.17 (Nash-Williams [1] 1960).** Ist  $G$  ein  $2p$ -fach kantenzusammenhängender Multigraph ( $p \in \mathbb{N}$ ), so besitzt  $G$  eine  $p$ -fach bogenzusammenhängende Orientierung.

Für eine weitere Verallgemeinerung dieses Resultats vgl. man Mader [4] 1978. Da der Beweis des Satzes von Nash-Williams sehr lang und kompliziert ist, begnügen wir uns hier mit dem Beweis eines kleinen Spezialfalles, der uns gleichzeitig eine Methode liefert, eine solche Orientierung zu konstruieren.

**Satz 14.18.** Es seien  $q, s \in \mathbb{N}$  mit  $s - 1 \leq \frac{q}{2}$ . Ist  $G$  ein  $q$ -fach kantenzusammenhängender Multigraph mit  $2s$  Ecken ungeraden Grades, so besitzt  $G$  eine  $(\lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 1 - s)$ -fach bogenzusammenhängende Orientierung.

*Beweis.* Verbindet man  $2(s-1)$  Ecken ungeraden Grades paarweise durch  $s-1$  neue Kanten, so entsteht ein semi-Eulerscher Multigraph  $H$ . Es sei  $(a_0, k_1, a_1, \dots, k_m, a_m)$  ein Eulerscher Kantenzug von  $H$ . Gibt man jeder Kante  $k_i$  die Orientierung  $\tilde{k}_i = (a_{i-1}, a_i)$  für  $1 \leq i \leq m$ , so erhalten wir eine Orientierung  $R$  von  $H$ . Ist  $S \subseteq E(G)$  mit  $S \neq E(G), \emptyset$ , so gilt nach Voraussetzung und Satz 14.3

$$m_H(S, \overline{S}) \geq m_G(S, \overline{S}) = r \geq q.$$

Ist nun  $(a_0, \tilde{k}_1, a_1, \dots, \tilde{k}_m, a_m)$  der entsprechende orientierte Eulersche Kantenzug von  $R$ , so erkennt man, daß die Anzahl der Bogen von  $S$  nach  $\overline{S}$  und  $\overline{S}$  nach  $S$  sich maximal um 1 unterscheiden kann. Daraus ergibt sich sofort

$$m_R(S, \overline{S}) \geq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor.$$

Entfernt man aus  $R$  die  $s-1$  Bogen, die den  $s-1$  hinzugefügten Kanten entsprechen, so erhält man eine Orientierung  $D$  von  $G$  mit

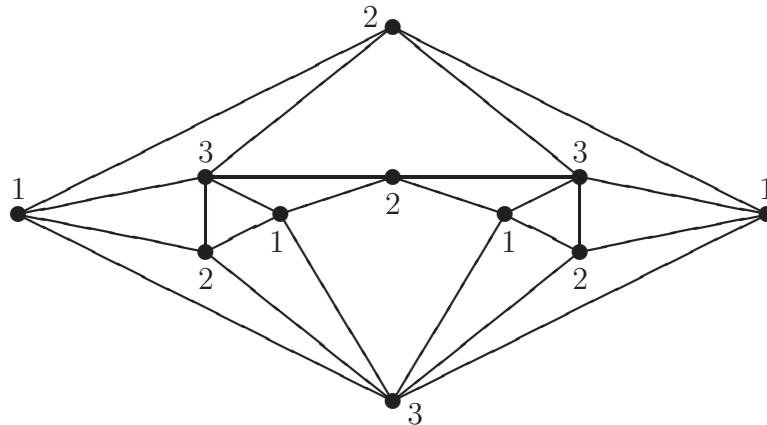
$$m_D(S, \overline{S}) \geq m_R(S, \overline{S}) - (s-1) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 - s \geq 0,$$

womit die Orientierung  $D$  von  $G$  nach Satz 14.10  $(\lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 1 - s)$ -fach bogenzusammenhängend ist. ||

Setzt man in Satz 14.18  $q = 2p$  und  $s = 1$ , so erhält man den angekündigten Spezialfall des Satzes von Nash-Williams.

**Folgerung 14.7.** Es sei  $G$  ein  $2p$ -fach kantenzusammenhängender und semi-Eulerscher Multigraph. Dann besitzt  $G$  eine  $p$ -fach bogenzusammenhängende Orientierung  $D$ .

**Beispiel 14.4.** Gegeben sei der skizzierte schlichte, semi-Eulersche Graph  $G$  mit  $\delta(G) = 4$ .



Die angegebene Eckenfärbung zeigt, daß  $\chi(G) = 3$  gilt, womit der Graph 3-partit ist. Nach Folgerung 14.11 (siehe Abschnitt 14.4) ist  $G$  dann 4-fach kantenzusammenhängend. Wegen Folgerung 14.7 besitzt  $G$  eine 2-fach bogenzusammenhängende Orientierung  $D$ . Eine solche Orientierung ergibt sich unmittelbar aus einem Eulerschen Kantenzug von  $G$ .

### 14.3 Die Mengerschen Sätze

**Definition 14.11.** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph und  $a, b$  zwei verschiedene Ecken von  $D$ . Zwei orientierte Wege von  $a$  nach  $b$  heißen *kreuzungsfrei* in  $D$ , falls sie außer  $a$  und  $b$  keine weitere gemeinsame Ecke besitzen. Liegen  $p$  orientierte Wege ( $p \geq 3$ ) von  $a$  nach  $b$  vor, so heißen diese *kreuzungsfrei*, wenn sie paarweise kreuzungsfrei sind.

Gehört der Bogen  $(a, b)$  nicht zu  $D$ , so heißt  $b$  von  $a$  aus  $q$ -fach erreichbar in  $D$  ( $q \in \mathbb{N}$ ), wenn für alle  $S \subseteq E(D) - \{a, b\}$  mit  $|S| \leq q - 1$  die Ecke  $b$  in  $D - S$  von  $a$  aus erreichbar ist. Gibt es in  $D$  keinen orientierten Weg von  $a$  nach  $b$ , so ist  $b$  von  $a$  aus 0-fach erreichbar.

Von den folgenden 8 Sätzen wurden Satz 14.20 von Menger [1] 1927 und Satz 14.22 von Whitney [2] 1932 publiziert. Wegen der Ähnlichkeit und Verwandtheit dieser Sätze, und da Menger als erster ein solches Resultat veröffentlicht hat, nennt man heute alle diese Ergebnisse "Mengersche Sätze".

**Satz 14.19.** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph und  $a, b$  zwei verschiedene Ecken von  $D$ , die durch keinen Bogen  $(a, b)$  verbunden sind. Die Ecke  $b$  ist genau dann von  $a$  aus  $q$ -fach erreichbar in  $D$ , wenn es  $q$  kreuzungsfreie orientierte Wege von  $a$  nach  $b$  in  $D$  gibt.

*Beweis* (McCuaig [1] 1984). Gibt es  $q$  kreuzungsfreie orientierte Wege von  $a$  nach  $b$ , so ist  $b$  von  $a$  aus  $q$ -fach erreichbar. Denn entfernt man aus  $D$  eine Eckenmenge  $S \subseteq E(D) - \{a, b\}$  mit  $|S| \leq q - 1$ , so bleibt mindestens einer der  $q$  kreuzungsfreien orientierten Wege von  $a$  nach  $b$  erhalten.



Die Umkehrung beweisen wir durch vollständige Induktion nach  $q$ , wobei die Aussage für  $q = 0, 1$  sofort ersichtlich ist.

Ist  $b$  von  $a$  aus  $(q + 1)$ -fach erreichbar, so existieren nach Induktionsvoraussetzung  $q$  kreuzungsfreie orientierte Wege  $P_1, P_2, \dots, P_q$  von  $a$  nach  $b$  in  $D$ . Es sei  $A$  die Menge der Ecken, die auf den  $q$  Wegen  $P_1, P_2, \dots, P_q$  der Ecke  $a$  unmittelbar folgen. Dann ist  $|A| = q$ , und da es keinen Bogen  $(a, b)$  gibt, ist  $b \in E(D) - A$ , und die Ecke  $b$  ist in  $D - A$  von  $a$  aus erreichbar. Es sei  $P$  ein orientierter Weg von  $a$  nach  $b$  in  $D - A$  und  $x \neq a$  die erste Ecke von  $P$ , die auch auf einem Weg  $P_i$  liegt ( $1 \leq i \leq q$ ). Mit  $P_{q+1}$  bezeichnen wir den  $(a, x)$ -Abschnitt des orientierten Weges  $P$ .

Nun seien  $P_1, P_2, \dots, P_q, P$  so gewählt, daß der Abstand von  $x$  nach  $b$  in  $D - a$  minimal ist. Ist  $x = b$ , so sind wir fertig. Also nehmen wir an, daß  $x \neq b$  gilt.

In  $D - x$  ist  $b$  von  $a$  aus  $q$ -fach erreichbar, womit nach Induktionsvoraussetzung  $q$  kreuzungsfreie orientierte Wege  $W_1, W_2, \dots, W_q$  von  $a$  nach  $b$  in  $D - x$  existieren. Wir wählen die orientierten Wege  $W_1, W_2, \dots, W_q$  so, daß der folgende Ausdruck minimal wird.

$$\left| \left( \bigcup_{i=1}^q B(W_i) \right) \cap \left( B(D) - \bigcup_{i=1}^{q+1} B(P_i) \right) \right|$$

Der Digraph  $Q$  bestehe aus allen Ecken und Bogen von  $W_1, W_2, \dots, W_q$  und der Ecke  $x$ . Nun wählen wir einen orientierten Weg  $P_j$  ( $1 \leq j \leq q + 1$ ), dessen erster Bogen nicht zu  $B(Q)$  gehört, und es sei  $y \neq a$  die erste Ecke von  $P_j$ , die zu  $E(Q)$  gehört. Ist  $y = b$ , so sind wir fertig. Annahme,  $y \neq b$ . Im folgenden werden wir zeigen, daß dieser Fall nicht eintreten kann.

Ist  $y = x$ , so sei  $V$  der kürzeste orientierte Weg von  $x$  nach  $b$  in  $D - a$  und  $z$  die erste Ecke von  $V$  auf einem orientierten Weg  $W_i$ . Dann ist aber in  $D - a$  der Abstand von  $z$  zu  $b$  geringer als der Abstand von  $x$  zu  $b$ , womit wir einen Widerspruch zur Wahl der Wege  $P_1, P_2, \dots, P_q, P$  erzeugt haben.

Ist  $y \in E(W_r)$  für ein  $1 \leq r \leq q$ , so liegt auf dem  $(a, y)$ -Abschnitt von  $W_r$  ein Bogen, der zu keinem  $P_1, P_2, \dots, P_{q+1}$  gehört, denn sonst hätten zwei orientierte Wege aus  $\{P_1, P_2, \dots, P_{q+1}\}$  die Ecke  $y$  gemeinsam, die nicht zu der Menge  $\{a, b, x\}$  gehört. Ersetzen wir den  $(a, y)$ -Abschnitt von  $W_r$  durch den  $(a, y)$ -Abschnitt von  $P_j$ , so erhalten wir einen Widerspruch zur Wahl der Wege  $W_1, W_2, \dots, W_q$ . ||

**Definition 14.12.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $a, b$  zwei verschiedene Ecken aus  $G$ . Zwei Wege von  $a$  nach  $b$  heißen *kreuzungsfrei* in  $G$ , falls sie außer  $a$  und  $b$  keine weitere gemeinsame Ecke besitzen. Liegen  $p$  Wege ( $p \geq 3$ ) von  $a$  nach  $b$  vor, so heißen diese *kreuzungsfrei*, wenn sie paarweise kreuzungsfrei sind.

Sind  $a, b$  nicht adjazent, so heißen  $a$  und  $b$   *$q$ -fach zusammenhängend* in  $G$  ( $q \in \mathbb{N}$ ), wenn für alle  $S \subseteq E(G) - \{a, b\}$  mit  $|S| \leq q - 1$  ein Weg von  $a$  nach  $b$  in  $G - S$  existiert. Gibt es in  $G$  keinen Weg von  $a$  nach  $b$ , so sind die beiden Ecken *0-fach zusammenhängend* in  $G$ .

Mit Hilfe der Sätze 14.12 und 14.19 können wir leicht die ungerichtete Version des Mengerschen Satzes 14.19 beweisen.

**Satz 14.20.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $a, b$  zwei verschiedene, nicht adjazente Ecken von  $G$ . Die Ecken  $a$  und  $b$  sind genau dann  $q$ -fach zusammenhängend in  $G$ , wenn es  $q$  kreuzungsfreie Wege von  $a$  nach  $b$  in  $G$  gibt.

*Beweis.* Gibt es  $q$  kreuzungsfreie Wege von  $a$  nach  $b$ , so sind  $a$  und  $b$  natürlich  $q$ -fach zusammenhängend.

Sind umgekehrt die Ecken  $a$  und  $b$  in  $G$   $q$ -fach zusammenhängend, so sei  $D(G)$  der dem Graphen  $G$  zugeordnete Digraph. Da  $a$  und  $b$  in  $G$  nicht adjazent sind, gibt es in  $D(G)$  keinen Bogen  $(a, b)$  und keinen Bogen  $(b, a)$ . Wegen Satz 14.12 ist die Ecke  $b$  in  $D(G)$  von  $a$  aus  $q$ -fach erreichbar. Damit existieren nach Satz 14.19  $q$  kreuzungsfreie, orientierte Wege von  $a$  nach  $b$  in  $D(G)$  und daher wieder nach Satz 14.12  $q$  kreuzungsfreie Wege von  $a$  nach  $b$  in  $G$ . ||

**Satz 14.21.** Es sei  $q \in \mathbb{N}$  und  $D$  ein schlichter Digraph der Ordnung  $|E(D)| \geq q + 1$ .  $D$  ist genau dann  $q$ -fach stark zusammenhängend, wenn zwischen je zwei Ecken  $q$  kreuzungsfreie orientierte Wege existieren.

*Beweis.* Zunächst gebe es zwischen je zwei Ecken mindestens  $q$  kreuzungsfreie orientierte Wege. Angenommen,  $D$  ist nicht  $q$ -fach stark zusammenhängend. Wegen  $|E(D)| \geq q + 1$  existiert dann eine Menge  $S \subseteq E(D)$  mit  $|S| \leq q - 1$ , so daß  $D - S$  nicht stark zusammenhängend ist. Damit gibt es in  $D - S$  zwei Ecken  $a$  und  $b$ , so daß in  $D - S$  kein orientierter Weg von  $a$  nach  $b$  existiert. Das widerspricht aber der Tatsache, daß es mindestens  $q$  kreuzungsfreie, orientierte Wege von  $a$  nach  $b$  in  $D$  gibt.

Nun sei umgekehrt  $D$   $q$ -fach stark zusammenhängend. Angenommen, es gibt zwei Ecken  $a$  und  $b$  in  $D$ , so daß von  $a$  nach  $b$  maximal  $p < q$  kreuzungsfreie, orientierte Wege in  $D$  existieren.

Gibt es in  $D$  keinen Bogen  $(a, b)$ , so ist nach Satz 14.19 die Ecke  $b$  von  $a$  aus höchstens  $p$ -fach in  $D$  erreichbar, womit eine Menge  $S \subseteq E(D) - \{a, b\}$  mit  $|S| \leq p < q$  existiert, so daß die Ecke  $b$  in  $D - S$  von  $a$  aus nicht mehr erreichbar ist. Das ergibt einen Widerspruch zur Voraussetzung, daß  $D$   $q$ -fach stark zusammenhängend ist.

Existiert ein Bogen  $k = (a, b)$ , so gibt es in  $D - k$  höchstens  $p - 1$  kreuzungsfreie, orientierte Wege von  $a$  nach  $b$ . Nach Satz 14.19 existiert eine Menge  $S \subseteq E(D) - \{a, b\}$  mit  $|S| \leq p - 1$ , so daß die Ecke  $b$  in  $D' = (D - k) - S$  von  $a$  aus nicht mehr erreichbar ist. Nun bedeute  $M^+(a)$  die Menge aller Ecken von  $D'$ , die in  $D'$  von  $a$  aus erreichbar sind (insbesondere ist  $a \in M^+(a)$ ), und  $R = (E(D') - M^+(a)) - \{b\}$ .

Ist  $R \neq \emptyset$  und  $u \in R$ , so ist in  $D' - b = D - (S \cup \{b\})$  die Ecke  $u$  von  $a$  aus nicht erreichbar, womit wir einen Widerspruch zum  $q$ -fachen starken Zusammenhang von  $D$  erzielt haben.

Ist  $R = \emptyset$ , so existiert eine Ecke  $v \in M^+(a)$  mit  $v \neq a$ . Denn anderenfalls würde nach Definition von  $R$  gelten:  $E(D') = \{a, b\}$ , im Widerspruch zu  $|E(D)| \geq q + 1$ . Daher ist in  $D' - a = D - (S \cup \{a\})$  die Ecke  $b$  von  $v$  aus nicht erreichbar, womit wir auch in diesem Fall einen Widerspruch zum  $q$ -fachen starken Zusammenhang von  $D$  gefunden haben. ||

Aus den Sätzen 14.12 und 14.21 folgt leicht die ungerichtete Form von Satz 14.21.

**Satz 14.22.** Es sei  $q \in \mathbb{N}$  und  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $|E(G)| \geq q + 1$ .  $G$  ist genau dann  $q$ -fach zusammenhängend, wenn zwischen je zwei Ecken  $q$  kreuzungsfreie Wege existieren.

*Beweis.* Gibt es zwischen je zwei Ecken  $q$  kreuzungsfreie Wege, so ist  $G$   $q$ -fach zusammenhängend (man vgl. den Beweis von Satz 14.21).

Ist umgekehrt  $G$   $q$ -fach zusammenhängend, so sei  $D(G)$  der dem Graphen  $G$  zugeordnete Digraph. Nach Satz 14.12 ist  $D(G)$   $q$ -fach stark zusammenhängend. Damit gibt es nach Satz 14.21 zwischen je zwei Ecken  $q$  kreuzungsfreie, orientierte Wege in  $D(G)$  und daher wieder nach Satz 14.12  $q$  kreuzungsfreie Wege in  $G$ . ||

Mit analogen Überlegungen lassen sich diejenigen Mengerschen Sätze beweisen, die den mehrfachen Bogen- bzw. Kantenzusammenhang charakterisieren.

**Satz 14.23.** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph und  $a, b$  zwei verschiedene Ecken von  $D$ . Es gibt genau dann  $q$  bogendisjunkte, orientierte Wege ( $q \in \mathbb{N}$ ) von  $a$  nach  $b$  in  $D$ , wenn es für alle  $B' \subseteq B(D)$  mit  $|B'| \leq q - 1$  einen orientierten Weg von  $a$  nach  $b$  in  $D - B'$  gibt.

**Satz 14.24.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph und  $a, b$  zwei verschiedene Ecken von  $G$ . Es gibt genau dann  $q$  kantendisjunkte Wege ( $q \in \mathbb{N}$ ) von  $a$  nach  $b$  in  $D$ , wenn es für alle  $K' \subseteq K(G)$  mit  $|K'| \leq q - 1$  einen Weg von  $a$  nach  $b$  in  $G - K'$  gibt.

**Satz 14.25.** Ein schlichter Digraph  $D$  ist genau dann  $q$ -fach bogenzusammenhängend ( $q \in \mathbb{N}$ ), wenn für je zwei verschiedene Ecken  $x$  und  $y$  mindestens  $q$  bogendisjunkte orientierte Wege von  $x$  nach  $y$  und auch von  $y$  nach  $x$  existieren.

**Satz 14.26.** Ein schlichter Graph  $G$  ist genau dann  $q$ -fach kantenzusammenhängend ( $q \in \mathbb{N}$ ), wenn zwischen je zwei Ecken  $q$  kantendisjunkte Wege existieren.

Während wir hier direkte Beweise der Mengerschen Sätze vorgestellt haben, findet man im Abschnitt 15.3 über Anwendungen der Netzwerktheorie alternative Beweise. Insbesondere wird Satz 14.23 dort exakt bewiesen.

Diejenigen Leser, die an Erweiterungen, Verallgemeinerungen und Anwendungen der Mengerschen Sätze und an Problemen des mehrfachen Zusammenhangs interessiert sind, seien auf den Übersichtsartikel von Mader [5] aus dem Jahre 1979 und z.B. auf die Arbeiten von Aharoni [1] 1987, Mader [6] 1986, Mader [7] 1988 und Mader [9] 1989 verwiesen.

## 14.4 Anwendungen der Mengerschen Sätze

Wir beginnen mit einem schnellen Beweis von Satz 8.4, daß in einem zweifach zusammenhängenden schlichten Graphen  $G$  je zwei Ecken auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Sind  $x$  und  $y$  zwei Ecken aus  $G$ , so gibt es nach Satz 14.22 zwei kreuzungsfreie Wege zwischen  $x$  und  $y$ , die zusammen einen Kreis durch  $x$  und  $y$  bilden.

Als nächstes beweisen wir nochmals die Sätze 9.3 und 6.7.

**Satz (Satz 9.3 (König, [2] 1931)).** Ist  $G$  ein bipartiter Graph, so gilt  $\beta(G) = \alpha_0(G)$ .

*Beweis.* Es gilt natürlich  $\alpha_0(G) \leq \beta(G)$ . Für die umgekehrte Ungleichung sei  $G$  o.B.d.A. schlicht und  $A, B$  eine Bipartition von  $G$ . Zu  $G$  fügen wir zwei neue Ecken  $a, b$  hinzu und verbinden  $a$  mit allen Ecken aus  $A$  und  $b$  mit allen Ecken aus  $B$  durch neue Kanten. Es ist leicht zu sehen, daß in diesem neuen schlichten Graphen  $H$  genau  $\alpha_0(G)$  kreuzungsfreie Wege zwischen  $a$  und  $b$  existieren. Daher gibt es nach Satz 14.20 eine Menge  $E' \subseteq E(G)$  mit  $|E'| = \alpha_0(G)$ , so daß es in  $H - E'$  keinen Weg zwischen  $a$  und  $b$  gibt. Das bedeutet aber, daß jede Kante aus  $G$  mit einer Ecke aus  $E'$  inzidiert, womit  $\beta(G) \leq |E'| = \alpha_0(G)$  ist.  $\parallel$

**Satz (Satz 6.7 (König, Hall; König [2] 1931, Hall[1] 1935)).** Es sei  $G$  ein bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$ . Es gibt genau dann ein Matching  $M$  in  $G$  mit  $E(M) \cap A = A$ , wenn  $|S| \leq |N(S, G)|$  für alle  $S \subseteq A$  gilt.

*Beweis.* Existiert ein Matching  $M$  mit  $E(M) \cap A = A$ , so gilt natürlich  $|S| \leq |N(S, G)|$  für alle  $S \subseteq A$ .

Nun gelte umgekehrt die König-Hall Bedingung, und wir nehmen an, daß  $\alpha_0(G) < |A|$  gilt. Nach Satz 9.3 existiert dann eine Überdeckung  $T = A' \cup B'$  von  $G$  mit  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$  und  $\alpha_0(G) = |T| < |A|$ . Da  $T$  eine Überdeckung ist, muß aber  $N(A - A', G) \subseteq B'$  gelten, woraus sich der folgende Widerspruch zur König-Hall Bedingung mit  $S = A - A'$  ergibt:

$$|N(A - A', G)| \leq |B'| = |T| - |A'| < |A| - |A'| = |A - A'|. \quad \parallel$$

**Satz 14.27 (Volkmann [25] 2006).** Es sei  $D$  ein schlichter und stark zusammenhängender Digraph, der nicht vollständig ist. Ist  $\text{dm}(D) = 2$ , so gilt  $n(D) \geq \delta(D) + 2$ , und ist  $\text{dm}(D) \geq 3$ , so gilt

$$n(D) \geq \sigma(D)(\text{dm}(D) - 3) + 2\delta(D) + 2.$$

*Beweis.* Da der Fall  $\text{dm}(D) = 2$  trivial ist, sei nun  $\text{dm}(D) \geq 3$ . Wir setzen  $n = n(D)$ ,  $\delta = \delta(D)$  und  $\sigma = \sigma(D)$ . Es seien  $u$  und  $v$  zwei Ecken aus  $D$  mit  $d_D(u, v) = \text{dm}(D)$ . Nach Satz 14.21 existieren  $\sigma$  kreuzungsfreie orientierte Wege von  $u$  nach  $v$ , die alle mindestens von der Länge  $\text{dm}(G)$  sind. Da diese  $\sigma$  orientierten Wege kreuzungsfrei sind, ergibt sich schon  $n \geq \sigma(\text{dm}(D) - 1) + 2$ . Nun gibt es aber noch  $d^+(u, D) - \sigma \geq \delta - \sigma$  weitere positive Nachbarn von  $u$  und  $d^-(v, D) - \sigma \geq \delta - \sigma$  weitere negative Nachbarn von  $v$ . Wegen  $\text{dm}(D) \geq 3$  gilt  $N^+(u, D) \cap N^-(v, D) = \emptyset$ , und wir erhalten insgesamt die gewünschte Abschätzung

$$n \geq \sigma(\text{dm}(D) - 1) + 2 + 2(\delta - \sigma) = \sigma(\text{dm}(D) - 3) + 2\delta + 2. \quad \parallel$$

**Folgerung 14.8 (Kane, Mohanty [1] 1978).** Es sei  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph, der nicht vollständig ist. Ist  $\text{dm}(G) = 2$ , so gilt  $n(G) \geq \delta(G) + 2$ , und ist  $\text{dm}(G) \geq 3$ , so gilt

$$n(G) \geq \sigma(G)(\text{dm}(G) - 3) + 2\delta(G) + 2.$$

*Beweis.* Ist  $D(G)$  der dem Graphen  $G$  zugeordnete Digraph, so liefert Satz 14.12 unmittelbar  $\text{dm}(D(G)) = \text{dm}(G)$ ,  $\delta(D(G)) = \delta(G)$  und  $\sigma(D(G)) = \sigma(G)$ . Da natürlich auch  $n(D(G)) = n(G)$  gilt, ergibt sich Folgerung 14.8 sofort aus Satz 14.27.  $\parallel$

**Folgerung 14.9 (Watkins [1] 1967).** Ist  $G$  ein schlichter, zusammenhängender und nicht trivialer Graph, so gilt  $n(G) \geq \sigma(G)(\text{dm}(G) - 1) + 2$ .

**Hilfssatz 14.1.** Es sei  $G$  ein schlichter und  $q$ -fach zusammenhängender Graph. Sind die Ecken  $a, x_1, x_2, \dots, x_q$  aus  $G$  paarweise verschieden, so existieren  $q$  Wege von der Ecke  $a$  zu den Ecken  $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ , die paarweise nur die Ecke  $a$  gemeinsam haben.

*Beweis.* Aus  $G$  konstruieren wir einen Graphen  $H$ , indem wir eine neue Ecke  $u$  und die Kanten  $ux_i$  für  $i = 1, 2, \dots, q$  zu  $G$  hinzufügen. Nach Voraussetzung und Definition 14.1 ist  $H$  auch  $q$ -fach zusammenhängend. Daher existieren nach Satz 14.22  $q$  kreuzungsfreie Wege von  $a$  nach  $u$  in  $H$ , deren Einschränkung auf  $G$  die gewünschten  $q$  Wege von  $a$  nach  $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$  liefern.  $\parallel$

Als Anwendung von Hilfssatz 14.1 wollen wir ein interessantes hinreichendes Kriterium für Hamiltonsche Graphen herleiten, das Chvátal und Erdős [1] 1972 gegeben haben.

**Satz 14.28 (Chvátal, Erdős [1] 1972).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $|E(G)| \geq 3$ . Gilt  $\sigma(G) \geq \alpha(G)$ , so ist  $G$  Hamiltonsch.

*Beweis.* Ist die Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G) = 1$ , so ist  $G$  ein vollständiger Graph mit mindestens drei Ecken, womit  $G$  einen Hamiltonkreis besitzt. Sei nun  $\alpha(G) \geq 2$  und damit nach Voraussetzung  $q = \sigma(G) \geq \alpha(G) \geq 2$ . Dann besitzt  $G$  nach Satz 1.9 und wegen  $q \leq \delta(G)$  einen Kreis mit mehr als  $q$  Ecken. Ist  $C$  ein längster Kreis von  $G$ , so wollen wir zeigen, daß  $C$  ein Hamiltonkreis ist.

Ist  $C$  kein Hamiltonkreis, so gibt es eine Ecke  $u$  in  $G$ , die nicht zu  $C$  gehört. Dann existieren nach Hilfssatz 14.1  $q$  Wege  $W_1, W_2, \dots, W_q$  mit der Anfangsecke  $u$ , die paarweise nur die Ecke  $u$  gemeinsam haben, und die mit dem Kreis  $C$  nur ihre Endecken  $y_1, y_2, \dots, y_q$  gemeinsam besitzen. Gibt man dem Kreis  $C$  eine beliebige Orientierung, so seien  $x_i$  die Nachfolger von  $y_i$  für  $i = 1, 2, \dots, q$ . Nun kann kein  $x_i$  zu  $u$  adjazent sein, denn sonst könnte man in  $C$  die Kante  $y_i x_i$  durch die Kante  $x_i u$  und den Weg  $W_i$  ersetzen und erhielte einen längeren Kreis als  $C$ . Analog zeigt man, daß alle  $x_i$  von allen  $y_j$  verschieden sind. Da nach Voraussetzung die Menge  $\{u, x_1, \dots, x_q\}$  nicht unabhängig ist, muß in  $G$  eine Kante  $x_i x_j$  existieren. Ersetzt man in  $C$  die Kanten  $y_i x_i$  und  $y_j x_j$  durch die Kante  $x_i x_j$  und die beiden Wege  $W_i$  und  $W_j$ , so hat man einen Kreis gefunden, der länger als  $C$  ist, was aber der Wahl von  $C$  widerspricht. ||

Als einfache Folgerung aus Satz 14.28 erhalten wir

**Satz 14.29 (Chvátal, Erdős [1] 1972).** Es sei  $G$  ein schlichter und  $q$ -fach zusammenhängender Graph ( $q \in \mathbb{N}$ ). Gilt  $\alpha(G) \leq q + 1$ , so ist  $G$  semi-Hamiltonsch.

*Beweis.* Wählen wir eine Ecke  $u$ , die nicht zu  $G$  gehört, so ist  $G + u$  sogar  $(q + 1)$ -fach zusammenhängend. Wegen  $\alpha(G + u) = \alpha(G) \leq q + 1$  besitzt  $G + u$  nach Satz 14.28 einen Hamiltonkreis, womit  $G$  semi-Hamiltonsch ist. ||

Die vollständigen bipartiten Graphen  $K_{q,q+1}$  bzw.  $K_{q,q+2}$  zeigen, daß die Sätze 14.28 bzw. 14.29 bestmöglich sind.

Das nächste Resultat läßt sich analog zum Satz 14.28 herleiten.

**Satz 14.30 (Chvátal, Erdős [1] 1972).** Es sei  $G$  ein schlichter,  $q$ -fach zusammenhängender Graph. Ist  $\alpha(G) \leq q - 1$ , so ist jedes Eckenpaar durch einen Hamiltonschen Weg verbunden. (Man nennt solche Graphen Hamiltonsch zusammenhängend.)

Im folgenden wollen wir uns mit dem sogenannten lokalen Kantenzusammenhang und lokalen Zusammenhang befassen.

**Definition 14.13.** Es seien  $u$  und  $v$  zwei verschiedene Ecken eines schlichten Graphen  $G$ . Der lokale Kantenzusammenhang  $\lambda_G(u, v) = \lambda(u, v)$  der beiden Ecken  $u$  und  $v$  ist die maximale Anzahl der kantendisjunkten Wege zwischen  $u$  und  $v$ . Die beiden Ecken  $u$  und  $v$  heißen *maximal kantenzusammenhängend*, wenn  $\lambda(u, v) = \min\{d(u), d(v)\}$  gilt (man beachte, daß immer  $\lambda(u, v) \leq \min\{d(u), d(v)\}$  gilt). Der Graph  $G$  heißt *maximal lokal kantenzusammenhängend*, wenn alle Eckenpaare maximal kantenzusammenhängend sind.

**Satz 14.31.** Ist  $G$  ein schlichter nicht trivialer Graph, so gilt

$$\lambda(G) = \min\{\lambda_G(u, v) \mid u, v \in E(G)\}. \quad (14.6)$$

*Beweis.* Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so ist (14.6) natürlich richtig. Nun sei  $G$  zusammenhängend.

Es sei  $L \subset K(G)$  mit  $|L| \leq \min\{\lambda_G(u, v) \mid u, v \in E(G)\} - 1$ . Dann ist  $G - L$  zusammenhängend, und daher gilt  $\lambda(G) \geq \min\{\lambda_G(u, v) \mid u, v \in E(G)\}$ .



Nach dem Mengerschen Satz 14.26 existieren zwischen je zwei verschiedenen Ecken mindestens  $\lambda(G)$  kantendisjunkte Wege. Dies bedeutet aber  $\min\{\lambda_G(u, v) | u, v \in E(G)\} \geq \lambda(G)$  und der Satz ist bewiesen.  $\parallel$

**Folgerung 14.10.** Ist ein schlichter nicht trivialer Graph  $G$  maximal lokal kantenzusammenhängend, so gilt  $\lambda(G) = \delta(G)$ .

*Beweis.* Da  $G$  maximal lokal kantenzusammenhängend ist, gilt  $\lambda(u, v) = \min\{d(u), d(v)\}$  für alle Eckenpaare  $u$  und  $v$  von  $G$ . Daraus folgt zusammen mit (14.6)

$$\lambda(G) = \min_{u, v \in E(G)} \{\lambda(u, v)\} = \min_{u, v \in E(G)} \{\min\{d(u), d(v)\}\} = \delta(G). \quad \parallel$$

**Satz 14.32 (Hellwig, Volkmann [2] 2004).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n$  vom Minimalgrad  $\delta \geq 1$ . Ist  $\omega(G) \leq p$  für eine ganze Zahl  $p \geq 2$  und

$$n \leq 2 \left\lfloor \frac{p\delta}{p-1} \right\rfloor - 1,$$

so ist  $G$  maximal lokal kantenzusammenhängend.

*Beweis.* Es seien  $u$  und  $v$  zwei beliebige Ecken von  $G$  mit  $u \neq v$ . Es gilt natürlich  $\lambda(u, v) \leq \min\{d(u), d(v)\}$ . Beachtet man den Mengerschen Satz 14.24 und Satz 14.3 von Chartrand, so genügt es nachzuweisen, daß  $m_G(S, \bar{S}) \geq \min\{d(u, G), d(v, G)\}$  für alle Teilmengen  $S \subset E(G)$  mit  $u \in S$  und  $v \in \bar{S}$  gilt. Es gelte nun o.B.d.A.  $1 \leq |S| \leq \frac{n}{2}$  und damit nach Voraussetzung  $1 \leq |S| \leq \lfloor \frac{p\delta}{p-1} \rfloor - \frac{1}{2}$ . Da  $|S|$  ganzzahlig ist, folgt daraus

$$1 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{p\delta}{p-1} \right\rfloor - 1 \leq \frac{p\delta}{p-1} - 1. \quad (14.7)$$

Wegen  $\omega(G[S]) \leq \omega(G) \leq p$  liefert Satz 9.22

$$2m(G[S]) \leq \frac{p-1}{p} |S|^2$$

und damit

$$m_G(S, \bar{S}) \geq \sum_{x \in S} d(x, G) - \frac{p-1}{p} |S|^2 = \sum_{x \in S} (d(x, G) - \delta) + \delta |S| - \frac{p-1}{p} |S|^2. \quad (14.8)$$

Um  $m_G(S, \bar{S})$  weiter nach unten abzuschätzen, setzen wir

$$g(x) = -\frac{p-1}{p} x^2 + \delta x$$

und bestimmen wegen (14.7) das Minimum der Parabel  $g$  im Intervall  $I: 1 \leq x \leq \frac{p\delta}{p-1} - 1$ . Nun ist

$$\min_{x \in I} \{g(x)\} = g(1) = g\left(\frac{p\delta}{p-1} - 1\right) = \delta - \frac{p-1}{p},$$

womit sich aus (14.8)

$$\begin{aligned} m_G(S, \bar{S}) &\geq \sum_{x \in S} (d(x, G) - \delta) + \delta - \frac{p-1}{p} \\ &\geq d(u, G) - \delta + \delta - \frac{p-1}{p} = d(u, G) - \frac{p-1}{p} \end{aligned}$$

ergibt. Da  $m_G(S, \bar{S})$  und  $d(u, G)$  ganze Zahlen sind, und weil  $0 < \frac{p-1}{p} < 1$  gilt, folgt daraus  $m_G(S, \bar{S}) \geq d(u, G) \geq \min\{d(u, G), d(v, G)\}$ , und der Satz ist vollständig bewiesen.  $\parallel$

Für den Spezialfall, daß  $G$  ein schlichter  $p$ -partiter Graph ist, wurde Satz 14.32 im Jahre 2000 von Fricke, Oellerman und Swart [1] bewiesen. Beachtet man Folgerung 14.10, so folgt das nächste Resultat sofort aus Satz 14.32.

**Folgerung 14.11 (Dankelmann, Volkmann [1] 1995).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph vom Minimalgrad  $\delta \geq 1$  und  $p \geq 2$  eine ganze Zahl. Ist  $\omega(G) \leq p$  und  $n(G) \leq 2 \lfloor p\delta/(p-1) \rfloor - 1$ , so gilt  $\lambda(G) = \delta(G)$ .

Ohne den Satz von Turán zu benutzen, ist Folgerung 14.11 schon im Jahre 1988 bzw. 1989 für bipartite bzw.  $p$ -partite Graphen von Volkmann [1], [2] bewiesen worden. Der bipartite Fall wurde dann von Plesnik und Znám [1] sowie von Dankelmann und Volkmann [1] noch verfeinert.

Zum Abschluß dieses Abschnitts beweisen wir ein zum Satz 14.32 analoges Resultat für den lokalen Zusammenhang.

**Definition 14.14.** Es seien  $u$  und  $v$  zwei verschiedene Ecken eines schlichten Graphen  $G$ . Der lokale Zusammenhang  $\sigma_G(u, v) = \sigma(u, v)$  der beiden Ecken  $u$  und  $v$  ist die maximale Anzahl der kreuzungsfreien Wege zwischen  $u$  und  $v$ . Die beiden Ecken  $u$  und  $v$  heißen *maximal zusammenhängend*, wenn  $\sigma(u, v) = \min\{d(u), d(v)\}$  gilt (man beachte, daß immer  $\sigma(u, v) \leq \min\{d(u), d(v)\}$  gilt). Der Graph  $G$  heißt *maximal lokal zusammenhängend*, wenn alle Eckenpaare maximal zusammenhängend sind.

**Satz 14.33.** Ist  $G$  ein schlichter nicht trivialer Graph, so gilt

$$\sigma(G) = \min\{\sigma_G(u, v) \mid u, v \in E(G)\}. \quad (14.9)$$

*Beweis.* Die Identität (14.9) ist sicherlich richtig, wenn  $G$  ein vollständiger Graph ist oder  $\kappa(G) \geq 2$  gilt. Nun sei  $G$  kein vollständiger Graph mit  $\kappa(G) = 1$ .

Es sei  $S \subset E(G)$  mit  $|S| \leq \min\{\sigma_G(u, v) \mid u, v \in E(G)\} - 1$ . Dann ist  $G - S$  zusammenhängend, und daher gilt  $\sigma(G) \geq \min\{\sigma_G(u, v) \mid u, v \in E(G)\}$ .

Nach dem Mengerschen Satz 14.22 existieren zwischen je zwei verschiedenen Ecken mindestens  $\sigma(G)$  kreuzungsfreie Wege. Dies bedeutet aber  $\min\{\sigma_G(u, v) \mid u, v \in E(G)\} \geq \sigma(G)$  und der Satz ist bewiesen.  $\parallel$

**Folgerung 14.12.** Jeder schlichte, nicht triviale und maximal lokal zusammenhängende Graph  $G$  erfüllt  $\sigma(G) = \delta(G)$ .

*Beweis.* Da  $G$  maximal lokal zusammenhängend ist, gilt  $\sigma(u, v) = \min\{d(u), d(v)\}$  für alle Eckenpaare  $u$  und  $v$  von  $G$ . Daraus folgt zusammen mit (14.9)

$$\sigma(G) = \min_{u, v \in E(G)} \{\sigma(u, v)\} = \min_{u, v \in E(G)} \{\min\{d(u), d(v)\}\} = \delta(G). \quad \parallel$$

**Satz 14.34 (Holtkamp, Volkmann [1] 2010).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 1$  und  $p \geq 2$  eine ganze Zahl. Ist  $\omega(G) \leq p$  und

$$n(G) \leq \delta(G) \cdot \frac{2p-1}{2p-3},$$

so ist  $G$  maximal lokal zusammenhängend.



*Beweis.* Es seien  $u$  und  $v$  zwei beliebige Ecken von  $G$  mit  $u \neq v$  und  $\min\{d(u, G), d(v, G)\} = \delta(G) + r$  mit einer ganzen Zahl  $r \geq 0$ .

*Fall 1:* Die Ecken  $u$  und  $v$  sind nicht adjazent. Angenommen, die Ecken  $u$  und  $v$  sind nicht maximal zusammenhängend. Dann existiert nach Satz 14.20 eine Eckenmenge  $S \subset E(G)$  mit  $|S| \leq \delta(G) + r - 1$ , so daß  $u$  und  $v$  in verschiedenen Komponenten von  $G - S$  liegen. Wegen  $d(u, G) \geq \delta(G) + r$  und  $d(v, G) \geq \delta(G) + r$ , existiert sowohl eine Ecke  $u' \notin S$  adjazent zu  $u$  als auch eine Ecke  $v' \notin S$  adjazent zu  $v$ .

*Fall 1.1:* Es sei  $p = 2$ . Aus der Voraussetzung  $\omega(G) \leq 2$  ergibt sich nun  $|N[\{u, u'\}, G]| \geq 2\delta(G) + r$  und  $|N[\{v, v'\}, G]| \geq 2\delta(G) + r$ . Benutzen wir diese beiden Ungleichungen und die Voraussetzung  $3\delta(G) \geq n(G)$ , so erhalten wir folgenden Widerspruch:

$$\begin{aligned} n(G) &\geq |N[\{u, u'\}, G]| + |N[\{v, v'\}, G]| - |S| \\ &\geq 4\delta(G) + 2r - |S| \geq 4\delta(G) + 2r - (\delta(G) + r - 1) \\ &= 3\delta(G) + r + 1 \geq n(G) + r + 1 \end{aligned}$$

*Fall 1.2:* Es sei  $p \geq 3$ . Ist  $N(u, G) \cap N(u', G) \neq \emptyset$ , so definieren wir den induzierten Teilgraphen  $F$  durch  $F = G[N(u, G) \cap N(u', G)]$ . Es gilt offensichtlich  $\delta(F) \geq \delta(G) - (n(G) - n(F))$ , und damit ergibt sich

$$2m(F) \geq n(F)\delta(F) \geq n(F)(\delta(G) - (n(G) - n(F))).$$

Die Voraussetzung  $\omega(G) \leq p$  führt sofort zu  $\omega(F) \leq p - 2$ , und daher folgt aus Satz 9.22

$$2m(F) \leq \frac{p-3}{p-2} \cdot n(F)^2.$$

Die letzten beiden Ungleichungen liefern

$$\delta(G) - (n(G) - n(F)) \leq \frac{p-3}{p-2} \cdot n(F).$$

Wenden wir die Voraussetzung  $\delta(G) \geq n(G)(2p-3)/(2p-1)$  auf diese Ungleichung an, so erhalten wir

$$n(F) \leq \frac{2p-4}{2p-1} \cdot n(G).$$

Daraus folgt nun

$$|N[\{u, u'\}, G]| \geq 2\delta(G) + r - n(F) \geq 2\delta(G) + r - \frac{2p-4}{2p-1} \cdot n(G), \quad (14.10)$$

und (14.10) ist natürlich auch dann richtig, wenn  $N(u, G) \cap N(u', G) = \emptyset$  ist. Völlig analog gewinnt man die Abschätzung

$$|N[\{v, v'\}, G]| \geq 2\delta(G) + r - \frac{2p-4}{2p-1} \cdot n(G). \quad (14.11)$$

Aus (14.10), (14.11) und der Voraussetzung  $\delta(G) \geq n(G)(2p-3)/(2p-1)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} n(G) &\geq |N[\{u, u'\}, G]| + |N[\{v, v'\}, G]| - |S| \\ &\geq 4\delta(G) + 2r - \frac{4p-8}{2p-1} \cdot n(G) - (\delta(G) + r - 1) \\ &\geq 3 \cdot \frac{2p-3}{2p-1} \cdot n(G) + r + 1 - \frac{4p-8}{2p-1} \cdot n(G) \\ &= n(G) + r + 1. \end{aligned}$$

Mit diesem Widerspruch ist Fall 1 vollständig bewiesen.

*Fall 2:* Die Ecken  $u$  und  $v$  sind adjazent. Wenn wir  $H = G - uv$  setzen, so gilt natürlich  $n(H) = n(G)$ ,  $\omega(H) \leq p$ ,  $d(u, H) = d(u, G) - 1$  und  $d(v, H) = d(v, G) - 1$ .

*Fall 2.1:* Es sei  $\min\{d(u, G), d(v, G)\} = \delta(G) + r \geq \delta(G) + 1$ . Daraus schließen wir  $\delta(H) = \delta(G)$ , und daher gilt nach Voraussetzung  $n(H) \leq \delta(H)(2p - 1)/(2p - 3)$ . Nun liefert der 1. Fall  $\sigma_H(u, v) = \min\{d(u, H), d(v, H)\}$ , und wir erhalten das gewünschte Resultat

$$\sigma_G(u, v) = \sigma_H(u, v) + 1 = \min\{d(u, G), d(v, G)\}.$$

*Fall 2.2:* Es sei  $\min\{d(u, G), d(v, G)\} = \delta(G)$ . Daraus ergibt sich  $\delta(H) = \delta(G) - 1$ . Angenommen, die Ecken  $u$  und  $v$  sind in  $H$  nicht maximal zusammenhängend. Dann existiert nach Satz 14.20 eine Eckenmenge  $S \subset E(H)$  mit  $|S| \leq \delta(H) - 1 = \delta(G) - 2$ , so daß  $u$  und  $v$  in verschiedenen Komponenten von  $H - S$  liegen. Wegen  $d(u, H) \geq \delta(G) - 1$  und  $d(v, H) \geq \delta(H) - 1$ , existiert in  $H$  sowohl eine Ecke  $u' \notin S$  adjazent zu  $u$  als auch eine Ecke  $v' \notin S$  adjazent zu  $v$ . Weiter folgt aus  $|S| \leq \delta(G) - 2$  und  $d(u', H) \geq \delta(G)$  und  $d(v', H) \geq \delta(H)$  sowohl die Existenz einer Ecke  $u'' \notin S$  adjazent zu  $u'$  als auch die Existenz einer Ecke  $v'' \notin S$  adjazent zu  $v'$  in  $H$  mit  $d(u'', H), d(v'', H) \geq \delta(G)$ .

Benutzen wir nun die Eckenmengen  $\{u', u''\}$  und  $\{v', v''\}$  an Stelle von  $\{u, u'\}$  und  $\{v, v'\}$ , so gelangen wir analog zu den Fällen 1.1 und 1.2 zu einem Widerspruch, wenn wir im Fall  $p \geq 3$  noch folgende Tatsache beachten.

Wie oben definieren wir den induzierten Teilgraphen  $F$  durch  $F = H[N(u', H) \cap N(u'', H)]$ , und es sei  $x \in E(F)$ . Ist  $x \neq u$ , so gilt  $d(x, F) \geq \delta(G) - (n(G) - n(F))$ . Da  $u$  und  $v$  in  $H$  nicht adjazent sind, ergibt sich auch

$$d(u, F) \geq (\delta(G) - 1) - (n(G) - 1 - n(F)) = \delta(G) - (n(G) - n(F)).$$

Daher gelangen wir, wie im Fall 1.2, zu der Abschätzung  $\delta(F) \geq \delta(G) - (n(G) - n(F))$ .

Insgesamt folgt dann wie im Fall 1 die Identität  $\sigma_H(u, v) = \min\{d(u, H), d(v, H)\} = \delta(G) - 1$ , und somit erhalten wir auch in diesem Fall das gewünschte Resultat

$$\sigma_G(u, v) = \sigma_H(u, v) + 1 = \delta(G) = \min\{d(u, G), d(v, G)\}. \quad \parallel$$

Wenden wir Folgerung 14.12 auf Satz 14.34 an, so gelangen wir sofort zum nächsten Ergebnis.

**Folgerung 14.13 (Hellwig, Volkmann [5] 2006).** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $\delta(G) \geq 1$  und  $p \geq 2$  eine ganze Zahl. Ist  $\omega(G) \leq p$  und  $n(G) \leq \delta(G)(2p - 1)/(2p - 3)$ , so gilt  $\sigma(G) = \delta(G)$ .

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß Satz 14.34 noch zwei weitere Ergebnisse von Topp und Volkmann [3] sowie Volkmann [31] über  $p$ -partite Graphen als Spezialfälle enthält.

**Folgerung 14.14.** Ist  $G$  ein schlichter und bipartiter Graph der Ordnung  $n(G) \leq 3\delta(G)$ , so gilt  $\sigma(G) = \delta(G)$ .

Für schlichte, bipartite und reguläre Graphen konnten Topp und Volkmann [3] die Voraussetzung in Folgerung 14.14 durch folgende Bedingung abschwächen

$$n(G) < 3\delta(G) + \sqrt{2\delta(G) - 1}.$$

Für eine spezielle Klasse regulärer Graphen, den sogenannten stark regulären Graphen, zeigten Brouwer und Mesner [1] 1985  $\sigma = \delta$ . Den an dieser Klasse von Graphen interessierten Leser verweisen wir auf Bose [1] 1963, Cameron [1] 1978 sowie Seidel [1] 1979.

## 14.5 Aufgaben

**Aufgabe 14.1.** Man beweise Bemerkung 14.1.

**Aufgabe 14.2.** Man beweise Bemerkung 14.3 und konstruiere einen Beispielgraphen  $G$  mit  $\sigma(G) > \min\{\sigma(G_1), \sigma(G_2), r\}$ .

**Aufgabe 14.3.** Man beweise Bemerkung 14.4 und konstruiere einen Beispielgraphen  $G$  mit  $\lambda(G) > \min\{\lambda(G_1), \lambda(G_2), r\}$ .

**Aufgabe 14.4.** Man beweise die Implikationen aus Bemerkung 14.5.

**Aufgabe 14.5.** Man zeige, daß der in Bemerkung 14.6 skizzierte Graph die Bedingungen aus Satz 14.8 erfüllt und konstruiere entsprechende Beispiele für  $\delta = \lambda \geq 3$ .

**Aufgabe 14.6.** Man beweise die Sätze 14.24, 14.25 und 14.26 mit Hilfe von Satz 14.23.

**Aufgabe 14.7.** Es sei  $G$  ein schlichter Graph mit  $n = n(G) \geq 3$ . Ist

$$m(G) \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2,$$

so zeige man, daß  $G$  eine stark zusammenhängende Orientierung besitzt.

**Aufgabe 14.8.** Es sei  $D$  ein Eulerscher Multidigraph und  $S \subseteq E(D)$  mit  $S \neq E(D), \emptyset$ . Man zeige

$$m_D(S, \bar{S}) = m_D(\bar{S}, S).$$

**Aufgabe 14.9.** Es sei  $D$  ein Eulerscher Multidigraph mit einer guten Ecke. Man zeige  $\lambda(D) = \delta(D)$ .

**Aufgabe 14.10.** Man beweise Satz 14.30.

**Aufgabe 14.11.** Es sei  $D$  ein schlichter,  $q$ -fach stark zusammenhängender Digraph mit  $n(D) \geq 2q$ . Sind  $x_1, x_2, \dots, x_q, y_1, y_2, \dots, y_q$  verschiedene Ecken aus  $D$ , so zeige man, daß  $q$  paarweise eckendisjunkte, orientierte Wege von  $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$  nach  $\{y_1, y_2, \dots, y_q\}$  existieren.

# Kapitel 15

## Netzwerke

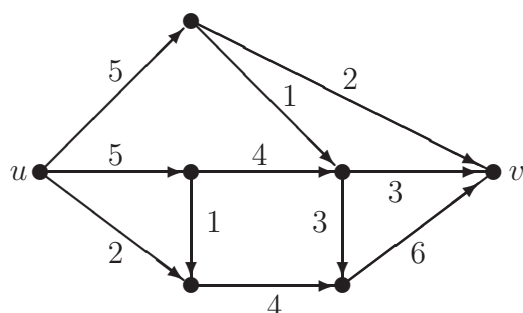
### 15.1 Die Theorie von Ford-Fulkerson

**Definition 15.1.** Ein zusammenhängender Multidigraph  $N = (E, B)$  heißt *Netzwerk*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i) In  $N$  existiert genau eine Ecke  $u$  mit  $d^-(u, N) = 0$ . Die Ecke  $u$  nennt man *Quelle* des Netzwerkes. In  $N$  existiert genau eine Ecke  $v$  mit  $d^+(v, N) = 0$ . Die Ecke  $v$  nennt man *Senke* des Netzwerkes.
- ii) Es existiert eine Funktion  $c: B \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $c(k) \geq 0$  für alle  $k \in B$ . Man nennt  $c$  *Kapazitätsfunktion* und  $c(k)$  *Kapazität* des Bogens  $k$ .

Für ein Netzwerk  $N$  mit der Eckenmenge  $E$ , der Bogenmenge  $B$ , der Quelle  $u$ , der Senke  $v$  und der Kapazitätsfunktion  $c$  benutzen wir im folgenden die Schreibweise  $N = (E, B, u, v, c)$ .

**Beispiel 15.1.** Ein Baumaschinenhersteller soll innerhalb einer gegebenen Frist einige Planierraupen bei einer entfernten Großbaustelle anliefern. Das Zeitlimit erweist sich als Problem, denn bei den verschiedenen Transportmöglichkeiten (Bahn, mit eigenen Fahrzeugen, Schiff, über Spediteure usw.) kann der Fabrikant stets nur eine bestimmte Anzahl von Maschinen bis zum gegebenen Termin befördern. Wir nehmen an, daß die verschiedenen Transportwege durch den unten skizzierten Digraphen repräsentiert werden.



Dabei bedeuten die eingetragenen Zahlen die Anzahl der Planierraupen, die auf der betreffenden Strecke so befördert werden können, daß sie rechtzeitig zum Ziel gelangen. Damit liegt eine Kapazitätsfunktion vor. Die Ecke  $u$  entspricht dem Standort des Herstellers und die Ecke  $v$  der Großbaustelle. Damit führt das gestellte praktische Problem auf natürliche Weise zu einem Problem in einem Netzwerk, das die Quelle  $u$  und die Senke  $v$  besitzt. Der Fa-

brikant ist natürlich daran interessiert, die maximale Anzahl der Maschinen herauszufinden, die er fristgerecht durch dieses Netzwerk befördern kann.

Zur allgemeinen Lösung solcher und ähnlicher Fragestellungen wollen wir eine Methode vorstellen, die von Ford und Fulkerson [1], [2], [3] in den Jahren 1956 bis 1962 entwickelt worden ist.

**Definition 15.2.** Sei  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ist  $B' \subseteq B$ , so setzen wir  $f(B') = \sum_{k \in B'} f(k)$ . Weiter setzen wir für  $X \subseteq E$

$$f^+(X) = f((X, \overline{X})) \text{ und } f^-(X) = f((\overline{X}, X))$$

und  $f^+(a) = f^+(\{a\})$  bzw.  $f^-(a) = f^-(\{a\})$  für eine Ecke  $a \in E$ . Die Funktion  $f$  heißt *Fluß* im Netzwerk  $N$ , wenn sie für alle  $k \in B$  und alle  $a \in E - \{u, v\}$  die Bedingungen

$$0 \leq f(k) \leq c(k), \quad (15.1)$$

$$f^+(a) = f^-(a) \quad (15.2)$$

erfüllt. Die Ungleichung (15.1) nennt man *Kapazitätsbeschränkung*, und die Identität (15.2) heißt *Kirchhoffsche Regel*. Die Kirchhoffsche Regel besagt, daß bei einem Fluß in jeder Ecke, die von der Quelle und Senke verschieden ist, der einlaufende und der auslaufende "Gesamtfluß" übereinstimmen.

Jedes Netzwerk besitzt den sogenannten *Null-Fluß*  $f_0$  mit  $f_0(k) = 0$  für alle Bogen  $k \in B$ .

**Satz 15.1.** Ist  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk und  $f$  ein Fluß in  $N$ , so gilt

$$f^+(u) = f^-(v). \quad (15.3)$$

*Beweis.* Es gilt

$$\sum_{a \in E} f^+(a) = \sum_{k \in B} f(k) = \sum_{a \in E} f^-(a).$$

Wegen  $f^+(a) = f^-(a)$  für alle  $a \neq u, v$  und  $f^+(v) = f^-(u) = 0$  folgt daraus unmittelbar die Eigenschaft (15.3). ||

**Definition 15.3.** Ist  $f$  ein Fluß im Netzwerk  $N = (E, B, u, v, c)$ , so heißt  $w(f) = f^+(u) = f^-(v)$  *Flußstärke* von  $f$ . Gibt es keinen Fluß  $f'$  mit  $w(f') > w(f)$ , so heißt  $f$  *maximaler Fluß* in  $N$ .

Ist  $A \subseteq E$  mit  $u \in A$  und  $v \in \overline{A}$ , so nennen wir  $L = (A, \overline{A}) \subseteq B$  einen *Schnitt* in  $N$  und

$$\text{cap } L = \sum_{k \in L} c(k)$$

*Kapazität* des Schnittes  $L$ . Gibt es im Netzwerk  $N$  keinen Schnitt  $L'$  mit  $\text{cap } L' < \text{cap } L$ , so heißt  $L$  *minimaler Schnitt* in  $N$ .

**Bemerkung 15.1.** Da es nur endlich viele Schnitte in einem Netzwerk gibt, existiert natürlich stets ein minimaler Schnitt. Außerdem gibt es auch immer einen maximalen Fluß. Um dies einzusehen, brauchen wir lediglich für jeden Bogen  $k$  des Netzwerkes die Größe  $f(k)$  nicht als Funktionswert, sondern als Variable aufzufassen. Dann sieht man nämlich, daß die Flußstärke eine stetige Funktion dieser Variablen ist, und ihr Definitionsbereich, der durch die Bedingungen (15.1) und (15.2) beschrieben wird, ist offensichtlich kompakt. Aus

einem bekannten Ergebnis der Analysis folgt damit die Existenz eines maximalen Flusses. Tatsächlich zeigt diese Betrachtung sogar, daß die Bestimmung eines maximalen Flusses ein lineares Programm ist. Damit stehen prinzipiell schon kraftvolle Methoden zur Lösung des Problems zur Verfügung. Allerdings garantieren diese Methoden im allgemeinen nicht die Ganzzahligkeit der Lösung, die für kombinatorische Probleme (man vgl. Beispiel 15.1) von entscheidender Bedeutung ist.

**Hilfssatz 15.1.** Ist  $f$  ein Fluß im Netzwerk  $N = (E, B, u, v, c)$  und  $(A, \bar{A})$  ein Schnitt, so gilt

$$w(f) = f^+(A) - f^-(A).$$

*Beweis.* Für alle  $X \subseteq E$  gelten die Identitäten

$$\sum_{a \in X} f^+(a) = f^+(X) + f((X, X)),$$

$$\sum_{a \in X} f^-(a) = f^-(X) + f((X, X)).$$

Setzen wir  $X = A$ , so folgt daraus wegen (15.2)

$$w(f) = f^+(u) = \sum_{a \in A} (f^+(a) - f^-(a)) = f^+(A) - f^-(A)$$

und damit die Behauptung. ||

**Definition 15.4.** Es sei  $f$  ein Fluß im Netzwerk  $N = (E, B, u, v, c)$ . Ein Bogen  $k \in B$  heißt

- $f$ -Null, wenn  $f(k) = 0$ ,
- $f$ -positiv, wenn  $f(k) > 0$ ,
- $f$ -ungesättigt, wenn  $f(k) < c(k)$ ,
- $f$ -gesättigt, wenn  $f(k) = c(k)$ .

**Satz 15.2.** Es sei  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk und  $f$  ein Fluß in  $N$ . Ist  $L = (A, \bar{A})$  ein Schnitt in  $N$ , so gilt stets

$$w(f) \leq \text{cap } L, \tag{15.4}$$

und in (15.4) steht genau dann das Gleichheitszeichen, wenn jeder Bogen aus  $(A, \bar{A})$   $f$ -gesättigt und jeder Bogen aus  $(\bar{A}, A)$   $f$ -Null ist.

*Beweis.* Da nach (15.1) für alle  $k \in B$  die Bedingung  $0 \leq f(k) \leq c(k)$  gilt, ergibt sich aus Hilfssatz 15.1 für  $L = (A, \bar{A})$

$$\begin{aligned} w(f) &= f^+(A) - f^-(A) \leq f^+(A) \\ &= \sum_{k \in L} f(k) \leq \sum_{k \in L} c(k) = \text{cap } L, \end{aligned}$$

womit die Ungleichung (15.4) nachgewiesen ist.

Nun gilt  $f^+(A) = \text{cap } L$  genau dann, wenn jeder Bogen des Schnittes  $(A, \bar{A})$   $f$ -gesättigt ist, und es gilt  $f^-(A) = 0$  genau dann, wenn jeder Bogen von  $(\bar{A}, A)$   $f$ -Null ist. Daraus erhält man zusammen mit den letzten Ungleichungen die gesamte Aussage des Satzes. ||

**Satz 15.3.** Ist  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk,  $f$  ein Fluß und  $L$  ein Schnitt in  $N$  mit

$$w(f) = \text{cap } L,$$

so ist  $L$  ein minimaler Schnitt und  $f$  ein maximaler Fluß.

*Beweis.* Es sei  $L^*$  ein minimaler Schnitt in  $N$ . Mit Hilfe der Ungleichung (15.4) und der Voraussetzung erhalten wir

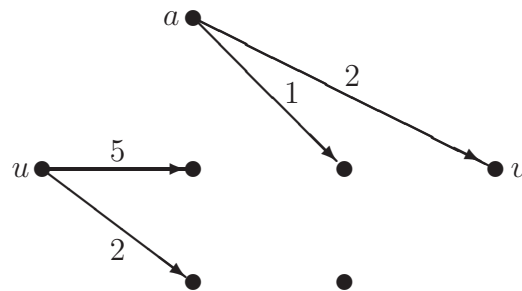
$$w(f) \leq \text{cap } L^* \leq \text{cap } L = w(f),$$

womit  $L$  notwendig ein minimaler Schnitt ist.

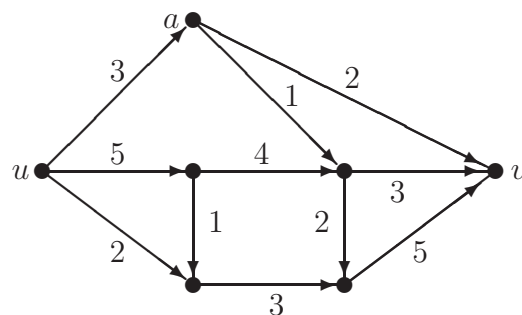
Angenommen, es gibt einen Fluß  $f^*$  in  $N$  mit  $w(f^*) > w(f)$ . Dann liefert (15.4) den Widerspruch

$$w(f) < w(f^*) \leq \text{cap } L = w(f). \quad \parallel$$

**Beispiel 15.2.** Setzen wir im Beispiel 15.1  $A = \{a, u\}$ , so gilt für den Schnitt  $(A, \bar{A})$  (man vgl. die Skizze):  $\text{cap}(A, \bar{A}) = 10$ .



Nun skizzieren wir in diesem Netzwerk einen Fluß der Flußstärke 10, womit nach Satz 15.3 ein maximaler Fluß vorliegt. (Der Leser möge alle Eigenschaften nachprüfen, die ein Fluß nach Definition 15.2 besitzen muß.)



Daher kann der Baumaschinenhersteller höchstens 10 Planierraupen innerhalb der vorgegebenen Frist bei der Großbaustelle abliefern.

Die Lösung des Problems aus Beispiel 15.1 haben wir allerdings nur durch “scharfes Hinsehen” gefunden. Im nächsten Abschnitt wollen wir eine systematische Methode angeben, mit deren Hilfe man maximale Flüsse in Netzwerken bestimmen kann. Dazu benötigen wir noch folgende Begriffe, die sowohl von theoretischem Interesse, als auch von praktischem Nutzen sind.



**Definition 15.5.** Es sei  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk und  $f$  ein Fluß in  $N$ . Ist  $W$  ein Weg des untergeordneten Graphen  $G(N)$  und  $k \in B$  ein Bogen, dessen in  $G(N)$  entsprechende Kante zum Weg  $W$  gehört, so heißt  $k$  *Vorwärtsbogen* von  $W$ , wenn  $k$  die gleiche Orientierung in  $N$  aufweist wie der Weg  $W$  in  $G(N)$ . Im anderen Fall heißt  $k$  *Rückwärtsbogen* von  $W$ . Jedem Weg  $W$  positiver Länge von  $G(N)$  ordnen wir eine nicht negative Zahl  $s(W)$  durch

$$s(W) = \min_{k \in B} s(k)$$

zu, wobei

$$s(k) = \begin{cases} c(k) - f(k) & \text{wenn } k \text{ ein Vorwärtsbogen von } W \\ f(k) & \text{wenn } k \text{ ein Rückwärtsbogen von } W \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (15.5)$$

gilt. Ein Weg  $W$  in  $G(N)$  mit  $L(W) > 0$  heißt

- $f$ -gesättigt, wenn  $s(W) = 0$ ,
- $f$ -ungesättigt, wenn  $s(W) > 0$  und
- $f$ -zunehmend, wenn er  $f$ -ungesättigt ist und von  $u$  nach  $v$  geht.

**Satz 15.4.** Es sei  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk und  $f$  ein Fluß in  $N$ . Ist  $W$  ein  $f$ -zunehmender Weg im untergeordneten Graphen  $G(N)$ , so ist  $F: B \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(k) = \begin{cases} f(k) + s(W) & \text{wenn } k \text{ ein Vorwärtsbogen von } W \\ f(k) - s(W) & \text{wenn } k \text{ ein Rückwärtsbogen von } W \\ f(k) & \text{sonst} \end{cases} \quad (15.6)$$

ein neuer Fluß in  $N$  mit  $w(F) = w(f) + s(W) > w(f)$ .

*Beweis.* Zunächst zeigen wir die Abschätzung  $0 \leq F(k) \leq c(k)$  für alle Bogen  $k$  des Netzwerkes.

Ist  $k \in B$  ein Bogen, dessen in  $G(N)$  entsprechende Kante nicht zu  $W$  gehört, so gilt  $0 \leq F(k) = f(k) \leq c(k)$ .

Ist  $k$  ein Vorwärtsbogen von  $W$ , so folgt aus (15.5) und (15.6)

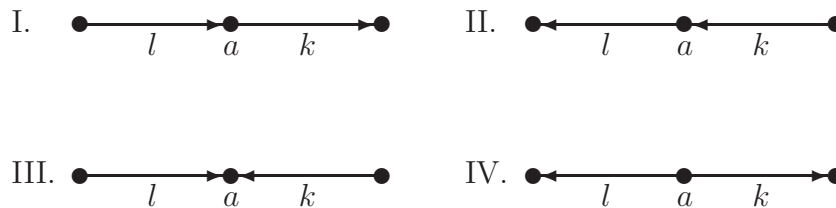
$$0 \leq F(k) = f(k) + s(W) \leq f(k) + c(k) - f(k) = c(k).$$

Ist  $k$  ein Rückwärtsbogen von  $W$ , so folgt aus (15.5) und (15.6)

$$0 = f(k) - f(k) \leq f(k) - s(W) = F(k) \leq c(k).$$

Nun zeigen wir  $F^+(a) = F^-(a)$  für alle  $a \in E - \{u, v\}$ . Gehört  $a$  nicht zum Weg  $W$ , so gibt es nichts zu beweisen.

Gehört  $a$  zum Weg  $W$ , so existieren genau die vier skizzierten Möglichkeiten.



Im I. Fall seien  $l$  und  $k$  zwei Vorwärtsbogen von  $W$ . Dann gilt  $F^-(a) = f^-(a) + s(W) = f^+(a) + s(W) = F^+(a)$ . Der zweite Fall geht analog.

Im III. Fall sei  $l$  ein Vorwärts- und  $k$  ein Rückwärtsbogen von  $W$ . Dann gilt  $F^-(a) = f^-(a) + s(W) - s(W) = f^+(a) = F^+(a)$ . Den vierten Fall beweist man analog zum III. Fall. Damit haben wir gezeigt, daß  $F$  ein Fluß in  $N$  ist.

Da der Weg  $W$  in  $u$  beginnt,  $d^-(u, N) = 0$  gilt und  $s(W) > 0$  ist, ergibt sich

$$w(F) = F^+(u) = f^+(u) + s(W) = w(f) + s(W) > w(f). \quad \parallel$$

Der nächste Satz zeigt uns, daß die  $f$ -zunehmenden Wege in der Netzwerktheorie die gleiche Rolle spielen wie die  $M$ -erweiternden Wege in der Matchingtheorie.

**Satz 15.5 (Ford, Fulkerson [1] 1956).** Es sei  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk und  $f$  ein Fluß in  $N$ . Der Fluß  $f$  ist genau dann maximal, wenn es keinen  $f$ -zunehmenden Weg gibt.

*Beweis.* Ist  $f$  ein maximaler Fluß, so kann es nach Satz 15.4 keinen  $f$ -zunehmenden Weg geben.

Nun gebe es umgekehrt keinen  $f$ -zunehmenden Weg. Es sei  $A \subseteq E$  die Menge aller Ecken, die auf einem  $f$ -ungesättigten Weg mit der Anfangsecke  $u$  liegen, und ferner sei  $u \in A$ . Da es keinen  $f$ -zunehmenden Weg gibt, gilt  $v \in \bar{A}$ , womit  $L = (A, \bar{A})$  ein Schnitt ist. Unter diesen Voraussetzungen ist jeder Bogen aus  $(A, \bar{A})$   $f$ -gesättigt und jeder Bogen aus  $(\bar{A}, A)$   $f$ -Null. Dann gilt wegen Satz 15.2 notwendig  $w(f) = \text{cap } L$ , womit nach Satz 15.3  $f$  ein maximaler Fluß ist.  $\parallel$

Jetzt können wir eines der Hauptergebnisse der Netzwerktheorie formulieren und beweisen.

**Satz 15.6 (Max-flow-min-cut-Satz, Ford, Fulkerson [1] 1956).** In jedem Netzwerk ist die Kapazität eines minimalen Schnittes gleich der Stärke eines maximalen Flusses.

*Beweis.* Es sei  $f$  ein maximaler Fluß in dem Netzwerk  $N$ . Nach Satz 15.5 existiert dann kein  $f$ -zunehmender Weg in  $N$ . Wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 15.5 können wir also einen Schnitt  $L$  finden, für den  $w(f) = \text{cap } L$  gilt. Mit Satz 15.3 folgt nun die Behauptung.  $\parallel$

Der folgende Satz ist entscheidend für kombinatorische Anwendungen der Flußtheorie (man vgl. Abschnitt 15.3).

**Satz 15.7 (Integral-flow-Satz, Ford, Fulkerson, [1] 1956).** Ein Netzwerk mit einer ganzzahligen Kapazitätsfunktion besitzt einen maximalen Fluß  $f$ , so daß  $f(k)$  für jeden Bogen  $k$  ganzzahlig und damit auch  $w(f)$  ganzzahlig ist.

*Beweis.* Es sei  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion. Es sei  $f_0$  der Null-Fluß in  $N$ . Ist  $f_0$  maximal, so sind wir fertig. Andernfalls existiert nach Satz 15.5 ein  $f_0$ -zunehmender Weg  $W$  und nach Satz 15.4 ein Fluß  $f_1$  mit  $w(f_1) = w(f_0) + s(W) = s(W)$ . Da  $c(k)$  ganzzahlig ist, folgt aus Definition 15.5 und (15.6) die Ganzzahligkeit von  $s(W)$  und damit die Ganzzahligkeit von  $f_1(k)$  für jeden Bogen  $k \in B$ , also auch die Ganzzahligkeit von  $w(f_1)$ . Ist nun  $f_1$  maximal, so sind wir fertig. Andernfalls verfahren wir mit  $f_1$  so wie zuvor mit  $f_0$  und erhalten dementsprechend einen Fluß  $f_2$ , so daß  $f_2(k)$  ganzzahlig für alle  $k \in B$  und damit auch  $w(f_2)$  ganzzahlig ist, usw. Es genügt nun zu zeigen, daß dieses Vorgehen mit einem maximalen Fluß abbricht. Dazu beobachten wir, daß die Flußstärke bei jedem Schritt um mindestens 1 zunimmt, aber gleichzeitig nach oben durch die Kapazität eines beliebigen Schnittes beschränkt ist.  $\parallel$

## 15.2 Algorithmus von Edmonds, Karp

Die im ersten Abschnitt durchgeführten Überlegungen legen auf natürliche Weise einen Algorithmus zur Bestimmung maximaler Flüsse nahe, der mit  $f$ -zunehmenden Wegen arbeitet. Zunächst wollen wir zeigen, wie man analog zur Ungarischen Methode systematisch  $f$ -zunehmende Wege finden kann.

**Definition 15.6.** Es sei  $f$  ein Fluß im Netzwerk  $N = (E, B, u, v, c)$ . Ein Baum  $T$  in  $G(N)$  heißt  *$f$ -ungesättigter Wurzelbaum bzgl.  $u$* , wenn er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- i)  $u \in E(T)$ .
- ii) Für alle  $a \in E(T) - \{u\}$  ist der eindeutig bestimmte Weg von  $u$  nach  $a$  in  $T$  ein  $f$ -ungesättigter Weg in  $G(N)$ .

Die Suche nach einem  $f$ -zunehmenden Weg ist nun gleichbedeutend damit, einen  $f$ -ungesättigten Wurzelbaum bzgl.  $u$  wachsen zu lassen.

Zunächst bestehe dieser Wurzelbaum  $T$  nur aus der Quelle  $u$ . Setzt man  $A = E(T)$ , so kann dieser Baum auf folgende zwei Arten wachsen.

Es gibt einen  $f$ -ungesättigten Bogen  $k \in (A, \bar{A})$ . Dann füge man die dem Bogen  $k$  entsprechende Kante und die mit  $k$  inzidente Ecke von  $G(N)$  zu  $T$  hinzu.

Es gibt einen  $f$ -positiven Bogen  $k \in (\bar{A}, A)$ . Dann füge man die dem Bogen  $k$  entsprechende Kante und die mit  $k$  inzidente Ecke von  $G(N)$  zu  $T$  hinzu.

Für das Ende dieser Prozedur gibt es dann die beiden folgenden Möglichkeiten.

1. Man findet einen  $f$ -ungesättigten Wurzelbaum  $T$  bzgl.  $u$ , so daß  $v \in E(T)$  gilt. Dann ist der eindeutig bestimmte Weg von  $u$  nach  $v$  in diesem Baum ein  $f$ -zunehmender Weg.
2. Man findet einen  $f$ -ungesättigten Wurzelbaum  $T$  bzgl.  $u$ , der sich nicht mehr vergrößern läßt, und der die Senke  $v$  nicht enthält. Ist wieder  $A = E(T)$ , so bedeuten diese Voraussetzungen, daß alle  $k \in (A, \bar{A})$   $f$ -gesättigt und alle  $k \in (\bar{A}, A)$   $f$ -Null sind. Nach Satz 15.2 gilt dann aber  $w(f) = \text{cap}(A, \bar{A})$ , womit der Fluß  $f$  nach Satz 15.3 schon maximal ist.

Zur Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk mit ganzzahligen Kapazitäten notieren wir zunächst einen Algorithmus von Ford und Fulkerson [2] aus dem Jahre 1957, der dann 1972 durch einen geschickten Trick von Edmonds und Karp [1] verbessert wurde.

### 11. Algorithmus

#### Algorithmus von Ford und Fulkerson

Es sei  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk mit ganzzahligen Kapazitäten.

1. Man starte mit dem Null-Fluß  $f$ .
2. Man setze  $T = \{u\}$ .
3. Man setze  $A = E(T)$  und prüfe, ob es einen  $f$ -ungesättigten Bogen  $k \in (A, \bar{A})$  bzw. einen  $f$ -positiven Bogen  $k \in (\bar{A}, A)$  gibt. Wenn ja, so gehe man zu 4., wenn nein, so stoppe man den Algorithmus.
4. Man füge die dem Bogen  $k$  entsprechende Kante und die mit  $k$  inzidente Ecke von

$G(N)$  zu  $T$  hinzu und nenne den neuen Baum  $T^*$ .  
 Ist  $v \notin E(T^*)$ , so setze man  $T = T^*$  und gehe zu 3.  
 Gehört die Senke  $v$  zu  $T^*$ , so sei  $W$  der eindeutig bestimmte Weg von  $u$  nach  $v$  in  $T^*$ .  
 Nun bestimme man nach Definition 15.5 die Größe  $s(W)$  und dann nach Satz 15.4 den Fluß  $F$  mit  $w(F) = w(f) + s(W) \geq w(f) + 1$ , setze  $f = F$  und gehe zu 2.

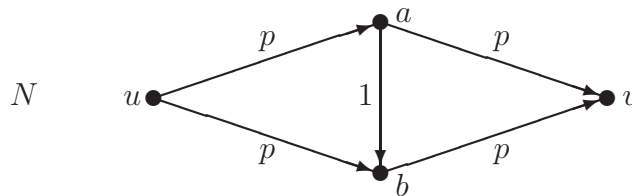
Dieser Algorithmus bricht nach endlich vielen Schritten mit einem maximalen Fluß ab.

Die Korrektheit dieses Algorithmus folgt wegen der ganzzahligen Kapazitäten sofort aus den vorangegangenen Überlegungen.

Sind die Kapazitäten in einem Netzwerk nicht alle ganzzahlig, aber wenigstens noch rational, so arbeitet der Algorithmus von Ford und Fulkerson ebenfalls korrekt. In diesem Fall gilt nämlich für jeden  $f$ -zunehmenden Weg  $W$  die Abschätzung  $s(W) \geq 1/c$ , wobei  $c$  den Hauptnenner aller auftretenden nicht ganzzahligen Kapazitäten bezeichnet. Interessanterweise kann aber der Algorithmus bei irrationalen Kapazitäten versagen. Beispiele dafür findet man schon in dem Buch von Ford und Fulkerson [3] aus dem Jahre 1962 oder bei Lovász und Plummer [1], S. 47. In diesen Beispielen bricht nicht nur der Algorithmus nicht ab, sondern die Folge der Flußstärken konvergiert auch noch gegen einen falschen Wert.

Darüber hinaus ist die Laufzeit des 11. Algorithmus selbst im Falle ganzzahliger Kapazitäten nicht notwendig polynomial in  $|E|$  und  $|B|$ . Bei unglücklicher Wahl der  $f$ -ungesättigten Wurzelbäume bzgl. der Quelle  $u$  kann er, wie das folgende Beispiel zeigt, von der Kapazitätsfunktion  $c$  abhängen.

**Beispiel 15.3.** Gegeben sei das skizzierte Netzwerk  $N$  mit der Quelle  $u$ , der Senke  $v$  und den gekennzeichneten Kapazitäten.



Es sei  $p \in \mathbb{N}$ . Wählt man im Algorithmus von Ford und Fulkerson abwechselnd die Wege  $(u, a, b, v)$  und  $(u, b, a, v)$  als  $f$ -zunehmende Wege, so wird die Flußstärke bei jedem Durchlauf um 1 erhöht. Daher benötigt man insgesamt  $2p$  Durchläufe, um den maximalen Fluß der Flußstärke  $2p$  zu ermitteln.

Als nächstes zeigen wir nun, daß eine von Edmonds und Karp [1] vorgeschlagene Zusatzvorschrift zur Bestimmung der  $f$ -zunehmenden Wege die gerade angesprochenen Probleme beseitigt.

**Definition 15.7.** Es sei  $f$  ein Fluß im Netzwerk  $N$ . Ein Bogen  $k$  eines  $f$ -zunehmenden Weges  $W$  heißt *minimal* bzgl.  $(W, f)$ , falls  $s(k) = s(W)$  gilt.

**Satz 15.8 (Edmonds, Karp [1] 1972).** Wählt man in dem Algorithmus von Ford und Fulkerson bei jedem Durchlauf einen kürzesten  $f$ -zunehmenden Weg, so liefert der Algorithmus nach höchstens  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor m$  Schritten einen maximalen Fluß, wobei  $n$  die Ordnung und  $m$  die Größe des Netzwerkes bedeuten.

*Beweis.* Es seien  $f_0, f_1, \dots$  Flüsse im Netzwerk  $N = (E, B, u, v, c)$ , wobei  $f_{i+1}$  aus  $f_i$  durch Fluß-Vergrößerung längs eines kürzesten  $f_i$ -zunehmenden Weges  $W_i$  entstanden sei. Wir

werden nun drei Eigenschaften einer solchen Flußfolge nachweisen, die uns das gewünschte Ergebnis liefern.

1. Ist  $k = xy \in B$  ein minimaler Vorwärtsbogen (Rückwärtsbogen) bzgl.  $(W_i, f_i)$  und bzgl.  $(W_j, f_j)$  mit  $i < j$ , so gilt  $j \geq i + 2$ , und  $xy$  ist ein Rückwärtsbogen (Vorwärtsbogen) eines Weges  $W_q$  mit  $i < q < j$ . Denn ist  $xy$  ein minimaler Vorwärtsbogen bzgl.  $(W_i, f_i)$  und  $(W_j, f_j)$ , so folgt aus Definition 15.5 und Satz 15.4  $f_i(xy) < c(xy) = f_{i+1}(xy)$  und  $f_j(xy) < c(xy)$ , woraus die behaupteten Tatsachen sofort folgen. Im Fall, daß  $xy$  ein minimaler Rückwärtsbogen ist, verläuft der Beweis analog.

2. Bezeichnen wir mit  $L_i(a, b)$  die Länge eines kürzesten  $f_i$ -ungesättigten Weges von  $a$  nach  $b$ , so gelten für alle Ecken  $x \in E$  die beiden nachstehenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} L_i(u, x) &\leq L_{i+1}(u, x), \\ L_i(x, v) &\leq L_{i+1}(x, v). \end{aligned}$$

Zum Beweis der ersten Ungleichung sei  $W_{ux} = (u = x_0, x_1, \dots, x_p = x)$  ein kürzester  $f_{i+1}$ -ungesättigter Weg von  $u$  nach  $x$ . Dabei setzen wir  $L_i(u, u) = 0$  und  $L_{i+1}(u, x) = \infty$ , falls für  $x \neq u$  kein solcher Weg existiert. Für  $j = 0, 1, \dots, p - 1$  zeigen wir

$$L_i(u, x_{j+1}) \leq L_i(u, x_j) + 1. \quad (15.7)$$

Ist  $x_j x_{j+1} \in B$ , also ist  $x_j x_{j+1}$  ein Vorwärtsbogen von  $W_{ux}$ , so folgt  $f_{i+1}(x_j x_{j+1}) < c(x_j x_{j+1})$ . Daraus ergibt sich  $f_i(x_j x_{j+1}) < c(x_j x_{j+1})$ , oder  $x_j x_{j+1}$  ist ein Rückwärtsbogen von  $W_i$ . Im ersten Fall folgt (15.7) unmittelbar, und im zweiten Fall ergibt sich (15.7) aus

$$L_i(u, x_{j+1}) = L_i(u, x_j) - 1 < L_i(u, x_j) + 1.$$

Ist  $x_{j+1} x_j \in B$ , also ist  $x_{j+1} x_j$  ein Rückwärtsbogen von  $W_{ux}$ , so folgt  $c(x_{j+1} x_j) \geq f_{i+1}(x_{j+1} x_j) > 0$ . Daraus ergibt sich  $f_i(x_{j+1} x_j) > 0$ , oder  $x_{j+1} x_j$  ist ein Vorwärtsbogen von  $W_i$ . In beiden Fällen erhält man leicht (15.7). Aus (15.7) folgt induktiv die erste der beiden gewünschten Ungleichungen

$$L_i(u, x) = L_i(u, x_p) \leq L_i(u, x_{p-1}) + 1 \leq \dots \leq L_i(u, u) + p = L_{i+1}(u, x).$$

Die zweite Ungleichung beweist man analog.

3. Ist  $i < j$  und  $xy$  ein Vorwärtsbogen (Rückwärtsbogen) von  $W_i$  sowie ein Rückwärtsbogen (Vorwärtsbogen) von  $W_j$ , so gilt

$$L_j(u, v) \geq L_i(u, v) + 2,$$

denn 2. liefert im ersten Fall

$$\begin{aligned} L_j(u, v) &= L_j(u, y) + 1 + L_j(x, v) \\ &\geq L_i(u, y) + 1 + L_i(x, v) = L_i(u, v) + 2. \end{aligned}$$

Im zweiten Fall verläuft der Beweis vollständig analog.

Ist für eine beliebige natürliche Zahl  $p$  und  $m = |B|$  der Fluß  $f_{p+m}$  nicht maximal, so ergibt sich die Ungleichung

$$L_{p+m}(u, v) \geq L_p(u, v) + 2 \quad (15.8)$$

folgendermaßen aus 1., 2. und 3. Da jeder Weg  $W_i$  einen minimalen Bogen enthält, existieren zwei Zahlen  $i, j$  mit  $p \leq i < j \leq p + m$ , so daß die beiden Wege  $W_i$  und  $W_j$  den gleichen

minimalen Bogen  $xy$  besitzen. Ist der Bogen  $xy$  auf den beiden Wegen  $W_i$  und  $W_j$  verschieden orientiert, so folgt aus 3.  $L_j(u, v) \geq L_i(u, v) + 2$ . Hat der Bogen  $xy$  auf  $W_i$  und  $W_j$  die gleiche Orientierung, so existiert nach 1. ein  $q$  mit  $p \leq i < q < p + m$ , so daß  $xy$  auf  $W_q$  eine andere Orientierung als auf  $W_i$  besitzt. Aus 3. folgt dann wieder  $L_q(u, v) \geq L_i(u, v) + 2$ . Für  $r = j$  oder  $r = q$  ergibt sich daraus zusammen mit 2.

$$L_{p+m}(u, v) \geq L_r(u, v) \geq L_i(u, v) + 2 \geq L_p(u, v) + 2.$$

Die Ungleichung (15.8) liefert uns sofort das gewünschte Ergebnis. Denn wäre der Fluß  $f_\ell$  mit  $\ell = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor m$  nicht maximal, so erhielten wir folgenden Widerspruch

$$n - 1 \geq L_\ell(u, v) \geq L_0(u, v) + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq n. \quad \parallel$$

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß es keine Schwierigkeiten bereitet, einen  $f$ -ungesättigten Wurzelbaum  $T$  so zu erzeugen, daß ein durch  $T$  gegebener  $f$ -zunehmender Weg auch automatisch ein kürzester ist. Man geht dazu wie nach Definition 15.6 beschrieben vor, wobei allerdings der  $f$ -ungesättigte bzw.  $f$ -positive Bogen  $k$  so gewählt wird, daß der Abstand seiner aus  $A$  stammenden Ecke minimal ist (man vgl. dazu den ersten Algorithmus).

### 15.3 Anwendungen der Netzwerktheorie

Als erstes wollen wir zeigen, wie man den Mengerschen Satz 14.23 mit Hilfe der Netzwerktheorie beweisen kann. Dazu ist das nächste Ergebnis sehr hilfreich.

**Satz 15.9.** Es sei  $N = (E, B, u, v, c)$  ein Netzwerk mit  $c(k) = 1$  für alle Bogen  $k \in B$ .

- i) Ist  $f$  ein maximaler Fluß in  $N$ , so ist die Flußstärke  $w(f)$  gleich der maximalen Anzahl  $p$  der bogendisjunkten, orientierten Wege von  $u$  nach  $v$ .
- ii) Ist  $L$  ein minimaler Schnitt in  $N$ , so ist  $\text{cap } L$  gleich der minimalen Anzahl  $q$  von Bogen, deren Streichung alle orientierten Wege von  $u$  nach  $v$  zerstört.

*Beweis.* i) Im Fall  $w(f) = 0$  oder  $p = 0$  ist nichts zu beweisen. Daher seien im folgenden  $w(f) \geq 1$  und  $p \geq 1$ . Nun wählen wir einen maximalen Fluß  $f$  mit  $f(k) \in \mathbf{N}_0$  für alle  $k \in B$  (nach Satz 15.7 ist das möglich). Wegen  $c(k) = 1$  gilt dann  $f(k) = 0$  oder  $f(k) = 1$  für alle  $k \in B$ . Ist  $B'$  die Menge aller Bogen von  $N$ , die  $f$ -Null sind, so sei  $D$  diejenige Komponente von  $N - B'$ , die die Ecken  $u$  und  $v$  enthält. Daraus folgt  $d^+(u, D) = w(f) = d^-(v, D)$  und  $d^+(a, D) = f^+(a) = f^-(a) = d^-(a, D)$  für alle  $a \neq u, v$ . Daher gibt es nach Satz 3.13  $w(f)$  bogendisjunkte, orientierte Wege von  $u$  nach  $v$  in  $D$ , also auch in  $N$ , womit  $w(f) \leq p$  gilt.

Ist andererseits  $W_1, W_2, \dots, W_p$  ein maximales System bogendisjunkter, orientierter Wege von  $u$  nach  $v$  in  $N$ , so ist  $f^* : B \rightarrow \mathbf{Z}$  mit

$$f^*(k) = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } k \text{ ein Bogen von } W_i \text{ ist } (i = 1, 2, \dots, p) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

ein Fluß in  $N$ , für den  $w(f^*) = p$  gilt. Da  $f$  ein maximaler Fluß in  $N$  ist, folgt daraus  $p = w(f^*) \leq w(f)$ , womit wir insgesamt  $p = w(f)$  bewiesen haben.

ii) Hat der minimale Schnitt  $L$  die Form  $L = (A, \bar{A})$ , so gibt es in  $N - L$  keinen Bogen von  $A$  nach  $\bar{A}$  und daher wegen  $u \in A$  und  $v \in \bar{A}$  keinen orientierten Weg von  $u$  nach  $v$ . Damit haben wir  $q \leq \text{cap } L$  gezeigt.



Nun sei andererseits  $B^* = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$  eine minimale Bogenmenge von  $N$  mit der Eigenschaft, daß in  $N - B^*$  kein orientierter Weg von  $u$  nach  $v$  existiert, und  $S$  diejenige Eckenmenge aus  $E$ , die man in  $N - B^*$  von  $u$  aus erreicht. Wegen  $u \in S$  und  $v \in \overline{S}$  ist  $(S, \overline{S})$  ein Schnitt in  $N$ . Da es in  $N - B^*$  keinen Bogen von  $S$  nach  $\overline{S}$  gibt, und da jeder Bogen von  $N$  die Kapazität 1 besitzt, gilt  $\text{cap}(S, \overline{S}) \leq q$ . Aus der Minimalität des Schnittes  $L$  ergibt sich dann  $\text{cap} L \leq \text{cap}(S, \overline{S}) \leq q$  und daher insgesamt  $q = \text{cap} L$ .  $\parallel$

Aus den Sätzen 15.6 und 15.9 läßt sich nun der Satz 14.23 recht einfach gewinnen, den wir auf die in diesem Abschnitt verwendete Terminologie äquivalent umschreiben.

**Satz (Satz 14.23).** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph und  $a, b$  zwei verschiedene Ecken von  $D$ . Dann ist die maximale Anzahl  $p$  der bogendisjunkten, orientierten Wege von  $a$  nach  $b$  gleich der minimalen Anzahl  $q$  von Bogen, deren Streichung alle orientierten Wege von  $a$  nach  $b$  zerstört.

*Beweis.* Gibt es in  $D$  keinen orientierten Weg von  $a$  nach  $b$ , so gibt es nichts zu beweisen. Daher gebe es in  $D$  einen orientierten Weg von  $a$  nach  $b$ .

Sei  $D^*$  genau derjenige Teildigraph von  $D$ , der aus allen Ecken und Bogen besteht, die zu einem orientierten Weg von  $a$  nach  $b$  gehören. Man beachte, daß sich dabei die Größen  $p$  und  $q$  nicht verändert haben, und  $a$  die einzige Ecke mit  $d^-(a, D^*) = 0$  und  $b$  die einzige Ecke mit  $d^+(b, D^*) = 0$  ist. Darüber hinaus ist  $D^*$  natürlich zusammenhängend. Versehen wir jeden Bogen  $k$  von  $D^*$  mit der Kapazität  $c(k) = 1$ , so erhalten wir ein Netzwerk  $N = (E, B, a, b, c)$  mit  $E = E(D^*)$  und  $B \subseteq B(D)$ . Ist  $L$  ein minimaler Schnitt und  $f$  ein maximaler Fluß in  $N$ , so ergibt sich aus Satz 15.6 und Satz 15.9 i) und ii)

$$p = w(f) = \text{cap} L = q,$$

womit der Satz 14.23 vollständig bewiesen ist.  $\parallel$

**Bemerkung 15.2.** Dieser Beweis von Satz 14.23 zeigt uns, daß man in einem schlichten Digraphen  $D$ , zusammen mit dem Algorithmus von Edmonds und Karp, die maximale Anzahl der bogendisjunkten Wege zwischen je zwei Ecken von  $D$  und damit wegen Satz 14.25 die Bogenzusammenhangszahl  $\lambda(D)$  bestimmen kann.

Ist  $G$  ein schlichter Graph, so können wir durch Übergang zum Digraphen  $D(G)$  wegen des Satzes 14.12 die maximale Anzahl der kantendisjunkten Wege zwischen je zwei Ecken von  $G$  und die Kantenzusammenhangszahl  $\lambda(G)$  berechnen.

Aus Gründen der Vollständigkeit wollen wir noch kurz skizzieren, wie man Satz 14.19 aus Satz 14.23 gewinnen kann. Dazu formulieren wir auch Satz 14.19 äquivalent um.

**Satz (Satz 14.19).** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph und  $a, b$  zwei verschiedene Ecken von  $D$ , die durch keinen Bogen  $(a, b)$  verbunden sind. Dann ist die maximale Anzahl  $p$  der kreuzungsfreien, orientierten Wege von  $a$  nach  $b$  gleich der minimalen Anzahl  $q$  von Ecken, deren Herausnahme aus  $D$  alle orientierten Wege von  $a$  nach  $b$  zerstört.

*Beweis.* Aus  $D$  konstruieren wir einen neuen schlichten Digraphen  $D'$  wie folgt:

- i) Da die Bogen  $(x, a)$  und  $(b, y)$  keinen Beitrag zu den Größen  $p$  und  $q$  liefern, werden sie aus  $D$  entfernt.
- ii) Jede Ecke  $x \neq a, b$  werde durch zwei neue Ecken  $x'$  und  $x''$  ersetzt, die durch einen Bogen  $(x', x'')$  verbunden sind.



- iii) Jeder Bogen  $(a, x)$  bzw.  $(y, b)$  aus  $D$  wird durch einen Bogen  $(a, x')$  bzw.  $(y'', b)$  in  $D'$  ersetzt.
- iv) Jeder Bogen  $(x, y)$  mit  $x, y \neq a, b$  aus  $D$  wird durch einen Bogen  $(x'', y')$  in  $D'$  ersetzt.

Man sieht nun, daß zu jedem orientierten Weg von  $a$  nach  $b$  in  $D$  eindeutig ein orientierter Weg von  $a$  nach  $b$  in  $D'$  existiert und umgekehrt, indem man  $(x, y)$  in  $D$  durch  $(x', x'', y')$  in  $D'$  ersetzt und umgekehrt. Weiter erkennt man, daß zwei orientierte Wege von  $a$  nach  $b$  in  $D$  genau dann kreuzungsfrei sind, wenn die entsprechenden orientierten Wege in  $D'$  bogendisjunkt sind, denn zwei orientierte Wege in  $D'$  sind wegen  $d^+(x', D') = d^-(x'', D') = 1$  genau dann bogendisjunkt, wenn sie kreuzungsfrei sind. Daher ist die maximale Anzahl der bogendisjunkten, orientierten Wege von  $a$  nach  $b$  in  $D'$  gleich  $p$ . Man überlegt sich ferner, daß die minimale Anzahl von Bogen, deren Herausnahme aus  $D'$  alle orientierten Wege von  $a$  nach  $b$  zerstört, gleich  $q$  ist. Durch Anwendung von Satz 14.23 erhalten wir dann das gewünschte Ergebnis. ||

Zum Abschluß dieses Kapitels leiten wir aus der Netzwerktheorie einige weitere Faktorsätze her.

**Satz 15.10.** Es sei  $G$  ein schlichter und bipartiter Graph mit der Bipartition  $A, B$  und  $f: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Abbildung. Der Graph  $G$  besitzt genau dann einen Faktor  $F$  mit  $d(a, F) = f(a)$  für alle Ecken  $a \in A$  und  $d(b, F) \leq f(b)$  für alle  $b \in B$ , wenn für alle  $X \subseteq A$  und alle  $Y \subseteq B$  gilt:

$$f(X) \leq m_G(X, Y) + f(B - Y)$$

*Beweis.* Besitzt  $G$  einen derartigen Faktor  $F$ , so gilt für alle  $X \subseteq A$  und  $Y \subseteq B$

$$\begin{aligned} f(X) &= m_F(X, Y) + m_F(X, B - Y) \\ &\leq m_G(X, Y) + m_F(A, B - Y) \\ &\leq m_G(X, Y) + f(B - Y). \end{aligned}$$

Zum Beweis der umgekehrten Richtung konstruieren wir ein Netzwerk  $N = (E, B, u, v, c)$  wie folgt. Es sei  $E = E(G) \cup \{u, v\}$ , wobei  $u$  und  $v$  zwei neue Ecken sind. Jede Kante aus  $K(G)$  erhält die Orientierung von  $A$  nach  $B$ . Zusätzlich fügen wir noch die Bogenmengen  $\{ua \mid a \in A\}$  und  $\{bv \mid b \in B\}$  hinzu. Schließlich sei die Kapazitätsfunktion gegeben durch:

$$c(xy) = \begin{cases} 1, & \text{falls } xy \in K(G) \\ f(y), & \text{falls } x = u \\ f(x), & \text{falls } y = v \end{cases}$$

Es sei nun  $L = (S, \overline{S})$  ein beliebiger Schnitt in  $N$ . Wir setzen  $X = A \cap S$  und  $Y = B \cap \overline{S}$ . Nun gilt mit unserer Voraussetzung

$$\begin{aligned} \text{cap } L &= f(A - S) + |(A \cap S, B \cap \overline{S})| + f(B \cap S) \\ &= f(A - S) + m_G(X, Y) + f(B - Y) \\ &\geq f(A - S) + f(A \cap S) = f(A). \end{aligned}$$

Da für den Schnitt  $L_0 = (\{u\}, E - \{u\})$  genau  $\text{cap } L_0 = f(A)$  gilt, ist  $L_0$  ein minimaler Schnitt, womit nach Satz 15.6 in  $N$  ein maximaler Fluß die Flußstärke  $f(A)$  besitzt. Wegen

Satz 15.7 können wir davon ausgehen, daß in  $N$  sogar ein ganzzahliger Fluß  $g$  der Flußstärke  $f(A)$  existiert. Der Fluß  $g$  bestimmt nun einen Faktor  $F$  in folgendem Sinne: Eine Kante  $ab \in E(G)$  gehört zu diesem Faktor genau dann, wenn der entsprechende Bogen  $(a, b)$  im Netzwerk  $g$ -positiv ist. Wie man leicht sieht, besitzt dieser Faktor gerade die gewünschten Eigenschaften.  $\parallel$

Setzen wir im vorangegangenen Satz  $f(x) = 1$  für alle Ecken  $x \in E(G)$ , so entspricht der oben beschriebene Faktor gerade einem Matching in  $G$ , welches mit allen Ecken von  $A$  inzidiert. Für ein solches Matching hatten wir schon im Satz von König-Hall (Satz 6.7) eine äquivalente Bedingung angegeben. Tatsächlich ist es nicht schwer zu überprüfen (mit  $X = S$  und  $B - Y = N(S, G)$ ), daß beide Kriterien äquivalent sind.

Gilt in Satz 15.10 sogar  $f(A) = f(B)$ , so ist der oben beschriebene Faktor zwangsläufig ein  $f$ -Faktor. Dieser Spezialfall des Satzes 15.10 heißt  $f$ -Faktorsatz für bipartite Graphen und geht auf Ore [3] 1956 und Ryser [1] 1957 zurück.

Erinnern wir uns daran, daß der  $f$ -Faktorsatz von Tutte (Satz 7.9) ein Kriterium für die Existenz eines Graphen mit vorgegebener Gradsequenz liefert (Satz 7.12), so ist es nun wenig überraschend, daß wir ein ähnliches Kriterium für bipartite Graphen angeben können.

**Definition 15.8.** Seien  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_p$  und  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_q$  nicht-negative ganze Zahlen. Das Paar  $((a_1, a_2, \dots, a_p), (b_1, b_2, \dots, b_q))$  heißt *bipartit graphisch*, wenn es einen schlichten und bipartiten Graphen  $G$  mit einer Bipartition  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}, \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$  gibt, der  $d(x_i, G) = a_i$  für  $i = 1, 2, \dots, p$  und  $d(y_j, G) = b_j$  für  $j = 1, 2, \dots, q$  erfüllt.

**Satz 15.11 (Gale [1] 1957, Ryser [1] 1957).** Ein gegebenes Paar von zwei Zahlentupeln

$$((a_1, a_2, \dots, a_p), (b_1, b_2, \dots, b_q))$$

wie in Definition 15.8 beschrieben, ist genau dann bipartit graphisch, wenn  $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{j=1}^q b_j$  ist und für jedes  $t = 1, 2, \dots, p$  gilt:

$$\sum_{i=1}^t a_i \leq \sum_{j=1}^q \min\{b_j, t\}$$

*Beweis.* Es sei  $K_{p,q}$  der vollständige bipartite Graph mit der Bipartition  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  und  $\{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ . Weiterhin sei  $f : E(K_{p,q}) \rightarrow \mathbf{N}_0$  definiert durch

$$f(w) = \begin{cases} a_i, & \text{falls } w = x_i \\ b_j, & \text{falls } w = y_j. \end{cases}$$

Offensichtlich ist nun  $((a_1, a_2, \dots, a_p), (b_1, b_2, \dots, b_q))$  genau dann bipartit graphisch, wenn  $K_{p,q}$  einen  $f$ -Faktor besitzt.

Die Notwendigkeit der Ungleichungen erhalten wir wie folgt. Es sei  $F$  ein  $f$ -Faktor von  $K_{p,q}$ . Dann gilt für ein beliebiges  $t \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$\sum_{i=1}^t a_i = \sum_{i=1}^t d(x_i, F) = \sum_{j=1}^q |N_F(y_j) \cap \{x_1, x_2, \dots, x_t\}| \leq \sum_{j=1}^q \min\{b_j, t\}.$$

Daß die angegebenen Ungleichungen auch hinreichend für die Existenz eines  $f$ -Faktors in  $K_{p,q}$  sind, prüfen wir mit Hilfe von Satz 15.10 nach. Zunächst können wir feststellen, daß

$\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{j=1}^q b_j$  gerade äquivalent zu  $f(\{x_1, x_2, \dots, x_p\}) = f(\{y_1, y_2, \dots, y_q\})$  ist. Wie oben bemerkt, ist deshalb ein Faktor mit den in Satz 15.10 beschriebenen Eigenschaften gerade ein  $f$ -Faktor. Wir überprüfen deshalb nur noch die Gültigkeit der Ungleichung aus Satz 15.10.

Es seien  $X \subseteq A = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  und  $Y \subseteq B = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ . Dann gilt für  $t = |X|$

$$\begin{aligned} f(X) &\leq \sum_{i=1}^{|X|} a_i \leq \sum_{j=1}^q \min\{b_j, |X|\} \\ &= \sum_{j=1}^{|Y|} \min\{b_j, |X|\} + \sum_{j=|Y|+1}^q \min\{b_j, |X|\} \\ &\leq |X||Y| + \sum_{j=|Y|+1}^q b_j = m_{K_{p,q}}(X, Y) + \sum_{j=|Y|+1}^q b_j \\ &\leq m_{K_{p,q}}(X, Y) + f(B - Y). \end{aligned} \quad \parallel$$

**Satz 15.12.** Es sei  $D = (E, B)$  ein schlichter Digraph und  $f, g: E \rightarrow \mathbb{N}_0$  zwei Abbildungen. Es existiert genau dann ein Faktor  $F$  von  $D$  mit  $d^+(x, F) = f(x)$  und  $d^-(x, F) = g(x)$  für alle  $x \in E$ , wenn  $f(E) = g(E)$  ist, und für alle  $X, Y \in E$  gilt:

$$f(X) \leq m_D(X, Y) + g(E - Y).$$

*Beweis.* Ausgehend von  $D$  bilden wir einen bipartiten Graphen  $G$  mit  $E(G) = \{x', x'' \mid x \in E\}$  und  $K(G) = \{x'y'' \mid (x, y) \in B\}$ . Weiter definieren wir  $h: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  durch  $h(x') = f(x)$  und  $h(x'') = g(x)$ . Nun besitzt  $D$  den gewünschten Faktor  $F$  offensichtlich genau dann, wenn  $G$  einen  $h$ -Faktor besitzt. Da  $f(E) = g(E)$  gilt, was äquivalent zu  $h(\{x' \mid x \in E\}) = h(\{x'' \mid x \in E\})$  ist, genügt es, die Ungleichung aus Satz 15.10 nachzuprüfen. Diese ist aber offensichtlich äquivalent zu der gegebenen Ungleichung.  $\parallel$

Vertiefte Informationen zur Netzwerktheorie findet man in dem Buch von Ahuja, Magnanti und Orlin [1] aus dem Jahre 1993.

# Kapitel 16

## Ramsey-Theorie

### 16.1 Die klassischen Ramsey-Zahlen

Unser erstes Ergebnis stellt eine Lösung der Aufgabe 6.11 dar.

**Satz 16.1.** Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $n \geq 6$ , so gilt  $\omega(G) \geq 3$  oder  $\alpha(G) \geq 3$ .

*Beweis.* Es sei  $a$  eine beliebige Ecke aus  $G$ . Wegen  $n \geq 6$  ist  $a$  mit drei Kanten aus  $G$  oder mit drei Kanten aus  $\overline{G}$  inzident. Es seien  $aa_1, aa_2$  und  $aa_3$  drei Kanten aus  $G$ . Existiert in  $G$  eine der Kanten  $a_1a_2, a_1a_3$  oder  $a_2a_3$ , so gilt  $\omega(G) \geq 3$ , existiert keine dieser drei Kanten, so gilt  $\alpha(G) \geq 3$ . Beachtet man die Identitäten  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$  und  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ , so erkennt man, daß der Beweis analog verläuft, falls die drei Kanten  $aa_1, aa_2$  und  $aa_3$  zu  $\overline{G}$  gehören.  $\parallel$

Der Kreis der Länge 5 zeigt uns, daß Satz 16.1 für Graphen mit 5 Ecken im allgemeinen nicht mehr gilt.

**Definition 16.1.** Es seien  $p, q \in \mathbf{N}$ . Die *Ramsey-Zahl*  $r(p, q)$  ist die kleinste natürliche Zahl, so daß für jeden schlichten Graphen  $G$  der Ordnung  $n \geq r(p, q)$  gilt:  $\omega(G) \geq p$  oder  $\alpha(G) \geq q$ .

**Bemerkung 16.1.** i) Satz 16.1 und der Kreis der Länge 5 liefern uns sofort  $r(3, 3) = 6$ .

ii) Durch Übergang vom Graphen  $G$  zum Komplementärgraphen  $\overline{G}$ , erkennt man leicht, daß die Ramsey-Zahlen symmetrisch sind, d.h., es gilt  $r(p, q) = r(q, p)$ .

iii) Ohne Mühe berechnet man  $r(1, q) = r(p, 1) = 1$  und  $r(2, q) = r(q, 2) = q$  für  $q \geq 2$ .

Die Ramsey-Zahlen sind nach dem Mathematiker Frank Ramsey benannt, der dieses Konzept unter allgemeinen mengentheoretischen Gesichtspunkten 1930 in [1] entwickelte und im wesentlichen die Existenz solcher Zahlen nachgewiesen hat. Für unseren Spezialfall wollen wir die Existenz der Ramsey-Zahlen mit Hilfe eines Resultats von Erdős und Szekeres nachweisen, das uns zusätzlich eine nützliche Beziehung zwischen gewissen Ramsey-Zahlen liefert.

**Satz 16.2 (Erdős, Szekeres [1] 1935).** Für je zwei natürliche Zahlen  $p \geq 2$  und  $q \geq 2$  existiert die Ramsey-Zahl  $r(p, q)$ , und es gilt

$$r(p, q) \leq r(p, q-1) + r(p-1, q). \quad (16.1)$$

Weiterhin tritt in (16.1) keine Gleichheit ein, wenn sowohl  $r(p, q-1)$  als auch  $r(p-1, q)$  gerade ist.

*Beweis.* Der Beweis von (16.1) erfolgt durch Induktion nach  $p + q$ . Wegen Bemerkung 16.1 ist die Ungleichung (16.1) für  $p = q = 2$  erfüllt. Ist  $p + q \geq 5$ , so existieren nach Induktionsvoraussetzung die Ramsey-Zahlen  $r(p, q - 1)$  und  $r(p - 1, q)$ .

Ist nun  $G$  ein Graph der Ordnung  $r(p, q - 1) + r(p - 1, q)$  und  $v$  eine Ecke von  $G$ , so setzen wir  $T = N(v, G)$  und  $S = E(G) - N[v, G]$ . Wegen

$$|S| + |T| = |E(G)| - 1 = r(p, q - 1) + r(p - 1, q) - 1,$$

gilt entweder  $|S| \geq r(p, q - 1)$  oder  $|T| \geq r(p - 1, q)$ . Ist  $|S| \geq r(p, q - 1)$ , so enthält  $G[S]$  eine Clique der Ordnung  $p$  oder eine unabhängige Menge aus  $q - 1$  Ecken. Dann besitzt aber  $G[S \cup \{v\}]$  eine Clique der Ordnung  $p$  oder  $q$  unabhängige Ecken, womit (16.1) in diesem Fall nachgewiesen ist. Den Fall  $|T| \geq r(p - 1, q)$  behandelt man analog.

Sind nun  $r(p, q - 1)$  und  $r(p - 1, q)$  gerade Zahlen, so sei  $G$  ein Graph der Ordnung  $r(p, q - 1) + r(p - 1, q) - 1$ . Da  $G$  von ungerader Ordnung ist, existiert in  $G$  eine Ecke  $v$  von geradem Grad, womit  $v$  nicht zu genau  $r(p - 1, q) - 1$  Ecken adjazent ist. Dementsprechend muß auch in dieser Situation entweder  $|E(G) - N[v, G]| \geq r(p, q - 1)$  oder  $|N(v, G)| \geq r(p - 1, q)$  gelten. Analog zu oben schließen wir dann  $\omega(G) \geq p$  oder  $\alpha(G) \geq q$  und damit sogar

$$r(p, q) \leq r(p, q - 1) + r(p - 1, q) - 1. \quad \parallel$$

Aus Satz 16.2 erhält man induktiv sofort eine obere Schranke für die Ramsey-Zahlen.

**Folgerung 16.1.** Für zwei natürliche Zahlen  $p, q \geq 2$  gilt

$$r(p, q) \leq \binom{p + q - 2}{p - 1} = \binom{p + q - 2}{q - 1}. \quad (16.2)$$

Ist eine der beiden Zahlen  $p$  oder  $q$  gleich 1 oder 2, so wird die Ungleichung (16.2) zur Gleichung. Wegen Bemerkung 16.1 i) wird die Ungleichung (16.2) auch für  $p = q = 3$  mit Gleichheit erfüllt. Darüber hinaus ergibt sich aus (16.2) die Abschätzung  $r(3, q) \leq (q^2 + q)/2$ . Im nächsten Satz werden wir für  $r(3, q)$  eine bessere Schranke präsentieren.

**Satz 16.3.** Für jede natürliche Zahl  $q \geq 3$  gilt

$$r(3, q) \leq \frac{1}{2}(q^2 + 3). \quad (16.3)$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis von Satz 16.3 durch Induktion nach  $q$ , wobei wir für  $q = 3$  die Ungleichung (16.3) schon durch (16.2) bestätigt haben. Ist  $q \geq 4$ , so gilt nach Satz 16.2 und Bemerkung 16.1 iii)

$$r(3, q) \leq r(2, q) + r(3, q - 1) = q + r(3, q - 1) \quad (16.4)$$

und im Fall, daß  $q$  und  $r(3, q - 1)$  gerade sind sogar

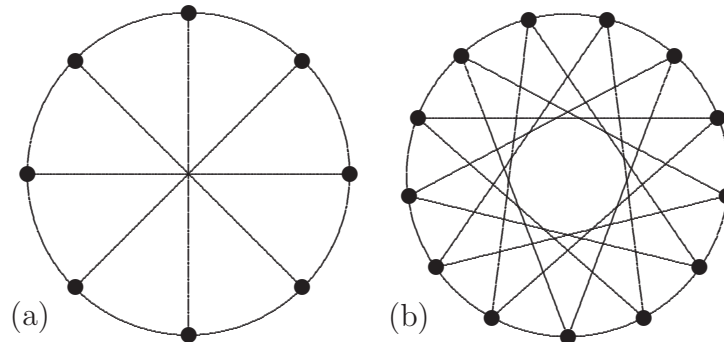
$$r(3, q) \leq q - 1 + r(3, q - 1). \quad (16.5)$$

Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung folgt aus (16.4)

$$r(3, q) \leq q + \frac{(q - 1)^2 + 3}{2} = \frac{q^2 + 4}{2}. \quad (16.6)$$

Ist  $q$  ungerade, so ist auch  $q^2 + 4$  ungerade, womit sich in diesem Fall die gewünschte Ungleichung aus (16.6) ergibt. Ist  $q$  gerade und gilt die Ungleichung  $r(3, q - 1) < ((q - 1)^2 + 3)/2$ , so ergibt sich das Ergebnis aus (16.4). Ist  $q$  gerade und gilt  $r(3, q - 1) = ((q - 1)^2 + 3)/2$ , so ist auch  $r(3, q - 1)$  gerade und dann liefert (16.5) die gewünschte Abschätzung (16.3).  $\parallel$

**Beispiel 16.1.** Aus Satz 16.3 folgt  $r(3, 4) \leq 9$  und  $r(3, 5) \leq 14$ . Die beiden skizzierten Graphen (a) bzw. (b) der Ordnung 8 bzw. 13 besitzen kein Dreieck, und ihre Unabhängigkeitszahlen sind 3 bzw. 4. Daraus ergibt sich  $r(3, 4) = 9$  und  $r(3, 5) = 14$ .



**Beispiel 16.2.** Aus (16.1) und (16.3) ergibt sich zusammen mit Bemerkung 16.1 ii) die Ungleichung

$$r(4, 4) \leq r(4, 3) + r(3, 4) = 2r(3, 4) \leq 18.$$

Der auf der nächsten Seite skizzierte 8-reguläre Graph (c) mit 17 Ecken, der weder eine Clique der Ordnung 4 noch eine unabhängige Menge aus 4 Ecken besitzt, zeigt uns schließlich  $r(4, 4) = 18$ .

Die vier schon berechneten Ramsey-Zahlen  $r(3, 3) = 6$ ,  $r(3, 4) = 9$ ,  $r(3, 5) = 14$  und  $r(4, 4) = 18$  findet man in einer Arbeit von Greenwood und Gleason [1] aus dem Jahre 1955.

**Bemerkung 16.2.** Die genaue Berechnung der Ramsey-Zahlen ist im allgemeinen ein sehr schwieriges Problem. Außer den schon genannten Ramsey-Zahlen sind nur noch die folgenden fünf bekannt.

Im Jahre 1968 zeigten Graver und Yackel [1], daß  $r(3, 6) = 18$  und  $r(3, 7) = 23$  gilt.

Grinstead und Roberts [1] haben 1982 die Ramsey-Zahl  $r(3, 9) = 36$  bestimmt.

Erst im Jahre 1992 wurde die Ramsey-Zahl  $r(3, 8) = 28$  durch McKay und K. M. Zhang [1] bestätigt, die dabei die Abschätzung  $r(3, 8) \geq 28$  von Grinstead und Roberts [1] benutzten.

Mit einem nicht unerheblichen Aufwand wurde 1995 schließlich die Ramsey-Zahl  $r(4, 5) = 25$  von McKay und Radziszowski [1] nachgewiesen.

Darüber hinaus gibt es noch verschiedene obere und untere Schranken von  $r(3, t)$  für  $10 \leq t \leq 15$ , die man in der Arbeit von McKay und K. M. Zhang [1] nachlesen kann. Noch mehr Informationen über den neuesten Stand der Forschung findet man in dem Übersichtsartikel "Small Ramsey numbers" von Radziszowski [1] aus dem Jahre 2006.

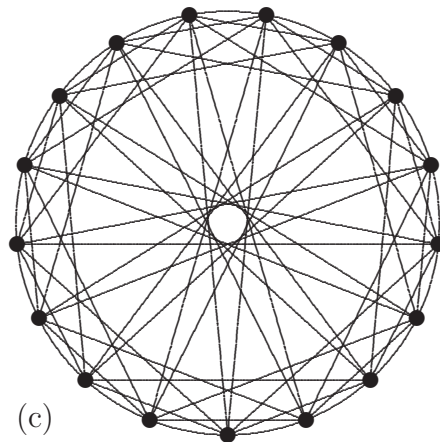
Wie wir gesehen haben, ist die Bestimmung von Ramsey-Zahlen eine Prozedur, die aus zwei Schritten besteht. Einerseits berechnet man obere Schranken, und andererseits konstruiert man Schärfebeispiele. Insbesondere bereitet die Konstruktion von solchen Beispielen bis heute große Schwierigkeiten. Überraschend ist, daß die besten Ergebnisse zum zweiten Schritt keineswegs konstruktiv erzielt wurden, sondern mit der sogenannten probabilistischen Methode, die wir im Beweis von Satz 16.5 vorstellen wollen. Dazu berechnen wir zunächst einmal die Anzahl der schlichten Graphen mit  $n$  Ecken.

**Satz 16.4.**  $\mathcal{G}_n$  die Menge aller schlichten Graphen der Ordnung  $n$ , so gilt

$$|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}.$$

(Dabei werden zwei Graphen mit gleicher Eckenmenge  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  genau dann als verschieden angesehen, wenn zwei verschiedene Ecken  $i$  und  $j$  existieren, die in dem einen der beiden Graphen adjazent, in dem anderen jedoch nicht adjazent sind. Bei dieser Betrachtung werden also die verschiedenen Graphen gezählt, nicht aber die Isomorphietypen.)

*Beweis.* Bekanntlich besitzt der vollständige Graph  $K_n$  genau  $\binom{n}{2}$  verschiedene Kanten. Jeder Graph aus  $\mathcal{G}_n$  ist durch Angabe seiner Kanten eindeutig bestimmt. Numeriert man alle möglichen Kanten von 1 bis  $\binom{n}{2}$  durch, und ordnet der Kante  $j$  die Zahl 0 bzw. 1 zu, falls die Kante  $j$  im Graphen  $G$  vorhanden bzw. nicht vorhanden ist, so erkennt man, daß  $|\mathcal{G}_n|$  die Anzahl der Kombinationen  $\binom{n}{2}$ -ter Ordnung von 2 Elementen mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge ist und damit  $2^{\binom{n}{2}}$  beträgt. ||



**Satz 16.5 (Erdős [1] 1947).** Für  $p \geq 2$  gilt

$$r(p, p) \geq 2^{\frac{p}{2}}.$$

*Beweis.* Wegen  $r(2, 2) = 2$  sei im folgenden  $p \geq 3$ . Wir nehmen an, daß es eine natürliche Zahl  $n < 2^{\frac{p}{2}}$  gibt, so daß jeder Graph  $G$  aus  $\mathcal{G}_n$  die Bedingung  $\omega(G) \geq p$  oder  $\alpha(G) \geq p$  erfüllt. Nun sei  $\mathcal{C}_n^p$  die Teilmenge von Graphen aus  $\mathcal{G}_n$ , die eine Clique der Ordnung  $p$  enthalten und  $\mathcal{U}_n^p$  die Teilmenge von Graphen aus  $\mathcal{G}_n$ , die eine unabhängige Menge von  $p$  Ecken besitzen. Es gilt natürlich  $|\mathcal{C}_n^p| = |\mathcal{U}_n^p|$ .

Die Graphen aus  $\mathcal{G}_n$  seien wieder auf der Eckenmenge  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  definiert. Für jede Teilmenge  $S \subseteq E$  mit  $|S| = p$  gibt es  $2^{\binom{n}{2} - \binom{p}{2}}$  Graphen in  $\mathcal{G}_n$ , in denen  $S$  eine Clique induziert, denn da  $\binom{p}{2}$  Kanten fest liegen, sind noch  $\binom{n}{2} - \binom{p}{2}$  Kanten frei verfügbar. Da es  $\binom{n}{p}$  verschiedene  $p$ -elementige Teilmengen  $S \subseteq E$  gibt, folgt

$$|\mathcal{C}_n^p| = |\mathcal{U}_n^p| \leq \binom{n}{p} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{p}{2}}.$$

Daraus ergibt sich zusammen mit unserer Annahme  $n < 2^{\frac{p}{2}}$  die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{C}_n^p|}{|\mathcal{G}_n|} = \frac{|\mathcal{U}_n^p|}{|\mathcal{G}_n|} &\leq \binom{n}{p} \cdot 2^{-\binom{p}{2}} \leq \frac{n^p}{p!} \cdot 2^{-\binom{p}{2}} \\ &< \frac{1}{p!} \cdot 2^{\frac{p^2}{2}} \cdot 2^{-\binom{p}{2}} = \frac{1}{p!} \cdot 2^{\frac{p}{2}} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Daher enthält  $\mathcal{G}_n$  mindestens einen Graphen, der weder eine Clique noch eine unabhängige Eckenmenge mit  $p$  Ecken besitzt, was aber unserer Annahme widerspricht.  $\parallel$

Unter Ausnutzung der bekannten Stirlingschen Formel gelang es Spencer [1] im Jahre 1975, die untere Schranke von Erdős um den Faktor 2 zu verbessern.

## 16.2 Verallgemeinerte Ramsey-Zahlen

Sind  $p_1$  und  $p_2$  zwei natürliche Zahlen, so bedeutet die Ramsey-Zahl  $r(p_1, p_2)$  die kleinste natürliche Zahl, so daß für jede Faktorisierung  $K_n = H_1 \uplus H_2$  mit  $n \geq r(p_1, p_2)$  gilt:  $K_{p_1} \subseteq H_1$  oder  $K_{p_2} \subseteq H_2$ . Diese äquivalente Definition der Ramsey-Zahl legt folgende Verallgemeinerung nahe.

**Definition 16.2.** Es seien  $G_1, G_2, \dots, G_q$  ( $q \geq 2$ ) schlichte Graphen. Die *verallgemeinerte Ramsey-Zahl*  $r(G_1, G_2, \dots, G_q)$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n$ , so daß für jede Faktorisierung

$$K_n = H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$$

gilt:  $G_i \subseteq H_i$  für mindestens ein  $i = 1, 2, \dots, q$ . Mit dieser Definition ergibt sich  $r(K_{p_1}, K_{p_2}) = r(p_1, p_2)$ . Dementsprechend setzen wir abkürzend  $r(K_{p_1}, K_{p_2}, \dots, K_{p_q}) = r(p_1, p_2, \dots, p_q)$ .

Analog zum Satz von Erdős und Szekeres (Satz 16.2) weisen wir nun die Existenz der verallgemeinerten Ramsey-Zahl  $r(p_1, p_2, \dots, p_q)$  nach.

**Satz 16.6 (Cockayne [1] 1972).** Gegeben seien  $q \geq 2$  natürliche Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_q \geq 2$ . Dann existiert die verallgemeinerte Ramsey-Zahl  $r(p_1, p_2, \dots, p_q)$ , und es gilt

$$r(p_1, p_2, \dots, p_q) \leq r(p_1 - 1, p_2, \dots, p_q) + r(p_1, p_2 - 1, \dots, p_q) + \dots + r(p_1, \dots, p_{q-1}, p_q - 1) - q + 2. \quad (16.7)$$

*Beweis.* Der Beweis der Abschätzung (16.7) erfolgt durch Induktion nach  $p_1 + p_2 + \dots + p_q$ , wobei für  $p_1 = p_2 = \dots = p_q = 2$  in der Ungleichung (16.7) offensichtlich das Gleichheitszeichen steht. Ist  $p_1 + p_2 + \dots + p_q \geq 2q + 1$ , so existieren nach Induktionsvoraussetzung die verallgemeinerten Ramsey-Zahlen auf der rechten Seite von (16.7). Kürzen wir die Summe der rechten Seite von (16.7) mit  $n$  ab, so sei  $K_n = H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$  eine beliebige Faktorisierung des vollständigen Graphen  $K_n$ . Ist  $v$  eine beliebige Ecke des  $K_n$ , so gilt  $\sum_{i=1}^q |N(v, H_i)| = n - 1$ , womit mindestens ein  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$  existiert mit  $N = |N(v, H_j)| \geq r(p_1, \dots, p_j - 1, \dots, p_q)$ . Ist nun  $K_N$  der vollständige Graph mit der Eckenmenge  $N(v, H_j)$  und  $F_i = K_N \cap H_i$ , so gilt offensichtlich  $K_N = F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_q$ . Wegen  $N \geq r(p_1, \dots, p_j - 1, \dots, p_q)$  folgt aus der Definition der verallgemeinerten Ramsey-Zahl  $K_{p_j-1} \subseteq F_j \subseteq H_j$  oder  $K_{p_i} \subseteq F_i \subseteq H_i$  für  $i \neq j$ . Ist  $K_{p_i} \subseteq H_i$  für  $i \neq j$ , so sind wir fertig.

Daher gelte nun  $K_{p_j-1} \subseteq F_j$ . Da die Ecke  $v$  in  $H_j$  zu allen Ecken von  $F_j$  adjazent ist, ergibt sich sogar  $K_{p_j} \subseteq H_j$ , womit  $r(p_1, p_2, \dots, p_q) \leq N + 1 \leq n$ , also (16.7) nachgewiesen ist.  $\parallel$

**Bemerkung 16.3.** Sind  $G_1, G_2, \dots, G_q$  schlichte Graphen der Ordnung  $p_1, p_2, \dots, p_q$ , so gilt natürlich

$$r(G_1, G_2, \dots, G_q) \leq r(p_1, p_2, \dots, p_q),$$

womit auch die Existenz der verallgemeinerten Ramsey-Zahlen, die wir im folgenden wieder kurz Ramsey-Zahlen nennen werden, vollständig nachgewiesen ist.

**Satz 16.7.** Die Ramsey-Zahlen sind symmetrisch, d.h., es gilt

$$r(G_1, G_2, \dots, G_q) = r(G_{\pi(1)}, G_{\pi(2)}, \dots, G_{\pi(q)}),$$

wobei  $\pi$  eine Permutation der natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, q$  bedeutet.

*Beweis.* Wir setzen  $r = r(G_1, G_2, \dots, G_q)$  und  $r_\pi = r(G_{\pi(1)}, G_{\pi(2)}, \dots, G_{\pi(q)})$  und nehmen o.B.d.A.  $r_\pi < r$  an. Dann existiert eine Zahl  $n$  mit  $r_\pi \leq n < r$  und eine Faktorisierung  $K_n = H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$ , so daß  $G_i \not\subseteq H_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$  gilt. Setzen wir  $F_i = H_{\pi(i)}$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$ , so ist  $K_n = F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_q$  auch eine Faktorisierung des  $K_n$ . Nun gilt offensichtlich  $G_{\pi(i)} \not\subseteq F_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$ , was unserer Voraussetzung  $n \geq r_\pi$  widerspricht. ||

**Bemerkung 16.4.** Im Jahre 1955 haben Greenwood und Gleason [1] schon die schwächere Abschätzung

$$r(p_1, p_2, \dots, p_q) \leq r(p_1 - 1, p_2, \dots, p_q) + r(p_1, p_2 - 1, \dots, p_q) + \dots + r(p_1, \dots, p_{q-1}, p_q - 1)$$

angegeben, die im Fall  $q = 2$  mit (16.7), also auch mit dem Satz von Erdős und Szekeres übereinstimmt.

Aus Satz 16.6 und Bemerkung 16.3 erhalten wir wieder induktiv folgende obere Schranke für die verallgemeinerten Ramsey-Zahlen, die die Abschätzung aus Folgerung 16.1 verallgemeinert.

**Folgerung 16.2.** Sind  $G_1, G_2, \dots, G_q$  schlichte Graphen der Ordnung  $p_1, p_2, \dots, p_q$ , so gilt

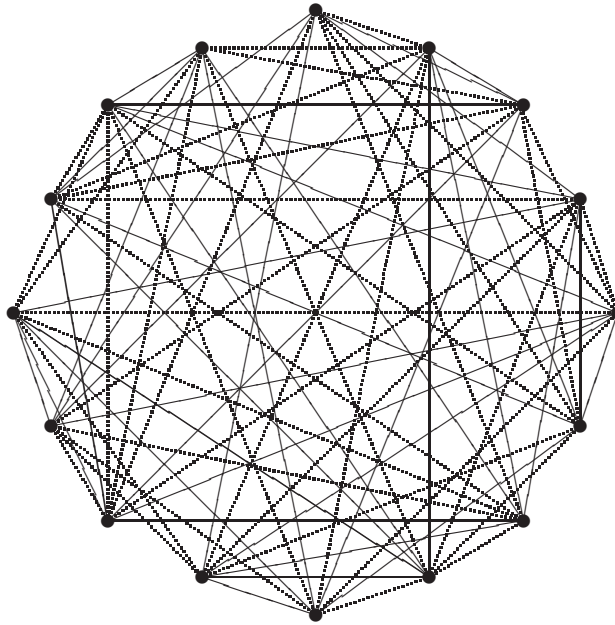
$$r(G_1, G_2, \dots, G_q) \leq \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_q - q)!}{(p_1 - 1)!(p_2 - 1)! \dots (p_q - 1)!}.$$

**Satz 16.8 (Greenwood, Gleason [1] 1955).** Es gilt  $r(3, 3, 3) = 17$ .

*Beweis.* Wie üblich, erfolgt der Beweis in zwei Schritten. Aus den Sätzen 16.6, 16.7 und 16.1 ergibt sich ohne Mühe

$$\begin{aligned} r(3, 3, 3) &\leq r(2, 3, 3) + r(3, 2, 3) + r(3, 3, 2) - 3 + 2 \\ &= 3r(2, 3, 3) - 1 = 3r(3, 3) - 1 = 17. \end{aligned}$$

Die auf der nächsten Seite skizzierte Faktorisierung des  $K_{16}$  zeigt durch "längeres scharfes Hinsehen", daß  $r(3, 3, 3) > 16$  gilt, denn keiner der drei Faktoren besitzt ein Dreieck. Dabei besteht die Kantenmenge des ersten Faktors aus den durchgezogenen Linien, die des zweiten Faktors aus den gepunkteten Linien und die des dritten Faktors aus den nicht vorhandenen Verbindungslinien. Damit ist die Aussage  $r(3, 3, 3) = 17$  schon bewiesen. ||



Betrachtet man die Partition

$$\{1, 4, 10, 13\}, \{2, 3, 11, 12\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

der Menge  $\{1, 2, \dots, 13\}$ , so stellt man leicht fest, daß in keiner Partitionsmenge drei (nicht notwendig verschiedene) Elemente  $x, y, z$  existieren, die die Gleichung  $x + y = z$  erfüllen. Betrachtet man aber eine beliebige Partition aus drei Teilmengen der Menge  $\{1, 2, \dots, 14\}$ , so zeigt eine kleine systematische Untersuchung, daß immer eine Partitionsmenge existiert, in der die Gleichung  $x + y = z$  eine Lösung hat. Schur [1] zeigte 1916 ganz allgemein, daß zu jeder gegebenen natürlichen Zahl  $n$  eine natürliche Zahl  $s_n$  existiert, so daß in jeder Partition der Menge  $\{1, 2, \dots, s_n\}$ , die aus  $n$  Teilmengen besteht, eine Partitionsmenge existiert, die eine Lösung der Gleichung  $x + y = z$  besitzt. Wir werden dieses Resultat von Schur aus der Existenz der verallgemeinerten Ramsey-Zahlen herleiten.

**Satz 16.9 (Schur [1] 1916).** Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine natürliche Zahl  $s_n$ , so daß für jede Partition  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  der Menge  $\{1, 2, \dots, s_n\}$  gilt: Es gibt ein  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  mit der Eigenschaft, daß die Partitionsmenge  $S_j$  drei (nicht notwendig verschiedene) Zahlen  $x, y$  und  $z$  enthält, die die Gleichung  $x + y = z$  erfüllen.

*Beweis.* Man setze  $s_n = r = r(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , wobei  $p_i = 3$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt. Ist  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  eine beliebige Partition der Menge  $\{1, 2, \dots, r\}$ , so sei der vollständige Graph  $K_r$  auf der Eckenmenge  $\{1, 2, \dots, r\}$  definiert. Nun betrachten wir die spezielle Faktorisierung  $K_r = H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_n$  mit der Eigenschaft, daß die Kante  $uv$  genau dann zu  $H_i$  gehört, wenn  $|u - v| \in S_i$  gilt. Nach Satz 16.6 existiert ein  $j$  mit  $K_3 \subseteq H_j$ . Sind  $a, b$  und  $c$  (o.B.d.A.  $a > b > c$ ) die drei Ecken des  $K_3$ , so bedeutet dies gerade  $a - b, a - c, b - c \in S_j$ . Setzen wir  $x = a - b, y = b - c$  und  $z = a - c$ , so gilt  $x, y, z \in S_j$  und  $x + y = z$ . ||

**Bemerkung 16.5.** Nach Satz 16.8 gilt  $r(3, 3, 3) = 17$ . Zusammen mit der Vorbetrachtung zum Satz 16.9 erkennt man daran, daß die Größe  $s_n = r(p_1, p_2, \dots, p_n)$  mit  $p_i = 3$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$  im allgemeinen nicht die kleinste Zahl ist, für die der Satz von Schur gilt.

Sieht man von Trivialfällen ab, so ist für  $q \geq 3$  von den verallgemeinerten Ramsey-Zahlen  $r(p_1, p_2, \dots, p_q)$  nur  $r(3, 3, 3) = 17$  bekannt. Daher ist es vielleicht überraschend, daß die Berechnung von  $r(G_1, G_2, \dots, G_q)$  häufig einfacher wird, falls nicht alle  $G_i$  vollständige Graphen sind. Typisch und interessant dabei ist, daß man je nach Wahl der  $G_i$  zum Teil gänzlich verschieden vorgehen muß und daß dazu eine Fülle von Ergebnissen aus anderen Teilgebieten der Graphentheorie herangezogen werden. Eine einfache aber nützliche untere Schranke der verallgemeinerten Ramsey-Zahl  $r(G_1, G_2)$  in Abhängigkeit der chromatischen Zahl fanden 1972 Chvátal und Harary [1].

**Satz 16.10 (Chvátal, Harary [1] 1972).** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei schlichte Graphen ohne isolierte Ecken. Ist  $p$  die Ordnung einer größten Komponente von  $G_1$ , so gilt

$$r(G_1, G_2) \geq (p - 1)(\chi(G_2) - 1) + 1. \tag{16.8}$$

*Beweis.* Es sei  $G = (\chi(G_2) - 1)K_{p-1}$ . Da  $G$  keine Zusammenhangskomponente der Ordnung  $p$  enthält, ist  $G_1$  kein Teilgraph von  $G$ . Weil  $\overline{G}$  ein vollständiger  $(\chi(G_2) - 1)$ -partiter Graph ist, gilt  $\chi(\overline{G}) = \chi(G_2) - 1$ , womit  $G_2$  nicht in  $\overline{G}$  enthalten ist. Wegen  $n(G) = (p - 1)(\chi(G_2) - 1)$ , haben wir (16.8) bestätigt. ||

Wir kommen nun zu einem sehr bekannten Resultat von Chvátal [1], das sich recht einfach beweisen läßt.

**Satz 16.11 (Chvátal [1] 1977).** Ist  $B_p$  ein Baum der Ordnung  $p \geq 2$ , so gilt

$$r(B_p, K_n) = 1 + (p - 1)(n - 1).$$

*Beweis.* Da der Fall  $n = 1$  klar ist, sei im folgenden  $n \geq 2$ . Ist  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $1 + (p - 1)(n - 1)$ , so zeigen wir  $B_p \subseteq G$  oder  $K_n \subseteq \overline{G}$ , woraus sich dann  $r(B_p, K_n) \leq 1 + (p - 1)(n - 1)$  ergibt. Ist  $K_n$  kein Teilgraph von  $\overline{G}$ , so gilt  $\alpha(G) \leq n - 1$ . Daraus folgt aber

$$\chi(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)} \geq \frac{1 + (p - 1)(n - 1)}{n - 1},$$

also  $\chi(G) \geq p$ . Nach Bemerkung 12.4 (ii) besitzt  $G$  dann einen  $p$ -kritischen Teilgraphen  $H$ , für den nach Satz 12.3  $\delta(H) \geq p - 1$  gilt. Daher ist der Baum  $B_p$  nach Aufgabe 2.9 (die man leicht durch Induktion nach  $p$  beweist) ein Teilgraph von  $H$  und damit auch von  $G$ .

Aus (16.8) ergibt sich sofort  $r(B_p, K_n) \geq (p - 1)(n - 1) + 1$ , womit der Satz vollständig bewiesen ist. ||

Mit Hilfe dieses Satzes von Chvátal kann man ein Resultat von Burr beweisen, das man in dem Übersichtsartikel von Parsons [2] aus dem Jahre 1978 findet.

**Satz 16.12 (Burr 1978).** Ist  $q \geq 2$  eine natürliche Zahl und  $B_p$  ein Baum der Ordnung  $p \geq 2$ , so gilt

$$r(B_p, K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_q}) = 1 + (p - 1)((r(n_1, n_2, \dots, n_q) - 1).$$

*Beweis.* Wir setzen  $\ell = r(n_1, n_2, \dots, n_q) - 1$  und  $n = 1 + (p - 1)\ell$ . Ist  $K_n = G \uplus H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$  eine beliebige Faktorisierung des vollständigen Graphen  $K_n$ , so zeigen wir  $B_p \subseteq G$  oder  $K_{n_j} \subseteq H_j$  für ein  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ . Setzen wir  $H = H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$ , so gilt  $K_n = G \uplus H$ . Da aus Satz 16.11  $r(B_p, K_{\ell+1}) = n$  folgt, ergibt sich  $B_p \subseteq G$  oder  $K_{\ell+1} \subseteq H$ . Ist  $B_p \subseteq G$ , so sind wir fertig. Daher gelte nun  $K_{\ell+1} \subseteq H$ . Ist  $F$  ein Teilgraph von  $H$  mit  $F \cong K_{\ell+1}$ ,

so setze man  $F_i = F \cap H_i$  für  $i = 1, 2, \dots, q$ , woraus  $K_{\ell+1} \cong F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_q$  folgt. Da aber  $r(n_1, n_2, \dots, n_q) = \ell + 1$  gilt, ergibt sich daraus  $K_{n_j} \subseteq F_j$  für ein  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ . Aus  $F_i \subseteq H_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$  folgt sofort  $K_{n_j} \subseteq H_j$  für ein  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$  und daher  $r(B_p, K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_q}) \leq n$ .

Für die umgekehrte Ungleichung sei  $F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_q$  eine Faktorisierung des  $K_\ell$  mit  $\omega(F_i) \leq n_i - 1$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$ . Weiter setzen wir  $G = \ell K_{p-1}$  und für jedes  $i = 1, 2, \dots, q$  entstehe  $H_i$  aus  $F_i$  wie folgt. Jede Ecke aus  $F_i$  werde durch einen Nullgraphen aus  $p - 1$  Ecken ersetzt. Sind die beiden Ecken  $x, y \in E(F_i)$  adjazent und wurden sie durch die Ecken  $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$  bzw.  $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$  ersetzt, so wird jede Ecke  $x_j$  mit jeder Ecke  $y_t$  durch eine Kante verbunden. Die Faktorisierung  $G \uplus H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$  des vollständigen Graphen  $K_{n-1}$  zeigt uns die gewünschte Abschätzung  $r(B_p, K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_q}) \geq n$ .  $\parallel$

**Satz 16.13 (Lawrence [1] 1973).** Ist  $C_m$  ein Kreis der Länge  $m \geq 3$  und  $n \in \mathbf{N}$ , so gilt

$$r(C_m, K_{1,n}) \leq \begin{cases} 2n + 1, & \text{falls } m \leq 2n - 1 \\ m, & \text{falls } m \geq 2n. \end{cases}$$

Für folgende Werte gilt sogar die Gleichheit:

$$r(C_m, K_{1,n}) = \begin{cases} 2n + 1, & \text{falls } m \text{ ungerade und } m \leq 2n - 1 \\ m, & \text{falls } m \geq 2n \end{cases}$$

*Beweis.* Aus dem Satz 16.10 von Chvátal und Harary ergibt sich leicht

$$r(C_m, K_{1,n}) \geq \max\{m, n(\chi(C_m) - 1) + 1\}$$

und damit dann:

$$r(C_m, K_{1,n}) \geq \begin{cases} m, & \text{falls } m \geq 2n \\ m, & \text{falls } m \text{ gerade und } n + 1 \leq m \leq 2n - 2 \\ n + 1, & \text{falls } m \text{ gerade und } m \leq n \\ 2n + 1, & \text{falls } m \text{ ungerade und } m \leq 2n - 1 \end{cases}$$

Sei nun  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $p \geq 2n$ . Ist  $K_{1,n}$  kein Teilgraph von  $\overline{G}$ , so ergibt sich sofort  $\Delta(\overline{G}) \leq n - 1$  und  $G \neq K_{t,t}$  für  $t \geq n + 1$ . Daher folgt  $2\delta(G) \geq 2p - 2n \geq p$ , womit  $G$  nach dem Satz von Dirac (Satz 4.5) Hamiltonsch ist. Aus dem Handschlaglemma ergibt sich sofort  $m(G) \geq \frac{1}{4}p^2$ . Nach dem Satz von Bondy (Satz 4.16) ist dann  $G$  entweder panzyklisch, oder es gilt  $G = K_{p/2, p/2}$ . Wegen  $G \neq K_{t,t}$  für  $t \geq n + 1$ , ist dann  $G$  panzyklisch, oder es gilt  $G = K_{n,n}$ .

Ist  $p = m = 2n$ , so ist  $G$  panzyklisch, oder es gilt  $G = K_{n,n}$ . In beiden Fällen folgt  $C_m \subseteq G$ , woraus sich  $r(C_m, K_{1,n}) \leq m$  ergibt.

Ist nun  $p \geq m \geq 2n$  und  $p \neq 2n$ , so ist  $G$  nach unserer Vorbetrachtung panzyklisch, also  $C_m \subseteq G$  und damit  $r(C_m, K_{1,n}) \leq m$ .

Ist schließlich  $p \geq 2n + 1$  und  $m \leq 2n - 1$ , so ist  $G$  nach unserer Vorbetrachtung wieder panzyklisch, also  $C_m \subseteq G$ , womit in diesem Fall  $r(C_m, K_{1,n}) \leq 2n + 1$  gilt.

Faßt man die erzielten Abschätzungen zusammen, so erhält man alle Aussagen des Satzes 16.13.  $\parallel$

**Bemerkung 16.6.** Ist  $m$  gerade und  $m \leq 2n - 2$ , so hat sich die Berechnung der Ramsey-Zahl  $r(C_m, K_{1,n})$  als schwierig herausgestellt. Z.B. hat Parsons [1] 1975 für  $n \geq 2$  gezeigt, daß  $r(C_4, K_{1,n}) \leq 1 + n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  gilt, wobei die Gleichheit für  $n = p^2$  oder  $n = p^2 + 1$  eintritt, falls  $p$  eine Primzahl ist.

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir einige weitere typische verallgemeinerte Ramsey-Zahlen nennen. Clapham, Exoo, Harborth, Mengersen und Sheehan [1] bewiesen 1989, daß  $r(K_5 - k, K_5 - k) = 22$  gilt, wobei  $k$  eine beliebige Kante des  $K_5$  bedeutet. Im Jahre 1991 zeigten Harborth und Mengersen [1]  $r(K_{2,3}, K_{3,3}) = 13$  und  $r(K_{3,3}, K_{3,3}) = 18$  sowie 1992 Y. Yang und Rowlinson [1]  $r(C_5, C_5, C_5) = 17$ . Eine schöne Übersicht zu diesem Thema liefert der schon erwähnte Artikel von Radziszowski [1].

## 16.3 Ramsey-Zahlen von Bäumen

Sind alle Bäume Sterne, so sind die Ramsey-Zahlen vollständig durch Burr und Roberts [1] bestimmt worden.

**Satz 16.14 (Burr, Roberts [1] 1973).** Es seien  $q \geq 2$  natürliche Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_q$  gegeben. Sind  $t$  von diesen  $q$  Zahlen gerade, so gilt

$$r(K_{1,n_1}, K_{1,n_2}, \dots, K_{1,n_q}) = \Theta_t + \sum_{i=1}^q (n_i - 1),$$

wobei  $\Theta_t = 1$ , falls  $t$  positiv und gerade ist und  $\Theta_t = 2$  in allen anderen Fällen gilt.

*Beweis.* Wir setzen  $r = r(K_{1,n_1}, K_{1,n_2}, \dots, K_{1,n_q})$  und  $N = \sum_{i=1}^q n_i$ . Zunächst beweisen wir  $r \leq N - q + \Theta_t$ . Da jede Ecke des vollständigen Graphen  $K_{N-q+2}$  den Grad  $N - q + 1 = 1 + \sum_{i=1}^q (n_i - 1)$  besitzt, gilt für jede Faktorisierung

$$K_{N-q+2} = H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$$

notwendig  $K_{1,n_i} \subseteq H_i$  für ein  $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ , womit wir  $r \leq N - q + 2$  gezeigt haben. Daher verbleibt  $r \leq N - q + 1$  nachzuweisen, falls  $t$  positiv und gerade ist. In diesem Fall erkennt man leicht, daß  $N - q + 1$  immer ungerade ist. Nehmen wir nun an, daß es eine Faktorisierung

$$K_{N-q+1} = H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$$

gibt, so daß  $K_{1,n_i}$  kein Teilgraph von  $H_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$  ist. Daraus ergibt sich  $\Delta(H_i) \leq n_i - 1$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$ . Dies liefert wiederum  $\delta(H_i) \geq n_i - 1$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$ , womit jeder Faktor  $H_i$  ein regulärer Graph vom Grad  $n_i - 1$  ist. Da nach Voraussetzung mindestens ein  $n_j$  gerade ist, besitzt der reguläre Faktor  $H_j$  den ungeraden Grad  $n_j - 1$ , was dem Handschlaglemma widerspricht. Daher ist die Ungleichung  $r \leq N - q + \Theta_t$  vollständig bewiesen.

Nun zeigen wir  $r \geq N - q + \Theta_t$ . Ist  $t = 0$ , so ist jede gegebene Zahl  $n_i$  sowie  $N - q + 1$  ungerade. Daher kann man den vollständigen Graphen  $K_{N-q+1}$  nach dem I. Satz von Petersen (Satz 7.15) in  $\frac{1}{2}(N - q)$  2-Faktoren zerlegen. Für jedes  $i = 1, 2, \dots, q$ , bestehe der Faktor  $F_i$  aus der Vereinigung von  $\frac{1}{2}(n_i - 1)$  kantendisjunkten 2-Faktoren, so daß  $K(F_i) \cap K(F_j) = \emptyset$  für  $i \neq j$  gilt. Nach Konstruktion ist dann  $K_{N-q+1} = F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_q$  eine Faktorisierung mit der Eigenschaft, daß für alle  $i = 1, 2, \dots, q$  der Stern  $K_{1,n_i}$  kein Teilgraph von  $F_i$  ist, womit in diesem Fall  $r \geq N - q + 2$  gilt.



Ist  $t$  ungerade, so ist  $N - q + 1$  gerade, und nach Satz 7.14 ist der vollständige Graph  $K_{N-q+1}$  1-faktorisierbar. Für jedes  $i = 1, 2, \dots, q$ , bestehe der Faktor  $F_i$  aus der Vereinigung von  $n_i - 1$  kantendisjunkten 1-Faktoren mit  $K(F_i) \cap K(F_j) = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Dann ist  $K_{N-q+1} = F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_q$  eine Faktorisierung, so daß  $K_{1,n_i}$  kein Teilgraph von  $F_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, q$  gilt, womit auch in diesem Fall  $r \geq N - q + 2$  gilt.

Ist schließlich  $t > 0$  gerade, so sei o.B.d.A.  $n_1$  gerade. Dann sind  $t - 1$  von den  $q$  Zahlen  $n_1 - 1, n_2, \dots, n_q$  gerade, und es folgt aus dem letzten Fall

$$r \geq r(K_{1,n_1-1}, K_{1,n_2}, \dots, K_{1,n_q}) \geq N - q + 1.$$

Daher gilt in allen Fällen  $r \geq N - q + \Theta_t$ , womit wir den Satz vollständig bewiesen haben.  $\parallel$

**Folgerung 16.3 (Harary [3] 1972).** Sind  $p$  und  $q$  zwei natürliche Zahlen, so gilt:

$$r(K_{1,p}, K_{1,q}) = \begin{cases} p + q - 1, & \text{falls } p \text{ und } q \text{ gerade} \\ p + q, & \text{sonst} \end{cases}.$$

**Satz 16.15 (Burr [1] 1974).** Es seien  $p, q \geq 2$  zwei natürliche Zahlen. Ist  $B_{p+1}$  ein Baum der Ordnung  $p + 1$ , so gilt

$$r(B_{p+1}, K_{1,q}) \leq p + q.$$

Ist  $p$  ein Teiler von  $q - 1$ , so gilt sogar  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) = p + q$ .

*Beweis.* Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $p + q$ . Ist  $K_{1,q}$  kein Teilgraph von  $\overline{G}$ , so gilt  $\Delta(\overline{G}) \leq q - 1$ , also  $\delta(G) \geq p$ . Daher ist der Baum  $B_{p+1}$  nach Aufgabe 2.9 ein Teilgraph von  $G$ , woraus sich  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \leq p + q$  ergibt.

Ist  $q - 1 = kp$ , so hat der Graph  $G = (k + 1)K_p$  die Ordnung  $n(G) = p + kp = p + q - 1$ . Dieses Beispiel zeigt  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \geq p + q$ , denn  $B_{p+1}$  ist kein Teilgraph von  $G$  und  $K_{1,q}$  ist kein Teilgraph von  $\overline{G}$ .  $\parallel$

Im folgenden wollen wir weitere Ramsey-Zahlen  $r(B_{p+1}, K_{1,q})$  bestimmen, wobei der Baum  $B_{p+1}$  kein Stern ist und  $p$  nicht die Zahl  $q - 1$  teilt. Dazu benötigen wir gewisse Erweiterungen der Aufgabe 2.9, die wir in den nächsten beiden Ergebnissen vorstellen wollen.

**Hilfssatz 16.1 (Guo, Volkmann [5] 1995).** Es sei  $p \geq 3$  eine natürliche Zahl und  $G$  ein schlichter, zusammenhängender aber nicht vollständiger Graph der Ordnung  $n(G) \geq p + 2$  mit  $\delta(G) \geq p$ . Weiter sei  $B$  ein Baum mit  $4 \leq n(B) \leq p + 1$  und  $\Delta(B) \leq n(B) - 2$  (also  $B$  ist kein Stern). Ist  $a$  eine beliebige Ecke von  $B$ , so existiert ein Baum  $B_a \subseteq G$  mit  $B_a \cong B$ , so daß

$$N[a', G] \cap E(B_a) \neq E(B_a),$$

gilt, wobei wir mit  $a' \in E(B_a)$  die zu  $a$  isomorphe Ecke bezeichnen. (Ist  $f : E(B) \rightarrow E(B_a)$  ein Isomorphismus mit  $f(a) = a'$ , so nennen wir  $a'$  isomorph zu  $a$ .)

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $n(B) = n$ . Ist  $n = 4$ , so ist der Baum  $B$  notwendig ein Weg der Länge 3. Benutzt man die bekannte Tatsache, daß in  $G$  zwei Ecken  $x$  und  $y$  vom Abstand 2 existieren, so erkennt man leicht, daß die Aussage des Satzes für  $n = 4$  richtig ist.

Nun gelte  $5 \leq n \leq p + 1$  und  $a$  sei eine beliebige Ecke von  $B$ . Da  $B$  kein Stern ist, existiert in  $B$  eine Ecke  $v \neq a$ , so daß auch der Baum  $B' = B - v$  kein Stern ist. Mit  $u$  bezeichnen wir die Nachbarecke von  $v$  in  $B$ . Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein



Baum  $B'_a \subseteq G$ , der zu  $B'$  isomorph ist mit  $N[a', G] \cap E(B'_a) \neq E(B'_a)$ , wobei  $a'$  die zu  $a$  isomorphe Ecke bedeutet. Ist  $u' \in E(B'_a)$  die zu  $u$  isomorphe Ecke, so existiert wegen  $\delta(G) \geq p$  in  $G$  ein Nachbar  $v'$  von  $u'$  mit  $v' \notin E(B'_a)$ . Fügt man nun zum Baum  $B'_a$  die Ecke  $v'$  und die Kante  $u'v'$  hinzu, so entsteht ein zum Baum  $B$  isomorpher Baum  $B_a$  mit der gewünschten Eigenschaft  $N[a', G] \cap E(B_a) \neq E(B_a)$ .  $\parallel$

Aus Hilfssatz 16.1 leiten wir das nächste Ergebnis her, das uns dann die angekündigten Erweiterungen von Folgerung 16.3 und Satz 16.15 liefern wird.

**Satz 16.16 (Guo, Volkmann [5] 1995).** Es sei  $p \geq 2$  eine natürliche Zahl und  $G$  ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung  $n(G) \geq p + 2$  mit  $\delta(G) \geq p$ . Ist  $B$  ein Baum der Ordnung  $n(B) \leq p + 2$  und  $\Delta(B) \leq p$ , so existiert ein Teilgraph  $B^* \subseteq G$  mit  $B^* \cong B$ .

*Beweis.* Ist  $G$  ein vollständiger Graph oder  $n(B) \leq p + 1$ , so ist der Satz durch Aufgabe 2.9 bewiesen. Im Fall, daß  $G$  kein vollständiger Graph ist und  $n(B) = p + 2$  gilt, erfolgt der Beweis durch Induktion nach  $p$ . Ist  $p = 2$ , so überlegt man sich ohne Mühe, daß  $G$  einen Weg der Länge 3 enthält.

Nun sei  $p \geq 3$  und  $v$  eine Edecke von  $B$ , so daß  $B' = B - v$  kein Stern ist. Mit  $a$  bezeichnen wir die zu  $v$  adjazente Ecke in  $B$ . Nun gibt es nach Hilfssatz 16.1 einen Baum  $B'_a \subseteq G$ , der zu  $B'$  isomorph ist mit  $N[a', G] \cap E(B'_a) \neq E(B'_a)$ , wobei  $a'$  die zu  $a$  isomorphe Ecke bedeutet. Wegen  $\delta(G) \geq p$  existiert in  $G$  ein Nachbar  $v'$  von  $a'$  mit  $v' \notin E(B'_a)$ . Fügt man nun zum Baum  $B'_a$  die Ecke  $v'$  und die Kante  $a'v'$  hinzu, so entsteht ein zum Baum  $B$  isomorpher Baum  $B^* \subseteq G$ .  $\parallel$

**Satz 16.17 (Guo, Volkmann [5] 1995).** Es seien  $p, q \geq 2$  zwei natürliche Zahlen. Ist der Baum  $B_{p+1}$  der Ordnung  $p + 1$  kein Stern (und damit  $p \geq 3$ ), und ist  $p$  kein Teiler von  $q - 1$  (also insbesondere  $p \geq q$ ), so gilt

$$r(B_{p+1}, K_{1,q}) \leq p + q - 1.$$

Erfüllen  $p$  oder  $q$  eine der folgenden zusätzlichen Voraussetzungen, so gilt sogar die Gleichheit:

- i) Ist  $q = 2$ , so gilt  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) = p + q - 1 = p + 1$ .
- ii) Ist  $q = p \geq 3$ , so gilt  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) = p + q - 1 = 2p - 1$ .
- iii) Ist  $q - 1 = kp + 1$  für ein  $k \in \mathbf{N}$ , so gilt  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) = p + q - 1$ .
- iv) Ist  $q - 1 = kp + s$  für ein  $k \in \mathbf{N}$  mit  $2 \leq s \leq p - 1$ , so gilt  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) = p + q - 1$ , falls  $k + s + 1 - p \geq 0$  oder  $\Delta(B_{p+1}) = p - 1$  erfüllt ist.
- v) Ist  $p > q \geq 3$  und  $\Delta(B_{p+1}) = p - 1$ , so gilt  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) = p + q - 1$ , wenn  $p + q$  gerade oder  $q$  ungerade und  $p$  gerade, und es gilt  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) = p + q - 2$ , wenn  $p$  ungerade und  $q$  gerade.

*Beweis.* Im folgenden bedeute  $R_s^n$  ein schlichter und  $s$ -regulärer Graph der Ordnung  $n$ .

Es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $p + q - 1$ . Ist  $K_{1,q}$  kein Teilgraph von  $\overline{G}$ , so gilt  $\Delta(\overline{G}) \leq q - 1$ , also  $\delta(G) \geq p - 1$ , womit jede Komponente von  $G$  mindestens  $p$  Ecken besitzt. Da  $p$  kein Teiler von  $q - 1$  ist, existiert daher eine Komponente  $H$  von  $G$  mit  $n(H) \geq p + 1$ . Wegen  $\Delta(B_{p+1}) \leq p - 1$  folgt mit Satz 16.16  $B_{p+1} \subseteq H \subseteq G$  und daraus dann  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \leq p + q - 1$ .

- i) Ist  $q = 2$ , so zeigt der  $K_p$  unmittelbar  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \geq p + 1$ .
- ii) Ist  $q = p \geq 3$ , so zeigt der Graph  $2K_{p-1}$  das gewünschte Ergebnis.

iii) Ist  $q - 1 = kp + 1$ , so zeigt der Graph  $G = (k + 1)K_p$  der Ordnung  $q + p - 2$  die Ungleichung  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \geq p + q - 1$ .

iv) Ist  $q - 1 = kp + s$  mit  $2 \leq s \leq p - 1$  und  $k + s + 1 - p \geq 0$ , so existiert der Graph

$$G = (p + 1 - s)K_{p-1} \cup (k + s + 1 - p)K_p$$

der Ordnung  $n(G) = q + p - 2$ . Da  $B_{p+1}$  offensichtlich kein Teilgraph von  $G$  ist und  $\Delta(\overline{G}) \leq q - 1$  gilt, folgt  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \geq p + q - 1$ . (Für  $s = p - 1$  oder  $s = p - 2$  ist die Bedingung  $k + s + 1 - p \geq 0$  immer erfüllt, womit  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) = p + q - 1$  auch für  $q - 1 = kp + p - 1$  und  $q - 1 = kp + p - 2$  gilt.)

Nun sei  $q - 1 = kp + s$  mit  $2 \leq s \leq p - 3$  und  $\Delta(B_{p+1}) = p - 1$ .

Ist  $q + p$  gerade bzw.  $q$  ungerade und  $p$  gerade, so existiert nach dem Satz von Kirkman und Reiß (Satz 7.14) bzw. dem I. Satz von Petersen (Satz 7.15) eine Faktorisierung der Form

$$K_{q+p-2} = R_{p-2}^t \uplus R_{q-1}^t,$$

wobei  $t = q + p - 2$  gilt. Diese Faktorisierung zeigt zusammen mit der Bedingung  $\Delta(B_{p+1}) = p - 1$  sofort  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \geq p + q - 1$ .

Im verbleibenden Fall  $q$  gerade und  $p$  ungerade unterscheiden wir ob  $k$  gerade oder ungerade ist.

Ist  $k$  ungerade, so folgt aus der Darstellung  $q = kp + s + 1$ , daß  $s$  gerade ist, womit der Graph

$$F = kK_p \cup R_{p-2}^{p+s-1}$$

der Ordnung  $n(F) = q + p - 2$  existiert. Die Faktorisierung  $K_{q+p-2} = F \uplus \overline{F}$  liefert dann  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \geq p + q - 1$ .

Ist  $k$  gerade, so muß  $s = 2t + 1$  ungerade sein. Ist  $p + t$  gerade, so existiert

$$F_1 = (k - 1)K_p \cup 2R_{p-2}^{p+t},$$

und ist  $p + t$  ungerade, so existiert

$$F_2 = (k - 1)K_p \cup R_{p-2}^{p+t-1} \cup R_{p-2}^{p+t+1}.$$

Nun ergibt sich  $n(F_1) = n(F_2) = q + p - 2$ , und die Faktorisierungen  $K_{q+p-2} = F_i \uplus \overline{F_i}$  für  $i = 1, 2$ , liefern uns das gewünschte Ergebnis.

v) Es gelte nun  $p > q \geq 3$  und  $\Delta(B_{p+1}) = p - 1$ .

Ist  $q + p$  gerade oder  $q$  ungerade und  $p$  gerade, so zeigt obige Faktorisierung  $K_{q+p-2} = R_{p-2}^t \uplus R_{q-1}^t$  mit  $t = p + q - 2$  die gewünschte Ungleichung  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \geq p + q - 1$ .

Nun seien  $p$  ungerade,  $q$  gerade, und es sei  $G$  ein schlichter Graph der Ordnung  $p + q - 2$ . Ist  $K_{1,q}$  kein Teilgraph von  $\overline{G}$ , so gilt  $\Delta(\overline{G}) \leq q - 1$ , also  $\delta(G) \geq p - 2$ , womit  $G$  notwendig zusammenhängend ist. Da die beiden Zahlen  $p + q - 2$  und  $p - 2$  ungerade sind, existiert in  $G$  eine Ecke  $a$  mit  $|N(a, G)| \geq p - 1$ . Aus diesen Tatsachen folgt ohne Mühe  $B_{p+1} \subseteq G$ , womit  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \leq p + q - 2$  bewiesen ist.

Die Faktorisierung  $K_{q+p-3} = R_{p-3}^t \uplus R_{q-1}^t$  mit  $t = p + q - 3$  zeigt sofort  $r(B_{p+1}, K_{1,q}) \geq p + q - 2$ . ||

# Kapitel 17

## Lokal semi-vollständige Digraphen

### 17.1 Zwei Struktursätze

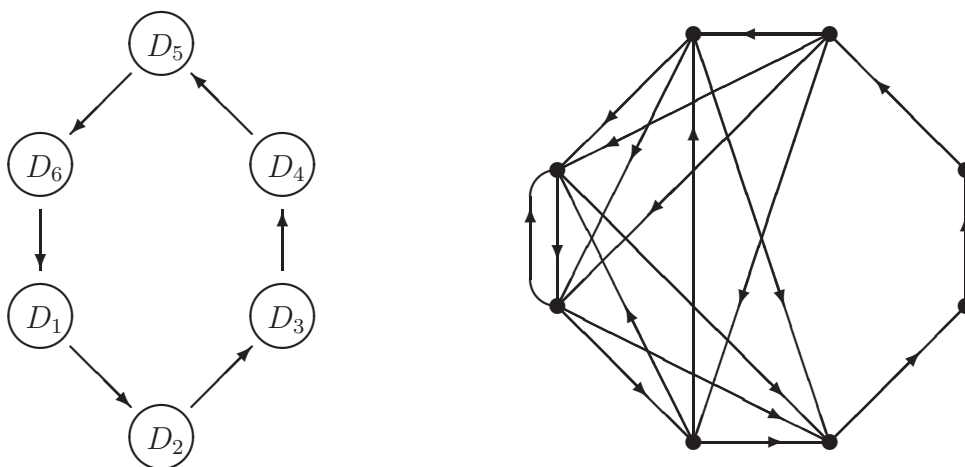
Im Jahre 1990 hat Bang-Jensen [1] eine hochinteressante Verallgemeinerung des Turnierbegriffes entwickelt, mit dem wir uns im letzten Kapitel dieses Buches ausführlich beschäftigen wollen.

**Definition 17.1.** Ein schlichter Digraph heißt *semi-vollständig*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Ecken mindestens ein Bogen existiert. Ein schlichter Digraph  $D$  heißt *lokal semi-vollständig*, wenn sowohl  $D[N^+(x)]$  als auch  $D[N^-(x)]$  für alle Ecken  $x$  aus  $D$  semi-vollständig ist. Einen lokal semi-vollständigen Digraphen ohne 2-Kreise nennt man auch *lokales Turnier*.

**Bemerkung 17.1.** Ein Turnier ist ein semi-vollständiger Digraph ohne 2-Kreise. Ein semi-vollständiger Digraph ist auch lokal semi-vollständig.

**Bemerkung 17.2.** Ist  $D$  ein lokal semi-vollständiger Digraph und  $A$  eine Eckenmenge aus  $D$ , so folgt unmittelbar aus Definition 17.1, daß auch  $D - A$  lokal semi-vollständig ist.

**Beispiel 17.1.** Jeder orientierte Kreis ist lokal semi-vollständig. Die skizzierten Beispiele zeigen uns zwei weitere lokal semi-vollständige Digraphen, die nicht semi-vollständig sind.



In der linken Skizze soll  $D_i$  ein semi-vollständiger Digraph sein mit  $D_i \rightarrow D_{i+1}$  für  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  (dabei ist  $D_7 = D_1$ ).

Im folgenden werden wir sehen, daß die lokal semi-vollständigen Digraphen wesentlich mehr Eigenschaften mit den Turnieren gemeinsam haben als die multipartiten Turniere. Unser erstes Ergebnis ist eine Erweiterung des Satzes von Camion (Folgerung 5.1).

**Satz 17.1 (Bang-Jensen [1] 1990).** Ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph  $D$  der Ordnung  $n \geq 2$  ist Hamiltonsch.

*Beweis.* Es sei  $C$  ein längster orientierter Kreis in  $D$ . Ist  $C$  ein  $n$ -Kreis, so ist  $D$  Hamiltonsch. Daher sei nun  $C = c_1c_2 \dots c_t c_1$  ein  $t$ -Kreis mit  $t < n$ . Da  $D$  stark zusammenhängend ist, existiert eine Ecke  $a \in D - E(C)$ , die einen positiven Nachbarn in  $C$  hat. Es gelte o.B.d.A.  $(a, c_1) \in B(D)$ .

Hat  $a$  auch einen negativen Nachbarn in  $C$ , so sei  $j \in \{1, 2, \dots, t\}$  der größte Index mit  $(c_j, a) \in B(D)$ . Im Fall  $j = t$  ist  $c_1c_2 \dots c_t a c_1$  ein  $(t+1)$ -Kreis. Ist  $j \neq t$ , so sind  $a$  und  $c_{j+1}$  positive Nachbarn von  $c_j$ . Daher sind diese beiden Ecken nach Definition 17.1 durch einen Bogen verbunden. Wegen der Wahl von  $j$  gilt notwendig  $a \rightarrow c_{j+1}$ , womit  $c_j a c_{j+1} \dots c_t c_1 \dots c_j$  ein  $(t+1)$ -Kreis ist.

Hat  $a$  keinen negativen Nachbarn in  $C$ , so existiert aber wegen des starken Zusammenhangs ein kürzester orientierter Weg  $x_1 x_2 \dots x_\ell$  von  $C$  nach  $a = x_\ell$  mit  $\ell \geq 3$  und  $x_1 = c_j$  für  $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ . Wie oben sei  $j$  wieder der größte Index mit diesen Eigenschaften. Im Fall  $j = t$  ist  $x_1 x_2 \dots x_\ell c_1 c_2 \dots c_t$  ein längerer orientierter Kreis. Ist  $j \neq t$ , so sind  $x_2$  und  $c_{j+1}$  positive Nachbarn von  $c_j$ , also sind diese beiden Ecken durch einen Bogen verbunden. Die Wahl von  $j$  liefert  $x_2 \rightarrow c_{j+1}$  und damit den  $(t+1)$ -Kreis  $c_j x_2 c_{j+1} \dots c_t c_1 \dots c_j$ .

Insgesamt haben wir den Fall  $t < n$  zum Widerspruch geführt, womit  $D$  notwendig Hamiltonsch ist. ||

**Folgerung 17.1.** Jeder stark zusammenhängende semi-vollständige Digraph  $D$  der Ordnung  $n(D) \geq 3$  ist Ecken-panzyklisch.

*Beweis.* Da  $D$  nach Satz 17.1 einen orientierten Hamiltonschen Kreis besitzt, enthält  $D$  auch ein stark zusammenhängendes Turnier  $T_n$  der Ordnung  $n = n(D)$ . Da  $T_n$  nach dem Satz von Moon (Satz 5.3) Ecken-panzyklisch ist, trifft das erst recht für  $D$  zu. ||

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts stehen zwei Struktursätze, die für die gesamte Theorie der lokal semi-vollständigen Digraphen von zentraler Bedeutung sind.

**Satz 17.2 (I. Struktursatz, Bang-Jensen [1] 1990).** Es sei  $D$  ein lokal semi-vollständiger Digraph. Ist  $D$  zusammenhängend, aber nicht stark zusammenhängend, so gilt:

- i) Sind  $A$  und  $B$  zwei stark zusammenhängende Komponenten von  $D$ , so tritt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten ein. Es gibt keinen Bogen zwischen  $A$  und  $B$ ,  $A \rightarrow B$  oder  $B \rightarrow A$ .
- ii) Sind  $A$  und  $B$  zwei stark zusammenhängende Komponenten von  $D$  mit  $A \rightarrow B$ , so ist sowohl  $A$  als auch  $B$  semi-vollständig.
- iii) Die starken Zusammenhangskomponenten von  $D$  lassen sich so in eindeutiger Form  $D_1, D_2, \dots, D_p$  anordnen, daß es keinen Bogen von  $D_j$  nach  $D_i$  für  $j > i$  gibt und  $D_i \rightarrow D_{i+1}$  für  $i = 1, 2, \dots, p-1$  gilt.

*Beweis.* i) Es gebe mindestens einen Bogen zwischen  $A$  und  $B$ . Da  $D[E(A) \cup E(B)]$  nicht stark zusammenhängend ist, existieren entweder nur Bogen von  $A$  nach  $B$  oder von  $B$  nach  $A$ . Nehmen wir o.B.d.A. an, daß ein Bogen  $(a, b)$  von  $A$  nach  $B$  existiert. Nun sei  $x \neq a$  eine beliebige Ecke von  $A$ . Da  $A$  stark zusammenhängend ist, gibt es in  $A$  einen orientierten Weg

$a_1 a_2 \dots a_t$  von  $a = a_1$  nach  $x = a_t$ . Nun sind  $b$  und  $a_2$  positive Nachbarn von  $a_1$ , womit  $b$  und  $a_2$  nach Definition 17.1 durch einen Bogen verbunden sind. Da kein Bogen von  $B$  nach  $A$  führt, folgt  $a_2 \rightarrow b$ . Durch Wiederholung dieses Arguments erreichen wir  $x = a_t \rightarrow b$  und ebenso  $A \rightarrow b$ . Ähnlich zeigt man  $a \rightarrow B$  und schließlich  $A \rightarrow B$ , womit i) bewiesen ist.

ii) Ist  $a \in A$ , so gilt  $a \rightarrow B$ , also  $E(B) \subseteq N^+(a)$ , womit  $B$  nach Definition 17.1 semi-vollständig ist. Analog zeigt man, daß auch  $A$  semi-vollständig ist.

Teil iii) beweisen wir mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der stark zusammenhängenden Komponenten von  $D$ , wobei der Fall  $p = 2$  schon durch i) bestätigt ist. Nun seien  $p \geq 3$  und  $U_1, U_2, \dots, U_p$  die stark zusammenhängenden Komponenten von  $D$ .

Für  $i = 1, 2, \dots, p$  sei  $u_i$  eine Ecke aus  $U_i$ . Dann ist der kondensierte Digraph  $D' = D[\{u_1, u_2, \dots, u_p\}]$  natürlich genau dann zusammenhängend, wenn  $D$  zusammenhängend ist. Nach Satz 1.10 besitzt der untergeordnete Graph  $G'$  von  $D'$  eine Ecke  $u_j$ , so daß  $G' - u_j$  zusammenhängend ist. Daher bleibt auch  $D - E(U_j)$  zusammenhängend.

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß  $j = p$  gilt und  $U_p$  eine stark zusammenhängende Komponente von  $D - E(U_p)$  dominiert. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $D - E(U_p)$  eine eindeutige Anordnung mit den gewünschten Eigenschaften, die o.B.d.A. von der Form  $U_1, U_2, \dots, U_{p-1}$  sein möge. Nun setzen wir  $\ell = \min\{i | U_p \rightarrow U_i\}$ . Ist  $\ell = 1$ , so erhalten wir die eindeutige Anordnung  $U_p, U_1, \dots, U_{p-1}$ . Ist  $\ell \geq 2$ , so folgt aus Definition 17.1 und i) sofort  $U_{\ell-1} \rightarrow U_p$ . Daraus ergibt sich die eindeutige Anordnung  $U_1, \dots, U_{\ell-1}, U_p, U_\ell, U_{\ell+1}, \dots, U_{p-1}$ .  $\parallel$

**Definition 17.2.** Es sei  $D$  ein zusammenhängender aber nicht stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph. Die eindeutige Anordnung  $D_1, D_2, \dots, D_p$  der starken Zusammenhangskomponenten von  $D$  aus Satz 17.2 nennen wir *stark zusammenhängende Zerlegung* von  $D$ . Dabei heißt  $D_1$  *Anfangskomponente* und  $D_p$  *Endkomponente*.

Als erste Anwendung dieses Struktursatzes beweisen wir eine Erweiterung von Satz 5.1 (Satz von Rédei).

**Satz 17.3 (Bang-Jensen [1] 1990).** Jeder zusammenhängende und lokal semi-vollständige Digraph ist semi-Hamiltonsch.

*Beweis.* Ist  $D$  ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph, so folgt unsere Behauptung unmittelbar aus Satz 17.1. Ist  $D$  ein zusammenhängender aber nicht stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph, so sei  $D_1, D_2, \dots, D_p$  die stark zusammenhängende Zerlegung von  $D$ . Da nach Satz 17.1 jede Komponente  $D_i$  einen orientierten Hamiltonschen Kreis besitzt, liefert Satz 17.2 iii) sehr leicht einen orientierten Hamiltonschen Weg von  $D$ .  $\parallel$

Startet man mit einem längsten orientierten Weg, so kann man analog zum Beweis von Satz 5.1 (Satz von Rédei) direkt und sehr schnell Satz 17.3 herleiten.

**Definition 17.3.** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender Multidigraph. Ist  $S \subseteq E(D)$ , so daß  $D - S$  nicht mehr stark zusammenhängend ist, so nennen wir  $S$  *Schnittmenge* von  $D$ . Gilt zusätzlich  $|S| = \sigma(D)$ , so heißt  $S$  *minimale Schnittmenge*. Ist  $S$  eine Schnittmenge von  $D$  aber  $D - S'$  stark zusammenhängend für jede echte Teilmenge  $S'$  von  $S$ , so sprechen wir von einer *kleinsten Schnittmenge*.

**Bemerkung 17.3.** Eine minimale Schnittmenge ist unter allen möglichen Schnittmengen diejenige mit den wenigsten Elementen. Eine kleinste Schnittmenge ist nur mengentheoretisch kleinstmöglich. Eine minimale Schnittmenge ist natürlich auch eine kleinste Schnittmenge

**Hilfssatz 17.1 (Bang-Jensen [1] 1990).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph. Ist  $S \subseteq E(D)$  eine kleinste Schnittmenge von  $D$ , so ist  $D - S$  zusammenhängend.

*Beweis.* Wir nehmen an, daß  $D - S$  nicht zusammenhängend ist. Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei Komponenten des untergeordneten Graphen von  $D - S$  und  $S' = S - s$  mit  $s \in S$ . Da  $S$  eine kleinste Schnittmenge ist, ist  $D - S'$  noch stark zusammenhängend. Daher besitzt  $s$  einen positiven Nachbarn  $x \in E(G_1)$  und einen positiven Nachbarn  $y \in E(G_2)$ . Da  $D$  lokal semi-vollständig ist, sind die beiden Ecken  $x$  und  $y$  in  $D$  durch einen Bogen verbunden, was unserer Annahme widerspricht.  $\parallel$

**Hilfssatz 17.2 (Bang-Jensen, Guo, Gutin, Volkmann [1] 1997).** Ist  $D$  ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger aber nicht semi-vollständiger Digraph, so gilt:

- i) Es existiert eine kleinste Schnittmenge  $S$ , so daß  $D - S$  nicht semi-vollständig ist.
- ii) Es sei  $S$  eine kleinste Schnittmenge, so daß  $D - S$  nicht semi-vollständig ist. Dann besitzt  $D - S$  eine stark zusammenhängende Zerlegung  $D_1, D_2, \dots, D_p$  mit  $p \geq 3$ . Außerdem gilt  $D_p \rightarrow S \rightarrow D_1$ , und der von  $S$  induzierte Teildigraph  $D[S]$  ist semi-vollständig.

*Beweis.* i) Da  $D$  nicht semi-vollständig ist, gibt es in  $D$  zwei Ecken  $x$  und  $y$  die durch keinen Bogen verbunden sind. Dann ist aber  $N^+(x)$  eine Schnittmenge von  $D$ . Wählt man  $S$  als eine kleinste Schnittmenge von  $D$  mit  $S \subseteq N^+(x)$ , so ist  $D - S$  sicher nicht semi-vollständig.

ii) Nach Hilfssatz 17.1 ist  $D - S$  zusammenhängend, womit  $D - S$  nach Satz 17.2 eine stark zusammenhängende Zerlegung  $D_1, D_2, \dots, D_p$  besitzt. Da  $D - S$  nicht semi-vollständig ist, folgt aus Satz 17.2 leicht, daß es keinen Bogen zwischen  $D_1$  und  $D_p$  gibt, womit wir schon  $p \geq 3$  nachgewiesen haben. Es sei  $s$  eine beliebige Ecke aus  $S$  und  $S' = S - s$ . Da  $S$  eine kleinste Schnittmenge ist, ist  $D - S'$  stark zusammenhängend. Damit folgt notwendig  $s \in N^+(D_p)$  und  $s \in N^-(D_1)$ . Aus der Tatsache, daß es zwischen  $D_1$  und  $D_p$  keinen Bogen gibt, schließen wir weiter  $s \notin N^-(D_p)$  und  $s \notin N^+(D_1)$ , woraus sich zusammen mit Satz 17.2 i) sogar  $D_p \rightarrow s \rightarrow D_1$  ergibt. Da  $s \in S$  beliebig gewählt war, erhalten wir unmittelbar  $D_p \rightarrow S \rightarrow D_1$  und damit wiederum, daß  $D[S]$  semi-vollständig ist.  $\parallel$

**Satz 17.4 (II. Struktursatz, Guo, Volkmann [1] 1994).** Sei  $D$  ein zusammenhängender aber nicht stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph und  $D_1, D_2, \dots, D_p$  seine stark zusammenhängende Zerlegung. Dann kann  $D$  wie folgt in  $r \geq 2$  Teildigraphen  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  zerlegt werden:

$$D'_1 = D_p, \quad \lambda_1 = p,$$

$$\lambda_{i+1} = \min\{j | N^+(D_j) \cap E(D'_i) \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad \lambda_r = 1$$

$$\text{und} \quad D'_{i+1} = D[E(D_{\lambda_{i+1}}) \cup E(D_{\lambda_{i+1}+1}) \cup \dots \cup E(D_{\lambda_i-1})].$$

Die Teildigraphen  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  besitzen folgende Eigenschaften:

- i) Die Teildigraphen  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  sind semi-vollständig,  $D'_{i+1}$  dominiert die Anfangskomponente von  $D'_i$ , und es existiert kein Bogen von  $D'_i$  nach  $D'_{i+1}$  für  $i = 1, 2, \dots, r-1$ .
- ii) Ist  $r \geq 3$ , so existiert für  $|j - i| \geq 2$  kein Bogen zwischen den Teildigraphen  $D'_i$  und  $D'_j$ .



*Beweis.* i) Wegen  $D'_1 = D_p$ , ist  $D'_1$  semi-vollständig. Nach Definition von  $D'_{i+1}$  existiert eine starke Zusammenhangskomponente  $D_\ell$  von  $D'_i$  mit  $N^+(D_{\lambda_{i+1}}) \cap E(D_\ell) \neq \emptyset$ , womit aus Satz 17.2 i)  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_\ell$  folgt. Daraus ergibt sich zusammen mit Definition 17.1 und Satz 17.2 iii) sukzessiv  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_j$  für alle  $j$  mit  $\lambda_{i+1} < j \leq \ell$ . Insbesondere gilt  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_{\lambda_i}$ .

Ist  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} + 2$ , so erkennt man wieder sukzessiv  $D_j \rightarrow D_{\lambda_i}$  für jedes  $j$  mit  $\lambda_{i+1} \leq j < \lambda_i$ . Damit haben wir  $D'_{i+1} \rightarrow D_{\lambda_i}$  gezeigt, woraus man sofort schließt, daß  $D'_{i+1}$  semi-vollständig ist. Wegen Satz 17.2 gibt es natürlich keinen Bogen von  $D'_i$  nach  $D'_{i+1}$ , womit i) bestätigt ist.

ii) Ist  $r \geq 3$  und sind  $i, j$  zwei natürliche Zahlen mit  $j \geq i + 2$ , so gibt es einerseits nach Definition von  $\lambda_j$  keinen Bogen von  $D'_j$  nach  $D'_i$ . Andererseits existiert nach Satz 17.2 iii) auch kein Bogen von  $D'_i$  nach  $D'_j$ , womit der II. Struktursatz vollständig bewiesen ist.  $\parallel$

**Definition 17.4.** Ist  $D$  ein zusammenhängender aber nicht stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph, so nennen wir die eindeutig definierte Anordnung  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  im II. Struktursatz *semi-vollständige Zerlegung* von  $D$ .

Eine Veranschaulichung der semi-vollständigen Zerlegung findet man in der nächsten Skizze, wenn man dort nur auf die Struktur von  $D - S$  achtet.

## 17.2 Ringförmige lokal semi-vollständige Digraphen

**Definition 17.5.** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph der Ordnung  $p$ . Sind  $H_1, H_2, \dots, H_p$  weitere  $p$  schlichte Digraphen, so entstehe der neue Digraph  $D[H_1, H_2, \dots, H_p]$  aus  $D$  dadurch, daß man jede Ecke  $v_i$  von  $D$  durch  $H_i$  ersetzt und zusätzlich die Bogen von jeder Ecke von  $H_i$  zu jeder Ecke von  $H_j$  für alle  $i$  und  $j$  mit  $1 \leq i \neq j \leq p$  hinzufügt, falls  $(v_i, v_j) \in B(D)$  gilt.

**Definition 17.6.** Ein schlichter Digraph der Ordnung  $n$  heißt *kreisförmig*, wenn eine Nummerierung  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  seiner Ecken existiert, so daß für alle  $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$  gilt:  $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \dots, v_{i+d^+(v_i)}\}$  und  $N^-(v_i) = \{v_{i-d^-(v_i)}, \dots, v_{i-1}\}$ . Dabei werden die Indizes natürlich modulo  $n$  betrachtet.

**Definition 17.7.** Ein lokal semi-vollständiger Digraph  $D$  heißt *ringförmig*, wenn ein kreisförmiges lokales Turnier  $R$  der Ordnung  $p \geq 2$  existiert mit  $D = R[H_1, H_2, \dots, H_p]$ , wobei jedes  $H_i$  ein stark zusammenhängender semi-vollständiger Teildigraph von  $D$  für  $i = 1, 2, \dots, p$  bedeutet. Wir nennen  $R[H_1, H_2, \dots, H_p]$  eine *ringförmige Darstellung* von  $D$  und  $H_1, H_2, \dots, H_p$  die Komponenten dieser Darstellung. Ist dabei  $R = D[\{x_1, x_2, \dots, x_p\}]$  mit  $x_i \in E(H_i)$  für  $i = 1, 2, \dots, p$ , so setzen wir stets voraus, daß die Ecken von  $R$  schon in der Reihenfolge aus Definition 17.6 numeriert sind.

**Beispiel 17.2.** Sind im Beispiel 17.1 die semi-vollständigen Digraphen  $D_1, D_2, \dots, D_6$  stark zusammenhängend, so ist  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_6]$  eine ringförmige Darstellung von  $D$ , wobei  $R$  ein 6-Kreis ist.

**Satz 17.5.** Es sei  $D$  ein zusammenhängender aber nicht stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph. Dann besitzt  $D$  eine eindeutige ringförmige Darstellung der Form  $R[D_1, D_2, \dots, D_p]$ . Dabei ist  $D_1, D_2, \dots, D_p$  die stark zusammenhängende Zerlegung von  $D$  und  $R$  ein kreisförmiges lokales Turnier, das keinen orientierten Kreis enthält.

*Beweis.* Sei  $D_1, D_2, \dots, D_p$  die stark zusammenhängende Zerlegung von  $D$ . Wählen wir für jedes  $i = 1, 2, \dots, p$  ein  $x_i \in V(D_i)$ , so ist  $R = D[\{x_1, x_2, \dots, x_p\}]$  lokal semi-vollständig. Aus



Satz 17.2 iii) folgt, daß  $R$  ein kreisförmiges lokales Turnier ohne orientierte Kreise ist, wenn man die Tatsache beachtet, daß aus  $x_i \rightarrow x_k$  für  $k > i$  stets  $x_i \rightarrow x_j$  für  $i < j < k$  folgt. Daher ist  $R[D_1, D_2, \dots, D_p]$  eine ringförmige Darstellung von  $D$ , die auch eindeutig ist.  $\parallel$

**Satz 17.6 (Bang-Jensen, Guo, Gutin, Volkmann [1] 1997).** Sei  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$  ein stark zusammenhängender, lokal semi-vollständiger und ringförmiger Digraph und  $S$  eine kleinste Schnittmenge von  $D$ . Dann existieren zwei ganze Zahlen  $p \geq 1$  und  $q \geq 0$ , so daß  $S = E(D_p) \cup \dots \cup E(D_{p+q})$  gilt.

*Beweis.* Sei  $S$  eine kleinste Schnittmenge von  $D$  und  $S_i = S \cap E(D_i)$  für  $i = 1, 2, \dots, \alpha$ . Dann ist  $\alpha \geq 3$ , und es existieren zwei Zahlen  $k$  und  $\ell$ , so daß  $D - S$  mindestens eine Ecke aus  $D_k$  und eine Ecke aus  $D_\ell$  enthält, womit  $F_k = E(D_k) - S_k \neq \emptyset$  und  $F_\ell = E(D_\ell) - S_\ell \neq \emptyset$  gilt.

Nach Hilfssatz 17.1 ist  $D - S$  zusammenhängend. Ist  $H_1, H_2, \dots, H_\beta$  die stark zusammenhängende Zerlegung von  $D - S$ , so erkennt man analog zum Beweis von Hilfssatz 17.2  $N^+(H_\beta) \cap S = S = N^-(H_1) \cap S$ .

Nehmen wir an, es gilt  $S_k \neq \emptyset$ . Da  $D$  ringförmig ist, hat jede Ecke aus  $D_k$  die gleichen positiven und negativen Nachbarn außerhalb von  $D_k$ . Wir setzen  $t = \max\{i | E(H_i) \cap F_k \neq \emptyset\}$  und wählen  $u \in S_k$  und  $v \in E(H_t) \cap F_k$ . Beachtet man, daß  $u$  und  $v$  die gleichen negativen Nachbarn außerhalb von  $D_k$  besitzen, so folgt sofort  $t = \beta$ . Weiter hat  $u$  in  $H_1$  einen positiven Nachbarn  $w$ . Da es keinen Bogen von  $H_\beta$  nach  $H_1$  gibt, gehört  $w$  notwendig zu  $F_k$ . Aus der Tatsache, daß  $D_k$  semi-vollständig ist, ergibt sich  $(w, v) \in B(D)$ , also  $H_1 \rightarrow H_\beta$  und damit  $H_i \rightarrow H_j$  für  $i < j$ . Nun zeigen wir  $E(H_i) \subseteq E(D_k)$  für  $i = 1, \beta$ . Denn wäre  $E(H_1) - F_k \neq \emptyset$ , so gäbe es wegen des starken Zusammenhangs von  $H_1$  eine Ecke  $x \in E(H_1) - F_k$  und eine Ecke  $y \in E(H_1) \cap F_k$  mit  $(y, x) \in B(D)$ . Das liefert den Widerspruch  $(v, x) \in B(D)$ . Analog erhält man  $E(H_\beta) \subseteq E(D_k)$ . Daher gilt  $w \rightarrow x \rightarrow v$  für jede Ecke  $x$  aus  $F_\ell$ , was natürlich nicht möglich ist. Dies bedeutet schließlich  $S_k = \emptyset$ .

Tatsächlich haben wir bewiesen, daß aus  $S_i \neq \emptyset$  stets  $E(D_i) \subseteq S$  folgt.

Nehmen wir nun an, daß  $S$  aus den disjunkten Mengen  $T_1, T_2, \dots, T_r$  besteht mit

$$T_i = E(D_{p_i} \cup \dots \cup D_{p_i+q_i}) \text{ und } E(D_{p_{i-1}} \cup D_{p_i+q_{i+1}}) \cap S = \emptyset$$

für  $i = 1, 2, \dots, r$ . Ist  $r \geq 2$ , dann ist  $D - T_i$  stark zusammenhängend, und damit gilt  $D_{p_{i-1}} \rightarrow D_{p_i+q_{i+1}}$  für alle  $i = 1, 2, \dots, r$ . Insgesamt ist dann aber auch  $D - S$  stark zusammenhängend, was unserer Voraussetzung widerspricht.  $\parallel$

**Satz 17.7 (Bang-Jensen, Guo, Gutin, Volkmann [1] 1997).** Ist  $D$  ein ringförmiger und lokal semi-vollständiger Digraph, so besitzt  $D$  eine eindeutige ringförmige Darstellung  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$ .

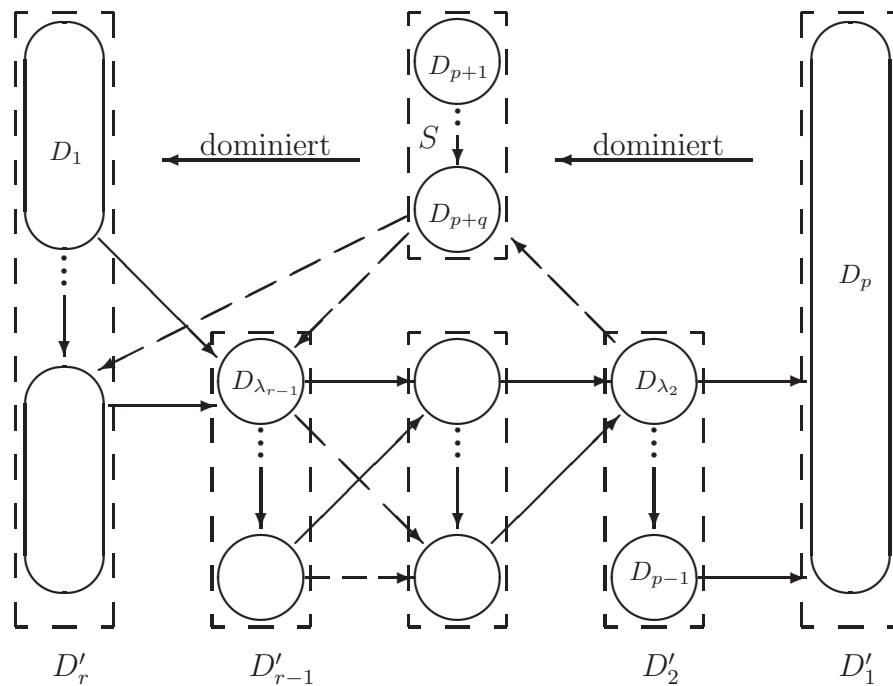
*Beweis.* Ist  $D$  nicht stark zusammenhängend, so liefert uns Satz 17.5 das gewünschte Ergebnis.

Ist  $D$  stark zusammenhängend, so sei  $S$  eine kleinste Schnittmenge von  $D$ . Nach Satz 17.6 können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß  $S$  die Form  $S = E(D_1) \cup E(D_2) \cup \dots \cup E(D_p)$  hat. Da  $D - S = D[E(D_{p+1}) \cup \dots \cup E(D_\alpha)]$  nicht stark zusammenhängend ist, existiert kein Bogen von  $D_\alpha$  nach  $D_{p+1}$ . Aus der Ringförmigkeit von  $D$  schließen wir dann, daß es auch keinen Bogen von  $D_j$  nach  $D_i$  für  $p+1 \leq i < j \leq \alpha$  gibt, womit  $D_{p+1}, \dots, D_\alpha$  die starken Zusammenhangskomponenten von  $D - S$  sind. Nach Satz 17.2 besitzt  $D - S$  dann die eindeutige stark zusammenhängende Zerlegung  $D_{p+1}, \dots, D_\alpha$ .

Ist  $D[S]$  nicht stark zusammenhängend, so ergibt sich analog, daß  $D[S]$  die eindeutige stark zusammenhängende Zerlegung  $D_1, D_2, \dots, D_p$  besitzt. Für diesen Fall und ebenso für  $S = E(D_1)$  ist der Satz dann bewiesen. Im verbleibenden Fall, daß  $D[S]$  stark zusammenhängend ist und  $p \geq 2$  gilt, gibt es einen Bogen von  $D_p$  nach  $D_1$ . Da  $D$  ringförmig ist, folgt daraus  $D_j \rightarrow D_1$  für  $p \leq j \leq \alpha$ . Nun erkennt man, daß  $S' = E(D_2) \cup \dots \cup E(D_p)$  schon eine Schnittmenge von  $D$  ist, denn in  $D - S'$  haben die Ecken aus  $D_1$  keine positiven Nachbarn außerhalb von  $D_1$ . Mit diesem Widerspruch zur Wahl von  $S$  ist der Eindeutigkeitsatz vollständig bewiesen.  $\parallel$

**Satz 17.8 (Guo [1] 1995).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph. Besitzt  $D$  eine kleinste Schnittmenge  $S$ , so daß die semi-vollständige Zerlegung von  $D - S$  aus mindestens vier Komponenten besteht, so ist  $D$  ringförmig.

*Beweis.* Wegen Hilfssatz 17.1 ist  $D - S$  zusammenhängend. Nun seien  $D_1, D_2, \dots, D_p$  die stark zusammenhängende und  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  die semi-vollständige Zerlegung von  $D - S$ . Die Voraussetzung  $r \geq 4$  zeigt uns zusammen mit Satz 17.4 ii), daß  $D - S$  nicht semi-vollständig ist. Daher liefert Hilfssatz 17.2  $D_p \rightarrow S \rightarrow D_1$ , womit  $D[S]$  semi-vollständig ist. Ist  $D_{p+1}, \dots, D_{p+q}$  die stark zusammenhängende Zerlegung von  $D[S]$ , so ergibt sich aus dem I. Struktursatz  $D_i \rightarrow D_{i+1}$  für  $i = 1, 2, \dots, p + q$ .



Nach dem II. Struktursatz existiert kein Bogen zwischen  $D'_i$  und  $D'_j$  für  $|i - j| \geq 2$ . Daher gibt es für  $i \geq 3$  keinen Bogen von  $D'_i$  nach  $S$  und für  $j \leq r - 2$  keinen Bogen von  $S$  nach  $D'_j$ . Existiert für  $1 \leq i \neq j \leq p + q$  ein Bogen zwischen  $D_i$  und  $D_j$ , so gilt natürlich  $D_i \rightarrow D_j$  oder  $D_j \rightarrow D_i$ . Damit besitzt  $D$  die skizzierte Struktur.

Setzen wir  $R = D[\{x_1, x_2, \dots, x_{p+q}\}]$  mit  $x_i \in E(D_i)$  für  $i = 1, 2, \dots, p + q$ , so erkennt man leicht, daß  $R$  ein lokales Turnier ist. Hat  $x_t \in E(R)$  die Eigenschaft  $x_k \rightarrow x_t \rightarrow x_m$ , so zeigt die beschriebene Struktur  $x_i \rightarrow x_t \rightarrow x_j$  für alle  $i$  und  $j$  mit  $k \leq i < t < j \leq m$ .

Damit ist  $R$  nach Definition 17.6 kreisförmig, also  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_{p+q}]$  die ringförmige Darstellung von  $D$ . ||

**Definition 17.8.** Für einen stark zusammenhängenden lokal semi-vollständigen Digraphen  $D$  wird die *quasi-Tailenweite*  $g(D)$  wie folgt definiert. Besitzt  $D$  die ringförmige Darstellung  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$ , so bedeutet  $g(D)$  die Länge eines kürzesten orientierten Kreises von  $R$ . Ist  $D$  nicht stark zusammenhängend, so setzen wir  $g(D) = \infty$ , und ist  $D$  nicht ringförmig, so setzen wir  $g(D) = 3$ .

Zunächst geben wir für  $q$ -fach stark zusammenhängende lokal semi-vollständige Digraphen  $D$  eine obere Schranke von  $g(D)$  an. Diese Schranke habe ich 1992 gemeinsam mit Prof. Dr. Yubao Guo gefunden.

**Satz 17.9 (Guo, Volkmann 1992).** Es sei  $D$  ein  $q$ -fach ( $q \geq 1$ ) stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph der Ordnung  $n$ . Ist  $n \geq q+2 \geq 3$ , so gilt  $3 \leq g(D) \leq \frac{n-2}{q} + 2$ .

*Beweis.* Definition 17.8 zeigt unmittelbar  $g(D) \geq 3$ . Ist  $g(D) = 3$ , so gibt es nichts zu beweisen, also sei nun  $g(D) \geq 4$ . Wegen Definition 17.8 ist  $D$  dann notwendig ringförmig. Nun sei  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$  eine ringförmige Darstellung und  $S$  eine kleinste Schnittmenge von  $D$ . Nach Satz 17.6 können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß  $S$  die Form  $S = E(D_{p+1}) \cup \dots \cup E(D_\alpha)$  hat. Dann ist  $D_1, D_2, \dots, D_p$  die stark zusammenhängende Zerlegung von  $D - S$  (man vgl. den Beweis von Satz 17.7). Besitzt  $D - S$  die semi-vollständige Zerlegung  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$ , so ergibt sich aus  $g(D) \geq 4$  und  $N^+(D_p) \cap S = S = N^-(D_1) \cap S$  sofort  $r \geq 3$ . Aus dem II. Struktursatz folgt  $N^+(D'_i) - E(D'_i) \subseteq E(D'_{i-1})$  für alle  $i \geq 3$ . Daher enthält jede Eckenmenge  $E(D'_j)$  eine kleinste Schnittmenge für  $2 \leq j \leq r - 1$ , woraus man  $|E(D'_j)| \geq q$  erhält. Dies liefert uns einerseits die Abschätzung  $n \geq (r - 1)q + 2$ . Andererseits existiert in  $R$  der  $(r + 1)$ -Kreis  $x_r x_{r-1} \dots x_1 x_{r+1} x_r$ , wobei  $x_i$  eine Ecke aus der Anfangskomponente von  $D'_i$  für  $i = 1, 2, \dots, r$  ist und  $x_{r+1}$  in  $S$  liegt. Insgesamt erhalten wir die gewünschte Abschätzung  $g(D) \leq r + 1 \leq \frac{n-2}{q} + 2$ . ||

Zum Schluß dieses Abschnitts leiten wir eine wichtige Charakterisierung derjenigen lokal semi-vollständigen Digraphen her, die weder semi-vollständig noch ringförmig sind.

**Satz 17.10 (III. Struktursatz, Guo [1] 1995).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph, der nicht semi-vollständig ist. Dann ist  $D$  nicht ringförmig genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- i) Es existiert eine kleinste Schnittmenge  $S$ , so daß  $D - S$  nicht semi-vollständig ist. Für jede solche Schnittmenge  $S$  ist  $D[S]$  semi-vollständig und die semi-vollständige Zerlegung von  $D - S$  besteht aus genau drei Komponenten  $D'_1, D'_2, D'_3$ .
- ii) Es existieren natürliche Zahlen  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  mit  $\lambda \leq \alpha \leq \beta \leq p - 1$  und  $p + 1 \leq \mu \leq \nu \leq p + q$ , so daß

$$N^-(D_\alpha) \cap E(D_\mu) \neq \emptyset \text{ und } N^+(D_\alpha) \cap E(D_\nu) \neq \emptyset$$

oder  $N^-(D_\mu) \cap E(D_\alpha) \neq \emptyset \text{ und } N^+(D_\mu) \cap E(D_\beta) \neq \emptyset$

gilt, wobei  $D_1, D_2, \dots, D_p$  bzw.  $D_{p+1}, \dots, D_{p+q}$  die stark zusammenhängenden Zerlegungen von  $D - S$  bzw.  $D[S]$  sind, und  $D_\lambda$  die Anfangskomponente von  $D'_\lambda$  bedeutet.

*Beweis.* Der Digraph  $D$  erfülle die Bedingungen i) und ii). Angenommen,  $D$  ist ringförmig. Dann besitzt  $D$  nach Satz 17.7 die eindeutige Darstellung der Form  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_{p+q}]$ . Existiert ein Bogen von  $D_\alpha$  nach  $D_\nu$ , so folgt aus der ringförmigen Darstellung, daß  $D_i \rightarrow D_j$

für  $\alpha \leq i < j \leq \nu$  gilt, was der Voraussetzung  $N^-(D_\alpha) \cap E(D_\mu) \neq \emptyset$  widerspricht. Analog behandelt man den Fall, daß ein Bogen von  $D_\mu$  nach  $D_\beta$  existiert.

Nun sei  $D$  nicht semi-vollständig und nicht ringförmig. Wegen Hilfssatz 17.2 existiert eine kleinste Schnittmenge  $S$ , so daß  $D - S$  nicht semi-vollständig ist, und für jede solche Schnittmenge ist  $D[S]$  semi-vollständig. Es seien  $D_1, D_2, \dots, D_p$  bzw.  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  die stark zusammenhängende bzw. die semi-vollständige Zerlegung von  $D - S$ . Aus der Voraussetzung, daß  $D$  nicht ringförmig ist, folgt zusammen mit Satz 17.8 sofort  $r \leq 3$ . Da  $D$  nicht semi-vollständig ist, muß aber  $r \geq 3$ , also  $r = 3$  gelten, womit i) schon bestätigt ist.

Dem Hilfssatz 17.2 entnehmen wir  $D_p \rightarrow S \rightarrow D_1$ . Wegen Satz 17.4 gilt  $D'_2 \rightarrow D_p$ , und es existiert kein Bogen zwischen  $D'_1$  und  $D'_3$ . Daher besitzt  $D$  keinen Bogen von  $D'_3$  nach  $S$ . Gibt es einen Bogen von einer stark zusammenhängenden Komponente  $D_k$  von  $D[S]$  zu einer stark zusammenhängenden Komponente  $D_m$  von  $D'_3$ , so liefert Satz 17.2 i)  $D_k \rightarrow D_m$ . Sind  $D_k$  bzw.  $D_m$  stark zusammenhängende Komponenten von  $D[S]$  bzw.  $D'_3$  mit  $D_k \rightarrow D_m$ , so erhält man weiter  $D_i \rightarrow D_j$  für  $1 \leq j \leq m$  und  $k \leq i \leq p + 1$ . Sind  $D_k$  bzw.  $D_m$  stark zusammenhängende Komponenten von  $D'_3$  bzw.  $D'_2$  mit  $D_k \rightarrow D_m$ , so schließt man analog  $D_i \rightarrow D_j$  für  $k \leq i < j \leq m$ . Entfernt man nun aus  $D$  alle Bogen zwischen  $S$  und  $D'_2$ , so erhält man einen ringförmigen lokal semi-vollständigen Faktor  $D'$ . Damit kann die Ringförmigkeit von  $D$  nur durch die Bogenstruktur zwischen den starken Zusammenhangskomponenten von  $D[S]$  und  $D'_2$  zerstört werden. Da dies nur durch die unter ii) beschriebene Art möglich ist, haben wir den III. Struktursatz vollständig bewiesen. ||

### 17.3 Panzyklische lokal semi-vollständige Digraphen

Nach dem Satz von Moon sind alle stark zusammenhängenden Turniere Ecken-panzyklisch. In diesem letzten Abschnitt des Buches wollen wir alle panzyklischen und Ecken-panzyklischen lokal semi-vollständigen Digraphen charakterisieren. Dazu werden wir die Begriffe panzyklisch sowie Ecken-panzyklisch etwas erweitern.

**Definition 17.9.** Es sei  $D$  ein schlichter Digraph der Ordnung  $n \geq 3$  und  $m$  eine ganze Zahl mit  $3 \leq m \leq n$ . Der Digraph  $D$  heißt *m-panzyklisch*, wenn  $D$  einen  $k$ -Kreis für alle  $k$  mit  $m \leq k \leq n$  besitzt. Der Digraph  $D$  heißt *Ecken-m-panzyklisch*, wenn für alle  $k$  mit  $m \leq k \leq n$ , jede Ecke von  $D$  auf einem  $k$ -Kreis liegt. Damit beschreiben die Ausdrücke (Ecken)-3-panzyklisch und (Ecken)-panzyklisch den gleichen Sachverhalt.

**Hilfssatz 17.3 (Guo [1] 1995).** Es sei  $D$  ein zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph der Ordnung  $n$  und  $C$  ein  $k$ -Kreis von  $D$  mit  $k < n$ . Besitzt jede Ecke aus  $D - E(C)$  einen positiven und einen negativen Nachbarn in  $C$ , so ist  $D$  Ecken- $(k + 1)$ -panzyklisch.

*Beweis.* Ist  $x$  eine beliebige Ecke aus  $D$ , so folgt aus den Voraussetzungen ohne Mühe, daß  $x$  zu einem  $(k + 1)$ -Kreis  $C'$  gehört mit  $E(C) \subseteq E(C')$ . Daher besitzt wieder jede Ecke aus  $D - E(C')$  einen positiven und einen negativen Nachbarn in  $C'$ . Durch Wiederholung dieses Prozesses erhält man das gewünschte Ergebnis. ||

**Satz 17.11 (Guo [1] 1995).** Es sei  $D$  ein zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph der Ordnung  $n$ . Besitzt  $D$  einen induzierten  $k$ -Kreis  $C$  mit  $4 \leq k < n$ , so ist  $G$  Ecken- $(k + 1)$ -panzyklisch.

*Beweis.* Der  $k$ -Kreis  $C$  habe die Gestalt  $C = x_1 x_2 \dots x_k x_1$ . Da  $D$  nach Voraussetzung zusammenhängend ist und  $C$  ein induzierter  $k$ -Kreis mit  $k \geq 4$  ist, folgt unmittelbar aus dem

I. Struktursatz, daß  $D$  stark zusammenhängend ist.

Zunächst zeigen wir, daß jede Ecke aus  $D - E(C)$  zu  $N^+(C) \cup N^-(C)$  gehört. Dazu sei  $y$  eine beliebige Ecke aus  $D - E(C)$  und  $P = y_1 y_2 \dots y_q$  ein kürzester orientierter Weg von  $C$  nach  $y$  mit  $y_1 = x_i$  und  $y_q = y$ . Dann gibt es einen Bogen zwischen  $y_2$  und  $x_{i+1}$ . Gilt  $x_{i+1} \rightarrow y_2$ , so folgt aus der Voraussetzung, daß  $C$  ein induzierter  $k$ -Kreis ist, sofort  $y_2 \rightarrow x_{i+2}$ . Daher können wir im folgenden o.B.d.A.  $y_1 = x_1$  und  $(y_2, x_2) \in B(D)$  voraussetzen.

Ist  $q = 2$ , so ist  $y$  ein negativer Nachbar von  $C$ . Nun sei  $q \geq 3$ . Da  $x_2$  und  $y_3$  positive Nachbarn von  $y_2$  sind und  $P$  als kürzester orientierter Weg von  $C$  nach  $y$  gewählt war, dominiert  $y_3$  die Ecke  $x_2$ . Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir schließlich  $y \rightarrow x_2$ , womit jede Ecke aus  $D - E(C)$  zu  $N^+(C) \cup N^-(C)$  gehört.

Beachtet man, daß  $C$  ein induzierter  $k$ -Kreis mit  $k \geq 4$  ist, so folgt durch die übliche Methode leicht, daß jede Ecke aus  $D - E(C)$  einen positiven und einen negativen Nachbarn in  $C$  hat, womit  $D$  nach Hilfssatz 17.3 Ecken- $(k + 1)$ -panzyklisch ist.  $\parallel$

**Satz 17.12 (Bang-Jensen, Guo, Gutin, Volkmann [1] 1997).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph der Ordnung  $n \geq 4$ . Ist  $D$  kein orientierter Kreis, so gilt:

- i) Ist  $D$  ringförmig, so ist  $D$  Ecken- $(g(D) + 1)$ -panzyklisch.
- ii) Ist  $D$  semi-vollständig oder nicht ringförmig, so ist  $D$  Ecken-panzyklisch.

*Beweis.* i) Es sei  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$  die ringförmige Darstellung von  $D$ . Im Fall  $g(D) \geq 4$  enthält  $D$  einen induzierten  $g(D)$ -Kreis, womit  $D$  nach Satz 17.11 Ecken- $(g(D) + 1)$ -panzyklisch ist. Im Fall  $g(D) = 3$  sei  $C = x_1 x_2 x_3 x_1$  ein 3-Kreis von  $R$ . O.B.d.A. gelte  $x_i \in E(D_{j_i})$  für  $i = 1, 2, 3$  mit  $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq \alpha$ .

Nun sei  $v$  eine beliebige Ecke aus  $D - E(C)$ . Ist  $v \in E(D_{j_i})$ , so ergibt sich aus  $D_{j_{i-1}} \rightarrow D_{j_i} \rightarrow D_{j_{i+1}}$  sofort  $x_{i-1} \rightarrow v \rightarrow x_{i+1}$ . Ist  $v \in E(D_\ell)$  mit  $j_i < \ell < j_{i+1}$ , so folgt aus der Ringförmigkeit von  $D$  sofort  $x_i \rightarrow v \rightarrow x_{i+1}$ . Damit besitzt jede Ecke aus  $D - E(C)$  sowohl einen negativen als auch einen positiven Nachbarn in  $C$ , womit  $D$  nach Hilfssatz 17.3 Ecken-4-panzyklisch ist.

ii) Ist  $D$  semi-vollständig, so liefert Folgerung 17.1 das Ergebnis. Daher sei  $D$  nun nicht semi-vollständig. Dann erfüllt  $D$  die Bedingungen i) und ii) aus dem III. Struktursatz.

Wir wählen eine kleinste Schnittmenge  $S$  von  $D$ , so daß  $D - S$  nicht semi-vollständig ist. Weiter seien  $D_1, D_2, \dots, D_p$  bzw.  $D_{p+1}, \dots, D_{p+q}$  die stark zusammenhängenden Zerlegungen von  $D - S$  bzw.  $D[S]$  und  $D'_1, D'_2, D'_3$  die semi-vollständige Zerlegung von  $D - S$ . Mit  $\lambda$  bezeichnen wir den Index der Anfangskomponente von  $D'_2$ . Die folgenden Tatsachen folgen aus dem II. und III. Struktursatz sowie aus Hilfssatz 17.2. Es existiert kein Bogen zwischen  $D'_1 = D_p$  und  $D'_3$ , es gilt  $D'_2 \rightarrow D'_1 \rightarrow S \rightarrow D_1$ , und  $D[S]$  ist semi-vollständig.

Entfernt man aus  $D$  alle Bogen zwischen  $S$  und  $D'_2$ , so erhält man bekanntlich einen ringförmigen lokal semi-vollständigen Faktor  $D'$  mit  $g(D') = 4$ . Wegen Teil i) ist  $D$  dann schon Ecken-5-panzyklisch. Daher müssen wir im folgenden noch nachweisen, daß jede Ecke von  $D$  auf einen 3-Kreis sowie auf einem 4-Kreis liegt. Dazu definieren wir:

$$\begin{aligned} t &= \max\{i \mid N^+(S) \cap E(D_i) \neq \emptyset, \lambda \leq i < p\} \\ A &= E(D_\lambda) \cup \dots \cup E(D_t) \\ t' &= \min\{j \mid N^+(D_j) \cap E(D'_2) \neq \emptyset, p + 1 \leq j \leq p + q\} \\ B &= E(D_{t'}) \cup \dots \cup E(D_{p+q}) \end{aligned}$$



Diese Definitionen liefern uns ohne Mühe  $B \rightarrow D'_3 \rightarrow A$ . Wegen  $S \rightarrow D_1 \rightarrow D_\lambda \rightarrow D'_1 \rightarrow S$  liegt jede Ecke aus  $S$  auf einem 4-Kreis. Weiter folgt aus  $B \rightarrow D'_3 \rightarrow A \rightarrow D'_1 \rightarrow S$ , daß jede Ecke aus  $E(D'_3) \cup A \cup E(D'_1)$  in einem 4-Kreis enthalten ist.

Die Definition von  $t'$  liefert uns einen Bogen  $(s, b)$  von  $D_{t'}$  nach  $A$ . Nun ergibt eine kleine Analyse der Bedingung ii) aus dem III. Struktursatz, daß auch ein Bogen  $(b', s')$  von  $A$  nach  $B$  existiert. Ist  $a$  eine beliebige Ecke aus  $D'_1$  und  $c$  eine beliebige Ecke aus  $D'_3$ , so sind  $sbas$  und  $s'cb's'$  orientierte Kreise der Länge 3. Damit gehört jede Ecke aus  $E(D'_3) \cup E(D'_1)$  zu einem 3-Kreis.

Enthält  $D'_2$  eine Ecke  $x$ , die nicht in  $A$  liegt, dann gilt natürlich  $A \rightarrow x$ . Die Definition von  $t$  zeigt uns noch  $x \rightarrow s$ . Damit haben wir den 3-Kreis  $xsbx$  und den 4-Kreis  $xasbx$  durch  $x$  gefunden. Es verbleibt der Nachweis, daß alle Ecken aus  $A \cup S$  auf einem 3-Kreis liegen.

Sei  $u$  eine Ecke aus  $S$  mit  $u \in E(D_\ell)$ . Besteht  $D_\ell$  aus mindestens 3 Ecken, so liefert uns Folgerung 17.1 einen 3-Kreis durch  $u$ . Daher gelte nun  $|E(D_\ell)| \leq 2$ . Ist  $\ell < t'$ , so sind  $u$  und  $b'$  durch einen Bogen verbunden, denn  $D_\ell$  dominiert die Ecke  $s'$  aus  $B$ . Ist  $\ell \geq t'$ , so gilt  $u = s$  oder es existiert der Bogen  $(s, u)$ , und dann gibt es auch einen Bogen zwischen den Ecken  $u$  und  $b$ . In jedem Fall ist die Ecke  $u$  mit  $b$  oder mit  $b'$  durch einen Bogen verbunden. Es gelte o.B.d.A.  $b \in N^+(u) \cup N^-(u)$ . Existiert der Bogen  $(u, b)$ , so ist  $ubau$  ein 3-Kreis. Existiert der Bogen  $(b, u)$ , so ist  $ucbu$  ein 3-Kreis. Daher liegt jede Ecke aus  $S$  auf einem 3-Kreis.

Schließlich sehen wir, daß  $S' = N^+(D'_3)$  eine Teilmenge von  $E(D'_2)$  ist, die auch eine kleinste Schnittmenge darstellt. Da  $D - S'$  nicht semi-vollständig ist, zeigt uns obiger Beweis, daß jede Ecke von  $S'$  zu einem 3-Kreis gehört. Wegen  $A \subseteq S'$  liegt jede Ecke aus  $A$  auf einem 3-Kreis und der Beweis von Satz 17.12 ist vollbracht. ||

**Satz 17.13 (Bang-Jensen, Guo, Gutin, Volkmann [1] 1997).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph der Ordnung  $n \geq 4$  und  $m$  eine ganze Zahl mit  $3 \leq m < n$ . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

- i) Der Digraph  $D$  ist genau dann nicht  $m$ -panzyklisch, wenn er die ringförmige Darstellung  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$  besitzt mit

$$g(D) > \max\{m - 1, |E(D_1)|, |E(D_2)|, \dots, |E(D_\alpha)|\} + 1.$$

- ii) Der Digraph  $D$  ist genau dann nicht Ecken- $m$ -panzyklisch, wenn er die ringförmige Darstellung  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$  besitzt mit

- a)  $g(D) \geq m$  und in  $D$  existiert eine Ecke, die zu keinem  $g(D)$ -Kreis gehört oder
- b)  $g(D) > m$  und  $g(D) > \min\{|E(D_1)|, |E(D_2)|, \dots, |E(D_\alpha)|\} + 1$ .

*Beweis.* Die Bedingung i) bzw. ii) ist natürlich hinreichend. Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, daß  $D$  nicht  $m$ -panzyklisch bzw. nicht Ecken- $m$ -panzyklisch ist. In beiden Fällen ist  $D$  nach Satz 17.12 ringförmig und nicht semi-vollständig. Hat  $D$  die ringförmige Darstellung  $R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$ , so ist  $D$  nach Satz 17.12 i) Ecken- $(g(D) + 1)$ -panzyklisch, womit  $g(D) \geq m$  gilt.

Nun betrachten wir den Fall, daß  $D$  nicht  $m$ -panzyklisch ist. Da  $R$  einen  $g(D)$ -Kreis enthält, muß  $g(D) \geq m + 1$  gelten. Angenommen, es gibt ein  $D_i$  mit  $|E(D_i)| \geq g(D) - 1$ . Dann ist  $D_i$  nach Folgerung 17.1 Ecken-panzyklisch und  $D$  damit panzyklisch. Dieser Widerspruch beweist i).

Zum Schluß betrachten wir den Fall, daß  $D$  nicht Ecken- $m$ -panzyklisch ist. Existiert in  $D$  eine Ecke, die zu keinem  $g(D)$ -Kreis gehört, so ist wegen  $g(D) \geq m$  der Digraph  $D$  sicher nicht

Ecken- $m$ -panzyklisch. Daher können wir im folgenden voraussetzen, daß jede Ecke auf einem  $g(D)$ -Kreis liegt. Da  $D$  Ecken- $(g(D) + 1)$ -panzyklisch ist, folgt  $g(D) > m$ . Angenommen, jeder Teildigraph  $D_i$  hat mindestens  $g(D) - 1$  Ecken für  $i = 1, 2, \dots, \alpha$ . Nach Folgerung 17.1 liegt dann jede Ecke von  $D$  auf einem  $k$ -Kreis für  $3 \leq k \leq g(D) - 1$ . Zusammenfassend ist  $D$  nun Ecken-panzyklisch, was unserer Voraussetzung widerspricht.  $\parallel$

Als nette Anwendung von Satz 17.12 wollen wir ein Analogon zu Satz 5.5 herleiten.

**Satz 17.14 (Guo, Volkmann [1] 1994).** Es sei  $D$  ein stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph der Ordnung  $n \geq 4$ . Besitzt  $D$  mindestens  $n + 2$  Bogen, so existieren zwei verschiedene Ecken  $x_1$  und  $x_2$  in  $D$ , so daß  $D - x_i$  für  $i = 1, 2$  stark zusammenhängend bleibt.

*Beweis.* Ist  $D$  Ecken- $(n - 1)$ -panzyklisch, so verläuft der Beweis analog zum Beweis von Satz 5.5.

Ist  $D$  nicht Ecken- $(n - 1)$ -panzyklisch, so folgt aus Satz 17.12, daß  $D$  ringförmig ist mit  $g(D) \geq n - 1$ . Es sei  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$  die ringförmige Darstellung von  $D$ . Existiert eine Komponente  $D_i$  der Ordnung  $|E(D_i)| \geq 2$ , so hat jede Ecke von  $D_i$  die gewünschte Eigenschaft. Besteht jede Komponente  $D_i$  aus genau einer Ecke, so stimmt  $D$  mit dem kreisförmigen lokalen Turnier  $R$  überein. Wegen  $|B(D)| \geq n + 2$  gibt es in  $D$  mindestens zwei Ecken  $v_i$  und  $v_j$  mit  $d^+(v_i), d^+(v_j) \geq 2$ . Nun gilt aber für die beiden Ecken  $x_1 = v_{i+1}$  und  $x_2 = v_{j+1}$ , daß  $D - x_i$  für  $i = 1, 2$  stark zusammenhängend ist.  $\parallel$

Zum Abschluß wollen wir noch einige weitere interessante Ergebnisse über Turniere und lokal semi-vollständige Digraphen ohne Beweise angeben und diskutieren.

**Definition 17.10.** Besitzt ein Digraph  $D$  zwei eckendisjunkte orientierte Kreise  $C_1$  und  $C_2$  mit  $L(C_i) \geq 3$  für  $i = 1, 2$ , und gilt außerdem  $E(D) = E(C_1) \cup E(C_2)$ , so spricht man von *komplementären Kreisen*.

Das Problem, welche stark zusammenhängenden Turniere komplementäre Kreise besitzen, wurde schon Anfang der achtziger Jahre von Carsten Thomassen gestellt (man vgl. dazu Reid [2]). Zunächst geben wir einige Beispiele an, die zeigen, daß nicht alle stark zusammenhängenden Turniere komplementäre Kreise besitzen.

**Beispiel 17.3.** Es sei  $T$  das transitive  $n$ -Turnier mit der Eckenmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$ , so daß  $i \rightarrow j$  für  $1 \leq i < j \leq n$  gilt.

- a) Ersetzen wir in  $T$  die beiden Bogen  $(1, j)$  und  $(j, n)$  durch die beiden Bogen  $(j, 1)$  und  $(n, j)$  für ein  $j$  mit  $1 < j < n$ , so erhalten wir ein stark zusammenhängendes Turnier  $T_j$ , das keine komplementären Kreise enthält.
- b) Es gelte  $2 < i_1 < i_2 < \dots < i_t$  und  $1 + i_t < j_1 < j_2 < \dots < j_p < n - 1$ . Geben wir den Bogen

$$(1, n), (1, i_1), \dots, (1, i_t), (j_1, n), \dots, (j_p, n)$$

aus  $T$  die umgekehrte Richtung, so entsteht ein stark zusammenhängendes Turnier  $T_{t,p}$ , das auch keine komplementären Kreise besitzt. Denn jeder Kreis  $C$  aus  $T_{t,p}$ , der durch die Ecke  $i_t + 1$  geht, enthält den Bogen  $(n, 1)$  und damit die Ecken 1 und  $n$ . Da das Turnier  $T_{t,p} - E(C)$  nicht stark zusammenhängend ist, kann es in  $T_{t,p}$  keine komplementären Kreise geben.



Es ist leicht zu sehen, daß die angegebenen Beispiele genau 1-fach stark zusammenhängend sind. Betrachten wir aber 2-fach stark zusammenhängende Turniere, so erhalten wir eine völlig veränderte Situation, denn alle 2-fach stark zusammenhängenden Turniere  $T_n$  mit  $n \geq 8$  besitzen komplementäre Kreise. Diese Tatsache folgt aus dem nächsten interessanten Ergebnis von Reid.

**Satz 17.15 (Reid [2] 1985).** Ist  $T$  ein 2-fach stark zusammenhängendes Turnier der Ordnung  $n \geq 8$ , so enthält  $T$  zwei komplementäre Kreise der Länge 3 und  $n - 3$ .

Mit Hilfe eines schwierigen Induktionsbeweises, wobei der Satz von Reid als Induktionsanfang dient, vervollständigte Song 1993 dieses Resultat.

**Satz 17.16 (Song [1] 1993).** Ist  $T$  ein 2-fach stark zusammenhängendes Turnier der Ordnung  $n \geq 8$ , so enthält  $T$  zwei komplementäre Kreise der Länge  $p$  und  $n - p$  für alle  $p$  mit  $3 \leq p \leq \frac{n}{2}$ .

Bang-Jensen [2] beobachtete 1992, daß die 2-regulären lokal semi-vollständigen Digraphen der Ordnung  $2t+1 \geq 7$  zwar 2-fach stark zusammenhängend sind aber keine komplementären Kreise besitzen. Mit dem nächsten Resultat, das zwei Vermutungen von Bang-Jensen [2] bestätigt, zeigen wir, daß es keine weiteren Beispiele dieser Art gibt.

**Satz 17.17 (Guo, Volkmann [3] 1994).** Ist  $D$  ein 2-fach stark zusammenhängender lokal semi-vollständiger Digraph mit mindestens 8 Ecken, so enthält  $D$  genau dann keine komplementären Kreise, wenn  $D$  von ungerader Ordnung und 2-regulär ist.

Kürzlich habe ich zusammen mit meinem Schüler Dr. Dirk Meierling gezeigt, daß Satz 17.17 sogar für die größere Familie der In-Turniere richtig ist. Dabei nennt man einen schlichten Digraphen  $D$  *In-Turnier*, falls  $D[N^-(x)]$  für alle Ecken  $x$  aus  $D$  ein Turnier ist.

**Satz 17.18 (Meierling, Volkmann [1] 2008).** Ist  $D$  ein 2-fach stark zusammenhängendes In-Turnier mit mindestens 8 Ecken, so enthält  $D$  genau dann keine komplementären Kreise, wenn  $D$  von ungerader Ordnung und 2-regulär ist.

Ein zum Satz 17.1 analoger Beweis zeigt, daß auch ein stark zusammenhängendes In-Turnier Hamiltonsch ist. Diese Aussage wurde 1993 von Bang-Jensen, Huang und Prisner [1] bewiesen. Weitere Informationen über In-Turniere findet der Leser in den Dissertationen meiner Schüler Dr. Meike Tewes [1] 1999 und Dr. Dirk Meierling [1] 2007 sowie in einem Artikel von Tewes und Volkmann [2] 2001.

Als Verallgemeinerung der Sätze von Reid und Song, habe ich zusammen mit Yubao Guo [4] das Problem der komplementären Kreise in 2-fach stark zusammenhängenden lokal semi-vollständigen Digraphen vollständig gelöst.

**Definition 17.11.** Ein Digraph  $D$  heißt *schwach Hamiltonsch-zusammenhängend*, wenn zwischen je zwei Ecken  $x$  und  $y$  von  $D$  ein orientierter Hamiltonscher Weg von  $x$  nach  $y$  oder von  $y$  nach  $x$  existiert. Ein Digraph  $D$  heißt *stark Hamiltonsch-zusammenhängend*, wenn zwischen je zwei Ecken  $x$  und  $y$  von  $D$  ein orientierter Hamiltonscher Weg von  $x$  nach  $y$  und von  $y$  nach  $x$  existiert.

Über stark bzw. schwach Hamiltonsch-zusammenhängenden Turniere hat Thomassen [1] 1980 intensive und erfolgreiche Untersuchungen durchgeführt. Im Jahre 1996 haben Bang-Jensen, Guo und Volkmann [1] die schwach Hamiltonsch-zusammenhängenden lokal semi-vollständigen Digraphen charakterisiert, und Yubao Guo fand 1995 in seiner Dissertation [1] eine wichtige und äußerst wirksame hinreichende Bedingung für stark Hamiltonsch-

zusammenhängende lokal semi-vollständige Digraphen. Eine unmittelbare Anwendung dieser hinreichenden Bedingung liefert folgendes interessante Ergebnis, das Thomassen [1] 1980 für Turniere bewiesen hat.

**Satz 17.19 (Guo [1] 1995).** Jeder 4-fach stark zusammenhängende lokal semi-vollständige Digraph ist sogar stark Hamiltonsch-zusammenhängend.

Weitere Informationen über lokal semi-vollständige Digraphen findet der Leser in den Dissertationen meiner Schüler Prof. Dr. Yubao Guo [1] und Dr. Dirk Meierling [1] sowie dem umfassenden Werk “Digraphs: Theory, Algorithms and Applications” aus dem Jahre 2009 von Bang-Jensen und Gutin [2].

# Symbolverzeichnis

$\Gamma(G)$	Entdecken von $G$	31
$\Delta^+ = \Delta^+(D)$	$= \max_{x \in E(D)} \{\delta^+(x)\}$ , maximaler Außengrad von $D$	4
$\Delta^- = \Delta^-(D)$	$= \max_{x \in E(D)} \{\delta^-(x)\}$ , maximaler Innengrad von $D$	4
$\Delta(D)$	$= \max\{\Delta^+(D), \Delta^-(D)\}$ , Maximalgrad von $D$	270
$\Theta_G(X, Y, f)$	$= f(X) - f(Y) + d_{G-X}(Y) - q_G(X, Y, f)$	123
$\Theta_G(X, Y, g, f)$	$= f(X) - g(Y) + d_{G-X}(Y) - q_G(X, Y, g, f)$	129
$\Lambda(G)$	Menge der Länder von $G$	214
$\Phi(G)$	$= \max \varphi(H)$ , wobei das Maximum über alle Teilgraphen $H$ von $G$ ungerader Ordnung mit $n(H) \geq 3$ zu bilden ist	245
$\Omega(z)$	Menge der Farben, die nicht mit $z$ inzidieren	242
$\alpha = \alpha(G)$	Unabhängigkeitszahl von $G$	157
$\alpha_0 = \alpha_0(G)$	Kantenunabhängigkeitszahl von $G$	157
$\beta = \beta(G)$	Eckenüberdeckungsanzahl von $G$	157
$\beta_0 = \beta_0(G)$	Kantenüberdeckungsanzahl von $G$	157
$\gamma = \gamma(G)$	Dominanzanzahl von $G$	174
$\gamma_k(G)$	$k$ -Dominanzanzahl von $G$	190
$\delta^+ = \delta^+(D)$	$= \min_{x \in E(D)} \{\delta^+(x)\}$ , minimaler Außengrad von $D$	4
$\delta^- = \delta^-(D)$	$= \min_{x \in E(D)} \{\delta^-(x)\}$ , minimaler Innengrad von $D$	4
$\delta(D)$	$= \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$ , Minimalgrad von $D$	270
$\delta = \delta(G)$	Minimalgrad von $G$	4
$\theta(G)$	Cliquenzerlegungsanzahl von $G$	163
$\kappa = \kappa(G)$	Anzahl der Komponenten von $G$	8
$\lambda = \lambda(D)$	Bogenzusammenhangszahl von $D$	269
$\lambda = \lambda(G)$	Kantenzusammenhangszahl von $G$	262
$\mu = \mu(G)$	Index oder zyklomatische Zahl von $G$	10
$\nu = \nu(G)$	Anzahl der Kreise von $G$	28
$\xi(G)$	$= \sum_{a, b \in E(G)} d(a, b)$	17
$\xi(v)$	$= \sum_{a \in E(G)} d(v, a)$	17
$\pi = \pi(G)$	Wegüberdeckungsanzahl von $G$	62
$\pi^* = \pi^*(D)$	orientierte Wegüberdeckungsanzahl von $D$	62
$\rho(H)$	$= \sum_{k \in K(H)} \rho(k)$ , Länge oder Bewertung von $H$	18

$\rho(k)$	Länge oder Bewertung der Kante $k$	18
$\sigma = \sigma(D)$	Eckenzusammenhangszahl von $D$	269
$\sigma = \sigma(G)$	Eckenzusammenhangszahl von $G$	262
$\tau_i = \tau_i(G)$	Anzahl der Ecken vom Grad $i$ in $G$	31
$\varphi(G)$	$= \frac{2 K(G) }{ E(G) -1}$ mit $ E(G)  \geq 3$	245
$\chi = \chi(G)$	chromatische Zahl von $G$	164,
		225
$\chi' = \chi'(G)$	chromatischer Index von $G$	240
$\chi_T = \chi_T(G)$	totalchromatische Zahl von $G$	256
$\psi = \psi(G)$	achromatische Zahl von $G$	225
$\psi_s = \psi_s(G)$	pseudoachromatische Zahl von $G$	225
$\omega(G)$	Cliquenzahl von $G$	163
$\bar{A}$	Komplement der Menge $A$	19
$A\Delta B$	symmetrische Differenz der Mengen $A$ und $B$	33
$(A, B) = (A, B)_D$	Menge der Bogen von $A$ nach $B$ in $D$	269
$A_D$	Adjazenzmatrix von $D$	5
$B_G$	Bewertungsmatrix von $G$	21
$B(D)$	Bogenmenge von $D$	2
$b(G)$	Bondage Zahl von $G$	211
$C_p$	Kreis der Länge $p$	7
$Cl_r(G)$	$r$ -Hülle von $G$	68
$\text{cap } L$	Kapazität des Schnittes $L$	289
$c(k)$	Kapazität des Bogens $k$	288
$D = (E, B, h)$	$(E, B) = (E(D), B(D))$ , Digraph	2
$D \subseteq D'$	$D'$ ist Teilgraph von $D$	22
$D + k$	Ergänzung des Bogens $k$	23
$D_1 \rightarrow D_2$	$D_1$ dominiert $D_2$	77
$D[E']$	der von $E'$ induzierte Teilgraph von $D$	23
$D(G)$	Der $G$ zugeordnete Digraph	270
$d^*(v) = d^*(v, G)$	Anzahl der Nachbarn maximalen Grades von $v$	247
$d^+(D)$	$= \sum_{x \in E(D)} d^+(x, D)$	4
$d^+(x) = d^+(x, D)$	Außengrad der Ecke $x$ in $D$	4
$d^-(D)$	$= \sum_{x \in E(D)} d^-(x, D)$	4
$d^-(x) = d^-(x, D)$	Innengrad der Ecke $x$ in $D$	4
$d_1, d_2, \dots, d_n$	Gradsequenz	12
$d_\rho(a, A)$	$\rho$ -Abstand zwischen $a$ und $A$	19
$d_\rho(a, b)$	$\rho$ -Abstand zwischen $a$ und $b$	18
$d(a, b) = d_D(a, b)$	Abstand von $a$ nach $b$ in $D$	82
$d(X, Y) = d_D(X, Y)$	Abstand der Eckenmengen $X$ und $Y$ in $D$	273
$d(G)$	$= \sum_{x \in E(G)} d(x, G)$	4
$d(a, b) = d_G(a, b)$	Abstand der Ecken $a$ und $b$ in $G$	15
$d_G(X)$	$= \sum_{x \in X} d(x, G)$	123

$d(X, Y) = d_G(X, Y)$	Abstand der Eckenmengen $X$ und $Y$ in $G$	265
$\text{dm}(D)$	Durchmesser von $D$	82
$\text{dm}(G)$	Durchmesser von $G$	15
$d(x) = d(x, G)$	Grad der Ecke $x$ in $G$	3
$E = E(D)$	Eckenmenge von $D$	2
$E = E(G)$	Eckenmenge von $G$	1
$E(Z)$	Eckenmenge der Kantenfolge $Z$	7
$e(a)$	Exzentrizität der Ecke $a$	15
$F_{h,v}$	Fächermenge	242
$f$	Fluß im Netzwerk $N$	289
$f^+(a)$	$f^+(\{a\})$	289
$f^+(X)$	$f((X, \overline{X}))$	289
$f^-(X)$	$f((\overline{X}, X))$	289
$(f, F)$	Graphenhomomorphismus	4
$f(X)$	$= \sum_{x \in X} f(x)$	123
$\overline{G}$	Komplementärgraph von $G$	14
$G = (E, K, g)$	$(E, K) = (E(G), K(G))$ , Graph	1
$G' \cong G$	$G'$ isomorph zu $G$	4
$G' \subseteq G$	$G'$ ist Teilgraph von $G$	6
$G + H$	Summe der Graphen $G$ und $H$	118
$G + k$	Ergänzen der Kante $k$	6
$G - E'$	Löschen aller Ecken $E' \subseteq E(G)$	6
$G - k$	Löschen der Kante $k$	6
$G - K'$	Löschen aller Kanten $K' \subseteq K(G)$	6
$G - x$	Löschen der Ecke $x$	6
$G_1[G_2]$	lexikographisches Produkt der Graphen $G_1$ und $G_2$	154
$G_1 \times G_2$	kartesisches Produkt von $G_1$ und $G_2$	154
$G_1 \wedge G_2$	Konjunktion von $G_1$ und $G_2$	154
$G_1 \vee G_2$	Disjunktion von $G_1$ und $G_2$	154
$G[A, B]$	von $A$ und $B$ induzierter bipartiter Graph	160
$G(D)$	untergeordneter Graph von $D$	3
$G[E']$	der von $E'$ induzierte Teilgraph von $G$	6
$G \circ \mathcal{H}$	Koronagraph von $G$ und $\mathcal{H}$	152
$\cup G_i$	Vereinigung der Graphen $G_i$	6
$\cap G_i$	Durchschnitt der Graphen $G_i$	6
$G^{(k)}$	Kontraktion der Kante $k$	37, 234
$G[K']$	der von $K'$ erzeugte Teilgraph von $G$	6
$G^{k,a}$	Unterteilungsgraph durch $k$ und $a$	250
$G^p$	Potenzgraph des schlichten Graphen $G$	152
$g(k) = \{x, y\}$	Kante mit Endpunkten $x$ und $y$	1
$\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_q\}$	Cliquenzerlegung von $G$	163
$H_1 \uplus H_2 \uplus \dots \uplus H_q$	Faktorisierung des $K_n$	306

$\text{Hom}(G, G')$	Homomorphismen von $G$ nach $G'$	4
$h(k) = (x, y)$	Bogen mit Anfangspunkt $x$ und Endpunkt $y$	3
$I_D$	Inzidenzmatrix von $D$	5
$I_G$	Inzidenzmatrix von $G$	5
$\text{ir} = \text{ir}(G)$	Irredundanzzahl von $G$	199
$K_{1,3}$	Klaue	98
$K(G)$	Kantenmenge des Graphen $G$	1
$K_n$	vollständiger Graph mit $n$ Ecken	6
$K_n^*$	vollständiger Digraph mit $n$ Ecken	269
$K_{r_1, r_2, \dots, r_p}$	vollständiger $p$ -partiter Graph	65
$K(Z)$	Kantenmenge der Kantenfolge $Z$	7
$k = ab$	Kante mit $g(k) = \{a, b\}$	8
$k = (a, b)$	Bogen mit $h(k) = (a, b)$	8
$L = (A, \overline{A})$	Schnitt in $N$	289
$\mathcal{L}(G)$	Line-Graph von $G$	148
$L(Z)$	Länge der (orientierten) Kantenfolge $Z$	7
$l = l(G)$	Anzahl der Länder des planaren Graphen $G$	206
$ M $	Determinante der Matrix $M$	
$m(A, B) = m_G(A, B)$	$= \sum_{x \in A} m(x, B)$	11
$m = m(D) =  B(D) $	Größe von $D$	3
$m_D(A, B)$	Anzahl der Bogen von $A$ nach $B$ in $D$	269
$m_D(x_i, x_j)$	Anzahl der Bogen von der Ecke $x_i$ zur Ecke $x_j$	5
$\text{me}(G)$	mittlere Entfernung in $G$	17
$m = m(G) =  K(G) $	Größe von $G$	3
$m(x_i, x_j) = m_G(x_i, x_j)$	Anzahl der Kanten zwischen den Ecken $x_i$ und $x_j$	5
$m(x, A) = m_G(x, A)$	$= \sum_{y \in A-x} m(x, y)$	11
$N = (E, B, u, v, c)$	Netzwerk	288
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$	
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	
$N^+(A) = N^+(A, D)$	positive Nachbarn der Eckenmenge $A$ in $D$	11
$N^+(x) = N^+(x, D)$	positive Nachbarn von $x$ in $D$	11
$N^-(A) = N^-(A, D)$	negative Nachbarn der Eckenmenge $A$ in $D$	11
$N^-(x) = N^-(x, D)$	negative Nachbarn von $x$ in $D$	11
$N(A) = N(A, G)$	Nachbarn der Eckenmenge $A$ in $G$	10
$N[A] = N[A, G]$	$N(A, G) \cup \{A\}$	10
$N(x) = N(x, G)$	Nachbarn der Ecke $x$ in $G$	10
$N[x] = N[x, G]$	$N(x, G) \cup \{x\}$	10
$n!$	Fakultät der natürlichen Zahl $n$	
$n = n(D) =  E(D) $	Ordnung von $D$	3
$n = n(G) =  E(G) $	Ordnung von $G$	3
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient	



$O(\dots)$	Landausches Symbol	
<b>P</b>	Petersen-Graph	244
<b>P*</b>	$\mathbf{P} - a$ mit $a \in E(\mathbf{P})$	245
$P(m, n)$	Polynom in den Variablen $m$ und $n$	
$P(q, G)$	chromatisches Polynom von $G$	233
$P(x) = P(x, I) = P_G(x, I)$	private Nachbarn von $x$ bezüglich $I$	199
$p(x)$	äußerer privater Nachbar von $x$	182
$Q = (E(Q), K(Q))$	gemischter Graph	275
$q(G)$	Anzahl ungerader Komponenten von $G$	115
$qG$	$q$ disjunkte Kopien von $G$	152
$q_G(X, Y, f)$	Anzahl ungerader $f$ -Komponenten von $G - (X \cup Y)$	123
$q_G(X, Y, g, f)$	Anzahl ungerader $(g, f)$ -Komponenten von $G - (X \cup Y)$	129
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$R(8)$	Rösselsprunggraph	61
$r(D)$	Radius von $D$	82
$r(G)$	Radius von $G$	15
$r(G_1, G_2, \dots, G_q)$	verallgemeinerte Ramsey-Zahl	306
$r(p_1, p_2, \dots, p_q)$	$= r(K_{p_1}, K_{p_2}, \dots, K_{p_q})$	306
$r(p, q)$	Ramsey-Zahl	302
$s(k)$	Sättigung des Bogens $k$	292
$s(W)$	Sättigung des Weges $W$	292
$T_n$	$n$ -Turnier	75
$T_{n,r}$	Turán-Graph	171
$T_r(n)$	Turán-Graph	170
$t(G)$	Tailenweite von $G$	180
VAL	Vizings Adjazenz Lemma	247
$W_{ab}$	(kürzester Weg zwischen $a$ und $b$ )	15
$(k_1, k_2, \dots, k_p)$	(orientierte) Kantenfolge von $a_0$ nach $a_p$	7
$(a_0, a_1, \dots, a_p)$	(orientierte) Kantenfolge von $a_0$ nach $a_p$	7
$(a_0, k_1, a_1, \dots, k_p, a_p)$	(orientierte) Kantenfolge von $a_0$ nach $a_p$	7
$a_0 a_1 \dots a_p$	(orientierte) Kantenfolge von $a_0$ nach $a_p$	7
$w(f)$	Flußstärke von $f$	289
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl $\leq x$	
$\lceil x \rceil$	kleinste ganze Zahl $\geq x$	
$x \rightarrow y$	$x$ dominiert $y$	76

$\mathbb{Z}$	$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$	
$Z(D)$	Zentrum von $D$	82
$Z(G)$	Zentrum von $G$	15
$z(G)$	Anzahl der Gerüste von $G$	38

# Literaturverzeichnis

- [1] Abu-Sbeih, M.Z.  
On the number of spanning trees of  $K_n$  and  $K_{m,n}$ . *Discrete Math.* **84** (1990), 205 – 207. [40]
- [1] Aharoni, R.  
Menger's theorem for countable graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **43** (1987), 303 – 313. [280]
- [1] Aho, V., J. Hopcroft und J. Ullman  
Data Structures and Algorithms. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), Menlo Park (California), London (1983). [162]
- [1] Ahrens, W.  
Über das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung. *Math. Ann.* **49** (1897), 311 – 324. [35]
- [1] Ahuja, R.K., T.L. Magnanti und J.B. Orlin  
Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1993). [301]
- [1] Aigner, M.  
Graphentheorie: Eine Entwicklung aus dem 4-Farben Problem. Teubner, Stuttgart (1984). [238]
- [1] Akiyama, J. und M. Kano  
Factors and factorizations of graphs – a survey. *J. Graph Theory* **9** (1985), 1 – 42. [140]
- [2] Akiyama, J. und M. Kano  
Factors and Factorizations of Graphs. Proof Techniques in Factor Theory. *Lecture Notes in Mathematics* **2031**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2011). [140]
- [1] Allan, R.B. und R. Laskar  
On domination and some related topics in graph theory. *Proc. of the 9th Southeast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Utilitas Math., Winnipeg* (1978), 43 – 56. [200]
- [1] Alspach, B.  
Cycles of each length in regular tournaments. *Canad. Math. Bull.* **10** (1967), 283 – 286. [84]
- [1] Andersen, L.D.  
On edge-colourings of graphs. *Math. Scand.* **40** (1977), 161 – 175. [243]
- [1] Anderson, I.  
Perfect matchings of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B* **10** (1971), 183 – 186. [116]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Appel, K. und W. Haken  
Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. Illinois J. Math. **21** (1977), 429 – 490. [217]
- [2] Appel, K. und W. Haken  
The four color proof suffices. Math. Intelligencer **8** (1986), 10 – 20. [217]
- [3] Appel, K. und W. Haken  
Every Planar Map is Four Colorable. Contemporary Mathematics 98 (1989). [218, 366]
- [1] Appel, K., W. Haken und J. Koch  
Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. Illinois J. Math. **21** (1977), 491 – 567. [217]
- [1] Arnautov, V.I.  
Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of vertices (in Russian). Prikl. Mat. i Programirovanie Vyp. **126 11** (1974), 3 – 8. [198]
- [1] Auerbach, B. und R. Laskar  
Some coloring numbers for complete  $r$ -partite graphs. J. Combin. Theory Ser. B **21** (1976), 169 – 170. [230, 231]
- [1] Bähler, F.  
Über die Zerlegung regulärer Streckenkomplexe ungerader Ordnung. Comment. Math. Helv. **10** (1938), 275 – 287. [135]
- [2] Bähler, F.  
Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen. Comment. Math. Helv. **27** (1953), 81 – 100. [54]
- [1] Balakrishnan, R. und P. Paulraja  
Note on the existence of directed  $(k + 1)$ -cycles in disconnected complete  $k$ -partite digraphs. J. Graph Theory **8** (1984), 423 – 426. [93]
- [1] Balbuena, C. und A. Carmona  
On the connectivity and superconnectivity of bipartite digraphs and graphs. Ars Combin. **61** (2001), 3 – 21. [269]
- [1] Bang-Jensen, J.  
Locally semicomplete digraphs: A generalization of tournaments. J. Graph Theory **14** (1990), 371 – 390. [315, 316, 317, 318]
- [2] Bang-Jensen, J.  
On the structure of locally semicomplete digraphs. Discrete Math. **100** (1992), 243 – 265. [327]
- [1] Bang-Jensen, J., Y. Guo, G. Gutin und L. Volkmann  
A classification of locally semicomplete digraphs. Discrete Math. **167/168** (1997), 101 – 114. [318, 320, 324, 325]
- [1] Bang-Jensen, J., Y. Guo und L. Volkmann  
Weakly Hamiltonian-connected locally semicomplete digraphs. J. Graph Theory **21** (1996), 136 – 172. [327]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Bang-Jensen, J. und G. Gutin  
Paths, trees and cycles in tournaments, *Congr. Numer.* **115** (1996), 131 – 170. [84]
- [2] Bang-Jensen, J. und G. Gutin  
Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, 2nd Edition, Springer, London (2009). [84, 328]
- [1] Bang-Jensen, J., J. Huang und E. Prisner  
In-tournament digraphs. *J. Combin. Theory* **B 59** (1993), 267 – 287. [327]
- [1] Bascò, G. und Z. Tuza  
Domination properties and induced subgraphs. *Discrete Math.* **111** (1993), 37 – 40. [187]
- [1] Bauer, D., F. Harary, J. Nieminen und C.L. Suffel  
Domination alteration sets in graphs. *Discrete Math.* **47** (1983), 153 – 161. [211]
- [1] Bean, T.J., M.A. Henning und H.C. Swart  
On the integrity of distance domination in graphs. *Australas. J. Combin.* **10** (1994), 29 – 43. [199]
- [1] Behzad, M.  
Graphs and their chromatic numbers. Ph.D. Thesis, Michigan State University (1965). [256, 257, 260]
- [2] Behzad, M.  
The total chromatic number of a graph, a survey. *Combinatorial Math. Appl.* (Hrsg. D.J.W. Welsh). Acad. Press, New York (1971), 1 – 9. [257]
- [1] Behzad, M., G. Chartrand und J.K. Cooper, Jr.  
The colour numbers of complete graphs. *J. London Math. Soc.* **42** (1967), 226 – 228. [256, 257, 259]
- [1] Beineke, L.W.  
Derived graphs and digraphs. *Beiträge zur Graphentheorie* (Hrsg. H. Sachs, H. Voss, H. Walther). Teubner, Leipzig (1968), 17 – 23. [150]
- [2] Beineke, L.W.  
Characterizations of derived graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **9** (1970), 129 – 135. [150]
- [1] Beineke, L.W. und S. Fiorini  
On small graphs critical with respect to edge-colourings. *Discrete Math.* **16** (1976), 109 – 121. [249]
- [1] Beineke, L.W. und R.J. Wilson  
On the edge-chromatic number of a graph. *Discrete Math.* **5** (1973), 15 – 20. [246]
- [2] Beineke, L.W. und R.J. Wilson  
A survey of recent results on tournaments. *Recent Adv. Graph Theory, Proc. Symp., Prague, 1974.* Academia, Praha (1975), 31 – 48. [84]
- [1] Belck, H.-B.  
Reguläre Faktoren von Graphen. *J. Reine Angew. Math.* **188** (1950), 228 – 252. [127]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Benhocine, A. und A.P. Wojda  
On self-complementation. *J. Graph Theory* **8** (1985), 335 – 341. [17]
- [2] Benhocine, A. und A.P. Wojda  
The Geng-Hua Fan conditions for pancyclic or hamilton-connected graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **42** (1987), 167 – 180. [66]
- [1] Berge, C.  
Two theorems in graph theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **43** (1957), 842 – 844. [99]
- [2] Berge, C.  
Sur le couplage maximum d'un graphe. *C. R. Acad. Sci. Paris Math.* **247** (1958), 258 – 259. [119]
- [3] Berge, C.  
Les problèmes de coloration en théorie des graphes. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **9** (1960), 123 – 160. [164, 169]
- [4] Berge, C.  
Some common properties for regularizable graphs, edge-critical graphs and  $B$ -graphs. *Graph Theory and Algorithms* (Hrsg. N. Saito und T. Nishizeki). *Lecture Notes in Computer Science* **108**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1981), 108 – 123. [159, 160]
- [6] Berge, C.  
*Graphs* (Second Revised Edition). North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1985). [160]
- [1] Bermond, J.C.  
Hamiltonian graphs. *Selected Topics in Graph Theory* (Hrsg. L.W. Beineke und R.J. Wilson). Academic Press, London, New York, San Francisco (1978), 127 – 167. [67]
- [1] Bermond, J.C. und C. Thomassen  
Cycles in digraphs – a survey. *J. Graph Theory* **5** (1981), 1 – 43. [84]
- [1] Bhave, V.N.  
On the pseudoachromatic number of a graph. *Fund. Math.* **102** (1979), 159 – 164. [230]
- [1] Birkhoff, G.D.  
A determinant formula for the number of ways of coloring a map. *Ann. of Math. (2)* **14** (1912 – 1913), 42 – 46. [234]
- [2] Birkhoff, G.D.  
The reducibility of maps. *Amer. J. Math* **35** (1913), 115 – 128. [234]
- [1] Blidia, M., M. Chellali und O. Favaron Independence and 2-domination in trees. *Australas. J. Combin.* **33** (2005), 317 – 327. [195, 199]
- [1] Blidia, M., M. Chellali und L. Volkmann  
On the  $p$ -domination number of cactus graphs. *Discuss. Math. Graph Theory* **25** (2005), 355 – 361. [199]
- [2] Blidia, M., M. Chellali und L. Volkmann  
Bounds of the 2-domination number of graphs *Utilitas Math.* **71** (2006), 209 – 216. [196, 199]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.



- [3] Blidia, M., M. Chellali und L. Volkmann  
Some bounds on the  $p$ -domination number in trees, *Discrete Math.* **306** (2006), 2031 – 2037. [195, 199]
- [1] Bodendiek, R. und K. Wagner  
Eine Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski. *Mitt. Math. Ges. Hamburg* **11** (1989), 677 – 697. [223]
- [1] Boesch, F. und R. Tindell  
Robbins's theorem for mixed multigraphs. *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 716 – 719. [275]
- [1] Bollobás, B.  
On graphs with equal edge connectivity and minimum degree. *Discrete Math.* **28** (1979), 321 – 323. [272]
- [2] Bollobás, B.  
Graph Theory, An Introductory Course. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1979). [136]
- [1] Bollobás, B. und E.J. Cockayne  
Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance. *J. Graph Theory* **3** (1979), 241 – 249. [182, 200]
- [1] Bollobás, B., A. Saito und N.C. Wormald  
Regular factors of regular graphs. *J. Graph Theory* **9** (1985), 97 – 103. [136]
- [1] Bondy, J.A.  
Pancyclic graphs I. *J. Combin. Theory Ser. B* **11** (1977), 80 – 84. [70, 71, 72]
- [2] Bondy, J.A.  
Disconnected orientations and a conjecture of Las Vergnas. *J. London Math. Soc.* **14** (1976), 277 – 282. [86, 87, 88, 93]
- [1] Bondy, J.A. und V. Chvátal  
A method in graph theory. *Discrete Math.* **15** (1976), 111 – 135. [67]
- [1] Bondy, J.A. und U.S.R. Murty  
Graph Theory with Applications. The Macmillan Press Ltd., London and Basingstoke (1976). [16, 57, 66, 223]
- [1] Borchardt, C.W.  
Über eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante. *J. Reine Angew. Math.* **57** (1860), 111 – 121. [37]
- [1] Borowiecki, M.  
On a minimaximal kernel of trees. *Discuss. Math.* **1** (1975), 3 – 6. [184, 185]
- [1] Boruvka, O.  
O jistém problému minimálním (Über ein Minimalproblem, tschechisch). *Práce moravské přírod. spol.* (1926), III. 3. [46]

- [1] Bose, R.C.  
Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. *Pacific J. Math.* **13** (1963), 389 – 419. [286]
- [1] Brigham, R.C. und R.D. Dutton  
Bounds on the domination number of a graph. *Quart. J. Math. Oxford* **41** (1989), 269 – 275. [180]
- [2] Brigham, R.C. und R.D. Dutton  
A compilation of relations between graph invariants-supplement, I. *Networks* **21** (1991), 412 – 455. [187]
- [1] Broersma, H.J.  
Hamilton Cycles in Graphs and Related Topics. Proefschrift, University of Twente, Enschede (1988), 113 S. [73]
- [1] Broersma, H.J. und C. Hoede  
Path graphs. *J. Graph Theory* **13** (1989), 427 – 444. [152]
- [1] Broersma, H.J., J. van den Heuvel und H.J. Veldman  
A generalization of Ore's theorem involving neighborhood unions. *Discrete Math.* **122** (1993), 37 – 49. [73]
- [1] Brooks, R.L.  
On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37** (1941), 194 – 197. [227]
- [1] Brouwer, A.E. und D.M. Mesner  
The connectivity of strongly regular graphs. *European J. Combin.* **6** (1985), 215 – 216. [286]
- [1] Buckley, F. und F. Harary  
Distance in Graphs. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), Menlo Park (California), New York (1990). [144]
- [1] Burr, S.A.  
Generalized Ramsey theory for graphs – a survey. *Graphs and Combinatorics, Lecture Notes in Mathematics* **406** (Hrsg. R.A. Bari und F. Harary), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974), 52 – 75. [312]
- [1] Burr, S.A. und J.A. Roberts  
On Ramsey numbers for stars. *Utilitas Math.* **4** (1973), 217 – 220. [311]
- [1] Burzio, M. und D.C. Demaria  
Hamiltonian tournaments with the least number of 3-cycles. *J. Graph Theory* **14** (1990), 663 – 672. [80]
- [1] Busch, A.H., M.S. Jacobson und K.B. Reid  
On arc-traceable tournaments. *J. Graph Theory* **53** (2006), 157 – 166. [80]
- [1] Cameron, P.J.  
Strongly regular graphs. *Selected Topics in Graph Theory* (Hrsg. L.W. Beineke und R.J. Wilson). Academic Press, London, New York, San Francisco (1978), 337 – 360. [286]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Camion, P.  
Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *C. R. Acad. Sci. Paris* **249** (1959), 2151 – 2152. [77]
- [1] Carlson, K. und M. Develin  
On the bondage number of planar and directed graphs. *Discrete Math.* **306** (2006), 820 – 826. [212]
- [1] Carlson, S.C.  
Proof without words: self-complementary graphs. *Math. Mag.* **73** (2000), 12. [16]
- [1] Caro, Y.  
On the  $k$ -domination and  $k$ -transversal numbers of graphs and hypergraphs. *Ars Combin.* **29 C** (1990), 49 – 55. [199]
- [1] Caro, Y. und Y. Roditty  
A note on the  $k$ -domination number of a graph. *Int. J. Math. Math. Sci.* **13** (1990), 205 – 206. [192]
- [1] Caro, Y. und R. Yuster  
Dominating a family of graphs with small connected subgraphs. *Combin. Probab. Comput.* **9** (2000), 309 – 313. [199]
- [1] Cayley, A.  
On the mathematical theory of isomers. *Philosophical Magazine* **47** (1874), 444 – 446. [viii]
- [2] Cayley, A.  
On the analytical forms called trees, with application to the theory of chemical combinations. *Report of the British Association for the Advancement of Science* **45** (1875), 257 – 305. [viii]
- [3] Cayley, A.  
On the colouring of maps. *Proc. Roy. Geographical Soc. (N. S.)* **1** (1879), 259 – 261. [217]
- [4] Cayley, A.  
A theorem on trees. *Quart. J. Pure Appl. Math.* **23** (1889), 376 – 378. [37, 39]
- [1] Chao, C.Y. und N.Z. Li  
On trees of polygons. *Arch. Math. (Basel)* **45** (1985), 180 – 185. [238]
- [1] Chartrand, G.  
A graph-theoretic approach to a communications problem. *SIAM J. Appl. Math.* **14** (1966), 778 – 781. [264]
- [1] Chartrand, G. und F. Harary  
Graphs with prescribed connectivities. *Theory of Graphs* (Hrsg. P. Erdős und G. Katona). Academic Press, London, New York, San Francisco (1968), 61 – 63. [263]
- [1] Chartrand, G. und L. Lesniak  
Graphs and Digraphs (Second Edition). Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, Monterey, California (1986). [57, 67, 71, 223, 228]

- [2] Chartrand, G. und L. Lesniak  
Graphs and Digraphs (Third Edition). Chapman and Hall, London, Weinheim. New York, Tokyo, Melbourne, Madras (1996). [73]
- [1] Chen, B. und S. Zhou  
Upper bounds for  $f$ -domination number of graphs. *Discrete Math.* **185** (1998), 239 – 243. [194]
- [1] Chen, Xue Gang  
The bondage number of planar graphs. (Chinese. English, Chinese summaries). *Comm. Appl. Math. Comput.* **19** (2005), 85 – 88. [213]
- [1] Chetwynd, A.G. und A.J.W. Hilton  
The chromatic index of graphs with at most four vertices of maximum degree. *Proc. of the 5th Southeast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Baton Rouge, La., 1984). *Congr. Numer.* **43** (1984), 221 – 248. [254]
- [2] Chetwynd, A.G. und A.J.W. Hilton  
Regular graphs of high degree are 1-factorizable. *Proc. London Math. Soc. (3)* **50** (1985), 193 – 206. [248, 249, 252, 253, 254]
- [3] Chetwynd, A.G. und A.J.W. Hilton  
1-factorizing regular graphs of high degree – an improved bound. *Discrete Math.* **75** (1989), 103 – 112. [255]
- [1] Chetwynd, A.G. und H.P. Yap  
Chromatic index critical graphs of order 9. *Discrete Math.* **47** (1983), 23 – 33. [249]
- [1] Chudnovsky, M., G. Cornuéjols, X. Liu, P. Seymour und K. Vušković  
Recognizing Berge Graphs. *Combinatorica* **25** (2005), 143 – 186. [169]
- [1] Chudnovsky, M., N. Robertson, P. Seymour und R. Thomas  
The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math.* **164** (2006) 51 – 229. [169]
- [1] Chvátal, V.  
Tree-complete graph Ramsey numbers. *J. Graph Theory* **1** (1977), 93. [309]
- [1] Chvátal, V. und P. Erdős  
A note on Hamiltonian circuits. *Discrete Math.* **2** (1972), 111 – 113. [281, 282]
- [1] Chvátal, V. und F. Harary  
Generalized Ramsey theory for graphs, III. Small off-diagonal numbers. *Pacific J. Math.* **41** (1972), 335 – 345. [309]
- [1] Clapham, C.R.J., G. Exoo, H. Harborth, I. Mengersen und J. Sheehan  
The Ramsey number of  $K_5 - e$ . *J. Graph Theory* **13** (1989), 7 – 15. [311]
- [1] Clapham, C.R.J. und D.J. Kleitman  
The degree sequences of self-complementary graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **20** (1976), 67 – 74. [17]
- [1] Clark, W.E., B. Shekhtman, S. Suen und D.C. Fisher  
Upper bounds for the domination number of a graph. *Congr. Numer.* **132** (1998), 99 – 123. [199]

- [1] Cockayne, E.J.  
Colour classes for  $r$ -graphs. *Canad. Math. Bull.* **15** (1972), 349 – 354. [306]
- [2] Cockayne, E.J.  
Domination of undirected graphs – a survey. *Theory and application of graphs* (Proc. Internat. Conf., Western Mich. Univ. Kalamazoo, Mich., 1976), pp. 141 – 147, *Lecture Notes in Math.* **642**, Springer, Berlin, 1978. [174]
- [1] Cockayne, E.J., O. Favaron, C. Payan und A.G. Thomason  
Contributions to the theory of domination, independence and irredundance in graphs. *Discrete Math.* **33** (1981), 249 – 258. [187]
- [1] Cockayne, E.J., B. Gamble und B. Shepherd  
An upper bound for the  $k$ -domination number of a graph. *J. Graph Theory* **9** (1985), 533 – 534. [193]
- [1] Cockayne, E.J., S. Goodman und S.T. Hedetniemi  
A linear algorithm for the domination number of a tree. *Inform. Process. Lett.* **4** (1975), 41 – 44. [189]
- [1] Cockayne, E.J. und S.T. Hedetniemi  
Independence graphs. *Proc. of the 5th Southeast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Utilitas Math., Winnipeg* (1974), 471 – 491. [199]
- [2] Cockayne, E.J. und S.T. Hedetniemi  
Towards a theory of domination in graphs. *Networks* **7** (1977), 247 – 261. [187]
- [1] Cockayne, E.J., S.T. Hedetniemi und D.J. Miller  
Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs. *Canad. Math. Bull.* **21** (1978), 461 – 468. [199]
- [1] Cockayne, E.J. und C.M. Mynhardt  
The sequence of upper and lower domination, independence and irredundance numbers of a graph. *Discrete Math.* **122** (1993), 89 – 102. [187]
- [1] Croitoru, C. und E. Suditu  
Perfect stabiles in graphs. *Inform. Process. Lett.* **17** (1983), 53 – 56. [160]
- [1] Damaschke, P.  
Irredundance number versus domination number. *Discrete Math.* **89** (1991), 101 – 104. [201]
- [1] Dankelmann, P.  
Mittlere Entfernung in Graphen. *Doktorarbeit, RWTH Aachen* (1993), 93 S. [18]
- [1] Dankelmann, P., T. Niessen und I. Schiermeyer  
On path-tough graphs. *SIAM J. Disc. Math.* **7** (1994), 571 – 584. [66]
- [1] Dankelmann, P. und L. Volkmann  
New sufficient conditions for equality of minimum degree and edge-connectivity. *Ars Combin.* **40** (1995), 270 – 278. [265, 284]

- [2] Dankelmann, P. und L. Volkmann  
Degree sequence conditions for maximally edge-connected graphs and digraphs. *J. Graph Theory* **26** (1997), 27 – 34. [271, 272]
- [3] Dankelmann, P. und L. Volkmann  
Degree sequence conditions for maximally edge-connected graphs depending on the clique number. *Discrete Math.* **211** (2000), 217 – 223. [269]
- [1] Dantzig, G.B.  
On the shortest route through a network. *Management Sci.* **6** (1959/60), 187 – 190. [19]
- [1] Daykin, D.E. und C.P. Ng  
Algorithms for generalized stability numbers of tree graphs. *J. Austral. Math. Soc.* **6** (1966), 89 – 100. [162, 163]
- [1] Dean, N. und J. Zito  
Well-covered graphs and extendability. *Discrete Math.* **126** (1994), 67 – 80. [186]
- [1] Dempster, M.A.H.  
Two algorithms for the time-table problem. *Combinatorial Mathematics and its Applications* (Hrsg. D.J.A. Welsh), 63-85. Academic Press, London, New York, San Francisco (1971). [105]
- [1] De Werra, D.  
On some combinatorial problems arising in scheduling. *CORS J.* **8** (1970), 165 – 175. [105]
- [1] Dijkstra, E.W.  
A note on two problems in connexion with graphs. *Numer. Math.* **1** (1959), 269 – 271. [19]
- [1] Dilworth, R.P.  
A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann. Math.* **51** (1950), 161 – 166. [168]
- [1] Dirac, G.A.  
A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London Math. Soc.* **27** (1952), 85 – 92. [246]
- [2] Dirac, G.A.  
Some theorems on abstract graphs. *Proc. London Math. Soc.* (3) **2** (1952), 69 – 81. [9, 64]
- [3] Dirac, G.A.  
Minimally 2-connected graphs. *J. Reine Angew. Math.* **228** (1967), 204 – 216. [148]
- [1] Dirac, G.A. und S. Schuster  
A theorem of Kuratowski. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **57** (1954), 343 – 348. [223]
- [1] Dörfler, W. und J. Mühlbacher  
Ein verbesserter Matchingalgorithmus. *Computing* **13** (1974), 389 – 397. [101]
- [1] Douglas, R.J.  
Tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit, *Proc. London Math. Soc.* **21** (1970), 716 – 730. [80]

- [1] Doyle, J.K. und J.E. Graver  
Mean distance in a graph. *Discrete Math.* **17** (1977), 147 – 154. [18]
- [1] Duchet, P.  
Classical perfect graphs. *Topics on perfect graphs* (Hrsg. C. Berge und V. Chvátal). *Ann. Discrete Math.* **21**, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo (1984), 67 – 96. [166, 169]
- [1] Dunbar, J.E., T.W. Haynes und S.T. Hedetniemi  
Nordhaus-Gaddum bounds for domination sums in graphs with specified minimum degree. *Utilitas Math.* **67** (2005), 97 – 105. [180]
- [1] Dunbar, J.E., T.W. Haynes, U. Teschner und L. Volkmann  
Bondage, insensitivity, and reinforcement, in: Haynes, T.W., S.T. Hedetniemi und P.J. Slater [2], *Domination in Graphs: Advanced Topics*. Marcel Dekker, New York (1998), S. 471 – 489. [212]
- [1] Edmonds, J.  
Paths, trees, and flowers. *Canad. J. Math.* **17** (1965), 449 – 467. [107, 111]
- [1] Edmonds, J. und E.L. Johnson  
Matching, Euler tours and the Chinese postman. *Math. Programming* **5** (1973), 88 – 124. [59]
- [1] Edmonds, J. und R.M. Karp  
Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *J. Assoc. Comput. Mach.* **19** (1972), 248 – 264. [294, 295]
- [1] Egawa, Y. und M. Kano  
Sufficient conditions for graphs to have  $(g, f)$ -factors. *Discrete Math.* **151** (1996), 87 – 90. [138, 139]
- [1] Entringer, R.C.  
A short proof of Rubin's block theorem. *Ann. Discrete Math.* **27** (1985), 367 – 368. [145]
- [1] Entringer R.C., D.E. Jackson und D.A. Snyder  
Distance in graphs. *Czech. Math. J.* **26** (1976), 283 – 296. [17]
- [1] Entringer, R.C. und P.J. Slater  
On the maximum number of cycles in a graph. *Ars Combin.* **11** (1981), 289 – 294. [35]
- [1] Erdős, P.  
Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292 – 294. [305]
- [2] Erdős, P.  
On some extremal problems in graph theory. *Israel J. Math.* **3** (1965), 113 – 116. [191]
- [3] Erdős, P.  
On the graph theorem of Turán (Ungarisch). *Mat. Lapok* **21** (1970), 249 – 251. [170]
- [1] Erdős, P. und T. Gallai  
Graphs with prescribed degrees of vertices (Ungarisch). *Mat. Lapok* **11** (1960), 264 – 274. [128, 129]



- [2] Erdős, P. und T. Gallai  
Solution of a problem of Dirac. *Theory of Graphs and its Applications* (Hrsg. M. Fiedler), Academia, Prague (1964), 167 – 168. [228]
- [1] Erdős, P., A.L. Rubin und G. Taylor  
Choosability in graphs. *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Utilitas Mathematica, Winnipeg* (1980), 125 – 157. [145]
- [1] Erdős, P. und G. Szekeres  
A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mat.* **2** (1935), 463 – 470. [302]
- [1] Esfahanian, A.H.  
Lower-bounds on the connectivities of a graph. *J. Graph Theory* **9** (1985), 503 – 511. [269]
- [1] Euler, L.  
Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Petropolitanae* **8** (1736), 128 – 140. = *Opera omnia, Ser. I, Nr. 7*, 1 – 10. Deutsche Übersetzung: Speiser, *Klassische Stücke der Mathematik*, Zürich (1927), 127 – 138. [viii, xiv, 4, 50]
- [2] Euler, L.  
Elementa doctrinae solidarum. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **4** (1752 – 1753), 109 – 140. [viii, 207]
- [3] Euler, L.  
Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **4** (1752 – 1753), 140 – 160. [viii, 207]
- [1] Fàbrega, J. und M.A. Fiol  
Maximally connected digraphs. *J. Graph Theory* **13** (1989), 657 – 668. [269]
- [2] Fàbrega, J. und M.A. Fiol  
Bipartite graphs and digraphs with maximum connectivity. *Discrete Appl. Math.* **69**, 271 – 279. [269]
- [3] Fàbrega, J. und M.A. Fiol  
Further topics in connectivity, J.L. Gross, J. Yellen (Eds.), *Handbook of Graph Theory*, CRC Press, London - New York (2004), 300 – 329. [269]
- [1] Fan, G.H.  
New sufficient conditions for cycles in graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **37** (1984), 222 – 227. [65]
- [1] Fan, G.H., G. Liu und J. Liu  
Minimal regular 2-graphs and applications. *Sci. China Ser. A* **49** (2006), 158 – 172. [136]
- [1] Farber, M.  
Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs. *Discrete Appl. Math.* **7** (1984), 115 – 130. [189]
- [1] Farrell, E.J.  
On chromatic coefficients. *Discrete Math.* **29** (1980), 257 – 264. [238]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Faudree, R.J., R.J. Gould, M.S. Jacobson und L.M. Lesniak  
Neighborhood unions and a generalization of Dirac's theorem. *Discrete Math.* **105** (1992), 61 – 71. [73]
- [1] Faudree, R.J., O. Favaron, E. Flandrin und H. Li  
The complete closure of a graph. *J. Graph Theory* **17** (1993), 481 – 494. [68]
- [1] Faudree, R.J., E. Flandrin und Z. Ryjáček  
Claw-free graphs – a survey. *Discrete Math.* **164** (1997), 87 – 147. [151]
- [1] Favaron, O.  
On a conjecture of Fink and Jacobson concerning  $k$ -domination and  $k$ -dependence. *J. Combin. Theory Ser. B* **39** (1985), 101 – 102. [199]
- [2] Favaron, O.  
Stability, domination and irredundance in a graph. *J. Graph Theory* **10** (1986), 429 – 438. [187]
- [3] Favaron, O.  
 $k$ -domination and  $k$ -dependence in graphs. *Ars Combin.* **25 C** (1988), 159 – 167. [199]
- [1] Favaron, O., A. Hansberg und L. Volkmann  
On  $k$ -domination and minimum degree in graphs. *J. Graph Theory* **57** (2008), 33 – 40. [191, 193, 194]
- [1] Favaron, O., M. Henning, J. Puech und D. Rautenbach  
On domination and annihilation in graphs with claw-free blocks. *Discrete Math.* **231** (2001), 143 – 151. [203]
- [1] Favaron, O., V. Kabanov und J. Puech  
The ratio of three domination parameters in some classes of claw-free graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **31** (1999), 151 – 159. [203]
- [1] Fiedler, M. und J. Sedlacek  
O  $W$ -basich orientovanich grafu. (Über Wurzelbasen von gerichteten Graphen.) *Časopis Pěst. Mat.* **83** (1958), 214 – 225. [40]
- [1] Finbow, A., B. Hartnell und R. Nowakowski  
Well-dominated graphs: a collection of well-covered ones. *Ars Combin.* **25 A** (1988), 5 – 10. [187]
- [1] Fink, J.F. und M.S. Jacobson  
 $n$ -domination in graphs. *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science* (Hrsg. Y. Alavi, G. Chartrand, L. Lesniak, D.R. Lick, C.E. Wall). *Proceedings of the 5th international conference, Kalamazoo (1984)*, Wiley and Sons Inc., New York (1985), 283 – 300. [190, 191, 199]
- [2] Fink, J.F. und M.S. Jacobson  
On  $n$ -domination,  $n$ -dependence and forbidden subgraphs. *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science* (Hrsg. Y. Alavi, G. Chartrand, L. Lesniak, D.R. Lick, C.E. Wall). *Proceedings of the 5th international conference, Kalamazoo (1984)*, Wiley and Sons Inc., New York (1985), 301 – 311. [199]

- [1] Fink, J.F., M.S. Jacobson, L.F. Kinch und J. Roberts  
On graphs having domination number half their order. *Period. Math. Hungar.* **16** (1985), 287 – 293. [182]
- [2] Fink, J.F., M.S. Jacobson, L.F. Kinch und J. Roberts  
The bondage number of a graph. *Discrete Math.* **86** (1990), 47 – 57. [211]
- [1] Fiol, M.A.  
On super-edge-connected digraphs and bipartite digraphs. *J. Graph Theory* **16** (1992), 545 – 555. [269]
- [2] Fiol, M.A.  
The connectivity of large digraphs and graphs. *J. Graph Theory* **17** (1993), 31 – 45. [269]
- [1] Fiorini, S.  
The Chromatic Index of Simple Graphs. Doctoral Thesis, The Open University, England (1974). [250]
- [1] Fiorini, S. und R.J. Wilson  
Edge-colourings of graphs. (Research Notes in Mathematics 16), Pitman, London (1977). [248, 256]
- [1] Fischermann, M.  
Domination Parameters and their Unique Realizations. Doktorarbeit, RWTH Aachen (2002), 120 S. [187]
- [1] M. Fischermann, Y. Guo, A. Hellwig, A. Hoffmann, D. Meierling, B. Randerath, D. Rautenbach, M. Tewes und S. Winzen  
Erster Aachener Tag der Graphentheorie, on the occasion of the 60th birthday of Professor Dr. Lutz Volkmann, RWTH Aachen University (2004), 145 pp.
- [1] Fischermann, M., D. Rautenbach und L. Volkmann  
Remarks on the bondage number of planar graphs. *Discrete Math.* **260** (2003), 57 – 67. [213]
- [1] Flach, P. und L. Volkmann  
Abschätzungen gesättigter Matchings nach unten. *An. Univ. București Mat.* **36** (1987), 25 – 30. [98]
- [2] Flach, P. und L. Volkmann  
Estimations for the domination number of a graph. *Discrete Math.* **80** (1990), 145 – 151. [176, 177]
- [1] Fleischner, H.  
The square of every two-connected graph is hamiltonian. *J. Combin. Theory Ser. B* **16** (1974), 29 – 34. [153]
- [2] Fleischner, H.  
Eulerian Graphs. Selected Topics in Graph Theory 2 (Hrsg. L.W. Beineke und R.J. Wilson). Academic Press, London, New York, San Francisco (1983), 17 – 53. [56]
- [3] Fleischner, H.  
Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol 1. *Ann. Discrete Math.* **45**, North-Holland, Amsterdam (1990). [56]

- [4] Fleischner, H.  
Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol 2. Ann. Discrete Math. **50**, North-Holland, Amsterdam (1991). [56]
- [1] Folkman, J. und D.R. Fulkerson  
Edge colorings in bipartite graphs. Combinatorial Mathematics and its Applications (Hrsg. Bose und Dowling). Univ. of N. C. Press, Chapel Hill (1969), 561 – 577. [100]
- [1] Ford, L.R. und D.R. Fulkerson  
Maximal flow through a network. Canad. J. Math. **8** (1956), 399 – 404. [289, 293]
- [2] Ford, L.R. und D.R. Fulkerson  
A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem. Canad. J. Math. **9** (1957), 210 – 218. [289, 294]
- [3] Ford, L.R. und D.R. Fulkerson  
Flows in Networks. Princeton University Press, Princeton (1962). [289, 295]
- [1] Frank, A.  
Some polynomial algorithm for certain graphs and hypergraphs. Proc. 5th British Comb. Conf., Aberdeen (1975), 211 – 226. [166, 167]
- [1] Fricke, G., O.R. Oellermann und H.C. Swart  
The edge-connectivity, average edge-connectivity and degree condyions. Unpublished manuscript (2000). [269, 284]
- [1] Fujisawa, J., A. Hansberg, T. Kubo, A. Saito, M. Sugita und L. Volkmann  
Independence and 2-domination in bipartite graphs. Australas. J. Combin. **40** (2008), 265 – 268. [194]
- [1] Fulman, J.  
A generalization of Vizing's theorem on domination. Discrete Math. **126** (1994), 403 – 406. [180]
- [1] Gale, D.  
A theorem on flows in networks. Pacific J. Math. **7** (1957), 166 - 177. [300]
- [1] Gallai, T.  
Über extreme Punkt- und Kantenmengen. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **2** (1959), 133 – 138. [157, 158]
- [2] Gallai, T.  
On directed paths and circuits. Theory of Graphs (Hrsg. P. Erdős und G. Katona). Academic Press, London, New York, San Francisco (1968), 115 – 118. [227]
- [1] Gasparian, G.S.  
Minimal imperfect graphs: a simple approach. Combinatorica **16** (1996), 209 – 212. [164]
- [1] Geller, D. und F. Harary  
Connectivity in digraphs. Recent Trends in Graph Theory. Proc. 1st New York City Graph Theory Conf. 1970. Lecture Notes in Mathematics **186** (1971), 105 – 115. [270, 275]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Geller, D. und H. Kronk  
Further results on the achromatic number. *Fund. Math.* **85** (1974), 285 – 290. [232, 233]
- [1] Ghouila-Houri, A.  
Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien. *C. R. Acad. Sci. Paris* **251** (1960), 495 – 497. [66]
- [1] Goddard, W.D., M.A. Henning und H.C. Swart  
Some Nordhaus-Gaddum-type results. *J. Graph Theory* **16** (1992), 221 – 231. [187]
- [1] Goddard, W.D., G. Kubicki, O.R. Oellermann und S. Tian  
On multipartite tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B* **52** (1991), 284 – 300. [84]
- [1] Goddard, W.D. und O.R. Oellermann  
On the cycle structure of multipartite tournaments. *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, Nr. 1 (Hrsg. Y. Alavi, G. Chartrand, O.R. Oellermann und A.J. Schwenk). John Wiley and Sons, New York (1991), 525 - 533. [90]
- [1] Goldberg, M.K.  
Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3. *J. Combin. Theory Ser. B* **31** (1981), 282 – 291. [252]
- [2] Goldberg, M.K.  
Edge-coloring of multigraphs: recoloring technique. *J. Graph Theory* **8** (1984), 123 – 137. [241, 243]
- [1] Goldsmith, D.L.  
On the  $n$ -th order of edge-connectivity of a graph. *Congr. Numer.* **32** (1981), 375 – 382. [265]
- [1] Goldsmith, D.L. und R.C. Entringer  
A sufficient condition for equality of edge-connectivity and minimum degree of a graph. *J. Graph Theory* **3** (1979), 251 – 255. [269]
- [1] Goldsmith, D.L. und A.T. White  
On graphs with equal edge-connectivity and minimum degree. *Discrete Math.* **23** (1978), 31 – 36. [269]
- [1] Golovko, L.D. und N.P. Khomenko  
Identifying certain types of parts of a graph and computing their number. *Ukrainian Math. J.* **24** (1972), 313 – 321. [33]
- [1] Golumbic, M.C.  
*Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, London, New York, San Francisco (1980). [163, 169]
- [1] Goodman, S.E. und S.T. Hedetniemi  
Eulerian walks in graphs. *SIAM J. Comput.* **2** (1973), 16 – 27. [58]
- [1] Graver, J.E. und J. Yackel  
Some graph-theoretic results associated with Ramsey's theorem. *J. Combin. Theory* **4** (1968), 125 – 175. [304]

- [1] Greenwood, R.E. und A.M. Gleason  
Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J. Math.* **7** (1955), 1 – 7. [304, 307]
- [1] Grinstead, C.M. und S.M. Roberts  
On the Ramsey numbers  $R(3, 8)$  and  $R(3, 9)$ . *J. Combin. Theory Ser. B* **33** (1982), 27 – 51. [304]
- [1] Guo, Y.  
Locally Semicomplete Digraphs. *Aachener Beiträge zur Mathematik* **13** (Eds. H.H. Bock, H.Th. Jongen and W. Plesken), Doktorarbeit, RWTH Aachen, Augustinus Buchhandlung, Aachen (1995), 92 pp. [321, 322, 323, 327, 328]
- [2] Guo, Y.  
Semicomplete Multipartite Digraphs: A Generalization of Tournaments. *Habilitationsschrift*, RWTH Aachen (1998), 102 pp. [94]
- [1] Guo, Y., A. Pinkernell und L. Volkmann  
On cycles through a given vertex in multipartite tournaments. *Discrete Math.* **164** (1997), 165 – 170. [84, 85, 86, 87]
- [1] Guo, Y. und L. Volkmann  
Connectivity properties of locally semicomplete digraphs. *J. Graph Theory* **18** (1994), 269 – 280. [318, 326]
- [2] Guo, Y. und L. Volkmann  
Cycles in multipartite tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B* **62** (1994), 363 – 366. [88]
- [3] Guo, Y. und L. Volkmann  
On complementary cycles in locally semicomplete digraphs. *Discrete Math.* **135** (1994), 121 – 127. [327]
- [4] Guo, Y. und L. Volkmann  
Locally semicomplete digraphs that are complementary  $m$ -pancyclic. *J. Graph Theory.* **21** (1996), 121 – 136. [327]
- [5] Guo, Y. und L. Volkmann  
Tree-Ramsey numbers. *Australas. J. Combin.* **11** (1995), 169 – 175. [312, 313]
- [6] Guo, Y. und L. Volkmann  
A complete solution of a problem of Bondy concerning multipartite tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B.* **66** (1996), 140 – 145. [93]
- [1] Gutin, G.  
On cycles in complete  $n$ -partite digraphs (Russisch). *Gomel Politechnic Inst. Depon. in VINITI*, Nr. 2473 (1982). [93]
- [2] Gutin, G.  
On cycles in strong complete  $n$ -partite tournaments (Russisch). *Vest. Acad. Navuk. BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk.* Nr. **5** (1984), 105 – 106. [87]
- [3] Gutin, G.  
A characterization of complete  $n$ -partite digraphs that have a Hamiltonian path (Russisch). *Kibernetika* No. **1** (1988), 107 – 108. [92]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [4] Gutin, G.  
On cycles in multipartite tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B* **58** (1993), 319 – 321. [88]
- [5] Gutin, G.  
Cycles and paths in semicomplete multipartite digraphs, theorems and algorithms: a survey. *J. Graph Theory* **19** (1995), 481 – 505. [94]
- [1] Hajnál, A. und J. Surányi  
Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* **1** (1958), 113 – 121. [166, 167]
- [1] Hajós, G.  
Über eine Konstruktion nicht  $n$ -färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ., Halle Wittenberg, Math. Natur. Reihe* **10** (1961), 116 – 117. [251]
- [1] Hakimi, S.L.  
On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph I. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **10** (1962), 496 – 506. [13, 14]
- [1] Halin, R.  
A theorem on  $n$ -connected graphs. *J. Combin. Theory* **7** (1969), 150 – 154. [148]
- [1] Hall, P.  
On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.* **10** (1935), 26 – 30. [xvi, 101, 280]
- [1] Hansberg, A.  
Multiple domination in graphs. *Doktorarbeit, RWTH Aachen* (2009), 120 S. [199]
- [1] Hansberg, A., D. Meierling und L. Volkmann  
Independence and  $k$ -domination in graphs. *Int. J. Comput. Math.* **88** (2011), 905 – 915. [195]
- [1] Hansberg, A. und L. Volkmann  
Characterization of block graphs with equal 2-domination number and domination number plus one. *Discuss. Math. Graph Theory* **27** (2007), 159 – 167. [191]
- [2] Hansberg, A. und L. Volkmann  
On graphs with equal domination and 2-domination numbers. *Discrete Math.* **308** (2008), 2277 – 2281. [190]
- [3] Hansberg, A. und L. Volkmann  
Lower bounds on the  $p$ -domination number in terms of cycles and matching number. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **68** (2009), 245 – 255. [199]
- [4] Hansberg, A. und L. Volkmann  
Upper bounds on the  $k$ -domination number and the  $k$ -Roman domination number. *Discrete Appl. Math.* **157** (2009), 1634 – 1639. [196, 198]
- [1] Hansen, P.  
Upper bounds for the stability number of a graph. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **24** (1979), 1195 – 1199. [229]
- [1] Harary, F.  
A characterization of block-graphs. *Canad. Math. Bull.* **6** (1963), 1 – 6. [146]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.



- [2] Harary, F.  
Graph Theory. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), Menlo Park (California), London (1969). [129, 149, 150, 151]
- [3] Harary, F.  
Recent results on generalized Ramsey theory for graphs. Graph Theory and Applications (Hrsg. Y. Alavi et al.). Lecture Notes in Mathematics **303**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972), 125 – 138. [312]
- [1] Harary, F. und T.W. Haynes  
Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs. Discrete Math. **155** (1996), 99 – 105. [187]
- [1] Harary, F., S.T. Hedetniemi und G. Prins  
An interpolation theorem for graphical homomorphisms. Portugal. Math. **26** (1967), 453 – 462. [230]
- [1] Harary, F. und M. Livingston  
Characterization of trees with equal domination and independent domination number. Congr. Numer. **55** (1986), 121 – 150. [187]
- [1] Harary, F. und B. Manvel  
On the number of cycles in a graph. Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. **21** (1971), 55 – 63. [32]
- [1] Harary, F. und L. Moser  
The theory of round robin tournaments. Amer. Math. Monthly **73** (1966), 231 – 246. [77, 82]
- [1] Harary, F. und R.Z. Norman  
The dissimilarity characteristic of Husimi trees. Ann. of Math. (2) **58** (1953), 134 – 141. [143]
- [1] Harary, F. und M.D. Plummer  
On the core of a graph. Proc. London Math. Soc. (3) **17** (1967), 305 – 314. [161]
- [1] Harary, F. und G. Prins  
The block-cutpoint-tree of a graph. Publ. Math. Debrecen **13** (1966), 103 – 107. [145]
- [1] Harary, F. und R.W. Robinson  
The diameter of a graph and its complement. Amer. Math. Monthly **92** (1985), 211 – 212. [16]
- [1] Harborth, H. und A. Kemnitz  
Eine Anzahl für Fußballtabellen. Math. Semesterber. **29** (1982), 258 – 263. [83]
- [1] Harborth, H. und I. Mengersen  
The Ramsey number of  $K_{3,3}$ . Graph Theory, Combinatorics, and Applications 2 (Hrsg. Y. Alavi, G. Chartrand, O.R. Oellermann und J. Schwenk). John Wiley and Sons (1991), 639 – 644. [311]
- [1] Hartnell, B.L. und D.F. Rall  
Bounds on the bondage number of a graph. Discrete Math. **128** (1994), 173 – 177. [211]
- [1] Havel, V.  
Eine Bemerkung über die Existenz der endlichen Graphen, (Tschechisch). Časopis Pěst. Mat. **80** (1955), 477 – 480. [13]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Havet, F.  
Pancyclic arcs and connectivity in tournaments. *J. Graph Theory* **47** (2004), 87 – 110. [90]
- [1] Haynes, T.W., S.T. Hedetniemi und P.J. Slater  
Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker, New York (1998). [203]
- [2] Haynes, T.W., S.T. Hedetniemi und P.J. Slater  
Domination in Graphs: Advanced Topics. Marcel Dekker, New York (1998). [203]
- [1] Heawood, P.J.  
Map-colour theorem. *Quart. J. Pure Appl. Math.* **24** (1890), 332 – 338. [214, 217]
- [1] Hedetniemi, S.T., R. Laskar und J. Pfaff  
A linear algorithm for finding a minimum dominating set in a cactus. *Discrete Appl. Math.* **13** (1986), 287 – 292. [189]
- [1] Heesch, H.  
Untersuchungen zum Vierfarbenproblem. Bibliographisches Institut, Mannheim (1969). [217]
- [1] Heinrich, K., P. Hell, D.G. Kirkpatrick und G. Liu  
A simple existence criterion for  $(g < f)$ -factors. *Discrete Math.* **85** (1990), 313 – 317. [130]
- [1] Hellwig, A.  
Maximally Connected Graphs and Digraphs. Doktorarbeit, RWTH Aachen (2005), 105 S. [269]
- [1] Hellwig, A. und L. Volkmann  
Maximally edge-connected digraphs. *Australas. J. Combin.* **27** (2003), 23 – 32. [269, 273]
- [2] Hellwig, A. und L. Volkmann  
Maximally local-edge-connected graphs and digraphs. *Ars Combin.* **72** (2004), 295 – 306. [269, 283]
- [3] Hellwig, A. und L. Volkmann  
Sufficient conditions for graphs to be  $\lambda'$ -optimal, super-edge-connected and maximally edge-connected. *J. Graph Theory* **48** (2005), 228 – 246. [269]
- [4] Hellwig, A. und L. Volkmann  
Neighborhood conditions for graphs and digraphs to be maximally edge-connected. *Australas. J. Combin.* **33** (2005), 265 – 277. [269]
- [5] Hellwig, A. und L. Volkmann  
On connectivity in graphs with given clique number. *J. Graph Theory* **52** (2006), 7 – 14. [286]
- [6] Hellwig, A. und L. Volkmann  
Some upper bounds for the domination number. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **57** (2006), 187 – 209. [180]
- [7] Hellwig, A. und L. Volkmann  
Lower bounds on the vertex-connectivity of digraphs and graphs, *Inform. Process. Lett.* **99** (2006), 41 – 46. [274]
- [8] Hellwig, A. und L. Volkmann  
The connectivity of a graph and its complement. *Discrete Appl. Math.* **156** (2008), 3325 – 3328. [266]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [9] Hellwig, A. und L. Volkmann  
Maximally edge-connected and vertex-connected graphs and digraphs: A survey. *Discrete Math.* **308** (2008), 3265 – 3296. [275]
- [1] Hemminger R.L. und L.W. Beineke  
Line graphs and line digraphs. *Selected Topics in Graph Theory* (Hrsg. L.W. Beineke und R.J. Wilson). Academic Press, London, New York, San Francisco (1978), 271 – 305. [149]
- [1] Hendry, G.H.  
Extending cycles in graphs. *Discrete Math.* **85** (1990), 59 – 72. [69]
- [1] Hierholzer, C.  
Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. *Math. Ann.* **6** (1873), 30 – 32. [50, 51]
- [1] Hilton, A.J.W. und H.R. Hind  
The total chromatic number of graphs having large maximum degree. *Discrete Math.* **117** (1993), 127 – 140. [259, 260]
- [1] Hind, H.R.  
Recent developments in total colouring. *Discrete Math.* **125** (1994), 211 – 218. [260]
- [1] Hoffmann, A.  
Regular factors in regular multipartite graphs. *Discrete Math.* **258** (2002), 43 – 62. [136]
- [2] Hoffmann, A.  
Regular Factors in Graphs. Doktorarbeit, RWTH Aachen (2002), 70 S. [140]
- [1] Hoffmann, A. und L. Volkmann  
On regular factors in regular graphs with small radius. *Electron. J. Combin.* **11** no. 7 (2004), 7 pp. [134]
- [1] Holtkamp, A. und L. Volkmann  
On local connectivity of graphs with given clique number. *J. Graph Theory* **63** (2010), 192 – 197. [284]
- [1] Hopkins, G. und W. Staton  
Graphs with unique maximum independent sets. *Discrete Math.* **57** (1985), 245 – 251. [161]
- [1] Huang, J. und J.M. Xu  
The bondage numbers of graphs with small crossing numbers. *Discrete Math.* **307** (2007), 1881 – 1897. [213]
- [1] Hutschenreuther, H.  
Einfacher Beweis des Matrix-Gerüst-Satzes der Netzwerktheorie. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau* **13** (1967), 403 – 404. [37]
- [1] Itai, A. und M. Rodeh  
Covering a graph by circuits. *Automata, Languages and Programming* (Fifth Internat. Colloq., Udine, 1978), pp. 289 – 299, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **62** Springer, Berlin-New York (1978). [36]

- [1] Jackson, B.  
Long paths and cycles in oriented graphs. *J. Graph Theory* **5** (1981), 145 – 157. [86]
- [2] Jackson, B.  
Neighborhood unions and hamilton cycles. *J. Graph Theory* **15** (1991), 443 – 451. [73]
- [1] Jaeger, F. und C. Payan  
Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple. *C. R. Acad. Sci. Paris* **274** (1972), 728 – 730. [178, 179]
- [1] Jakobsen, I.T.  
Some remarks on the chromatic index of a graph. *Arch. Math. (Basel)* **24** (1973), 440 – 448. [251]
- [2] Jakobsen, I.T.  
On critical graphs with chromatic index 4. *Discrete Math.* **9** (1974), 265 – 276. [249, 252]
- [1] Joentgen, A. und L. Volkmann  
Factors of locally almost regular graphs. *Bull. London Math. Soc.* **23** (1991), 121 – 122. [137, 138, 139]
- [1] Jolivet, J.L.  
Sur la connexité des graphes orientés. *C.R. Acad. Sci. Paris* **274 A** (1972), 148 – 150. [274]
- [1] Jordan, C.  
Sur les assemblages de lignes. *J. Reine Angew. Math.* **70** (1869), 185 – 190. [144]
- [1] Joseph, J.P. und S. Arumugam  
Domination in graphs. *Internat. J. Management Systems* **11** (1995), 177 – 182. [180]
- [1] Jung, H.A.  
Zu einem Isomorphiesatz von H. Whitney für Graphen. *Math. Ann.* **164** (1966), 270 – 271. [149]
- [2] Jung, H.A.  
On maximal circuits in finite graphs. *Ann. Discrete Math.* **3** (1978), 129 – 144. [66]
- [1] Jungnickel, D.  
Graphen, Netzwerke und Algorithmen. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich (1987). [59, 112]
- [1] Kane, V.G. und S.P. Mohanty  
A lower bound on the number of the vertices of a graph. *Proc. Amer. Math. Soc.* **72** (1978), 211 – 212. [281]
- [1] Kang L. und J. Yuan  
Bondage number of planar graphs. *Discrete Math.* **222** (2000), 191 – 198. [212]
- [1] Kano, M.  
Factors of regular graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **41** (1986), 27 – 36. [140]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Kano, M. und A. Saito  
 $[a, b]$ -factors of graphs. *Discrete Math.* **47** (1983), 113 – 116. [139, 140]
- [1] Kano, M. und Q. Yu  
 Pan-factorial property in regular graphs. *Electron. J. Combin.* **12** (2005) N23, 6 pp. [133]
- [1] Kapoor, S.F., A.D. Polimeni und C.E. Wall  
 Degree sets for graphs. *Fund. Math.* **95** (1977), 189 – 194. [14]
- [1] Katerinis, P.  
 Some conditions for the existence of  $f$ -factors. *J. Graph Theory* **9** (1985), 513 – 521. [127, 133]
- [1] Kemnitz, A. und S. Dolff  
 Score sequences of multitournaments. *Congr. Numer.* **127** (1997), 85 – 95. [83]
- [1] Kempe, A.B.  
 On the geographical problem of the four colours. *Amer. J. Math.* **2** (1879), 193 – 200. [217]
- [1] Kirchhoff, G.R.  
 Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. *Annalen der Physik und Chemie* **72** (1847), 497 – 508 = *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig (1882), 22 – 33. [viii, 33, 37]
- [1] Kirkman, T.P.  
 On a problem in combinations. *Cambridge Dublin Math. J.* **2** (1847), 191 – 204. [130]
- [1] Klinkenberg, S. und L. Volkmann  
 On the order of almost regular graphs without a matching of given size. *Australas. J. Combin.* **34** (2006), 187 – 194. [120]
- [2] Klinkenberg, S. und L. Volkmann  
 On the order of close to regular graphs without a matching of given size. *Ars Combin.* **85** (2007), 99 – 106. [120]
- [3] Klinkenberg, S. und L. Volkmann  
 On the order of certain close to regular graphs without a matching of given size. *Czechoslovak Math. J.* **57** (2007), 907 – 918. [120]
- [1] Klotz, W.  
 A constructive proof of Kuratowski's theorem. *Ars Combin.* **28** (1989), 51 – 54. [223]
- [1] König, D.  
 Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math. Ann.* **77** (1916), 453 – 465. [69, 103, 115]
- [2] König, D.  
 Graphen und Matrizen (Ungarisch mit deutschem Auszug). *Mat. Fiz. Lapok* **38** (1931), 116 – 119. [xvi, 101, 158, 280]
- [3] König, D.  
 Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig, (1936). Reprint: Teubner-Archiv zur Mathematik, Band 6, Leipzig (1986). [viii, 29, 34, 135, 142, 148]

- [1] Kostochka, A.V. und B.Y. Stodolsky  
On domination in connected cubic graphs. *Discrete math.* **304** (2005), 45 – 50. [175]
- [1] Krausz, J.  
Démonstration nouvelle d’une théorème de Whitney sur les réseaux (Ungarisch). *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943), 75 – 85. [149, 150]
- [1] Kruskal, J.B.  
On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 48 – 50. [41]
- [1] Kuan, M.-K.  
Graphic programming using odd or even point. *Chinese Math.* **1** (1962), 273-277. [57]
- [1] Kuhn, H.W.  
The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Res. Logist. Quart.* **2** (1955), 83 – 97. [107]
- [1] Kuratowski, C.  
Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.* **15** (1930), 271 – 283. [220, 221]
- [1] Landau, H.G.  
On dominance relations and the structure of animals societies. III. The condition for a score structure. *Bull. Math. Biophys.* **15** (1953), 143 – 148. [81, 82]
- [1] Laskar, R. und H.B. Walikar  
On domination related concepts in graph theory. *Combinatorics and Graph Theory* (Hrsg. S.B. Rao). *Lecture Notes in Mathematics* **885**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1981), 308 – 320. [181, 187]
- [1] Las Vergnas, M.  
A note on matchings in graphs. *Cahiers Centre Études Rech. Opér.* **17** (1975), 257 – 260. [98]
- [2] Las Vergnas, M.  
Sur le nombre de circuits dans un tournoi fortement connexe. *Cahiers Centre Études Rech. Opér.* **17** (1975), 261 – 265. [78, 79]
- [1] Lawrence, S.L.  
Cycle-star Ramsey numbers. *Notices Amer. Math. Soc.* **20** (1973), Abstract A-562. [310]
- [1] Lehot, P.G.H.  
An optimal algorithm to detect a line graph and output its rout graph. *J. Assoc. Comput. Mach.* **21** (1974), 569 – 575. [152]
- [1] Lesniak, L.  
Results on the edge-connectivity of graphs. *Discrete Math.* **8** (1974), 351 – 354. [265]
- [1] Li, H., S. Li, Y. Guo und Q. Guo  
Cycles through arcs in multipartite tournaments and a conjecture of Volkmann. *Appl. Math. Letters* **24** (2011), 412 – 415. [90]

- [1] Li, H. und Y. Lin  
On the characterization of path graphs. *J. Graph Theory* **17** (1993), 463 – 466. [152]
- [1] Lick, D.  
Critically and minimally  $n$ -connected graphs. In “The many facets of graph theory”. *Lecture Notes* **110**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1969), 199 – 205. [147]
- [1] Listing, J.B.  
Vorstudien zur Topologie. *Göttinger Studien* (1847), auch separat erschienen: Göttingen (1848). [51]
- [2] Listing, J.B.  
Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes von den Polyedern. *Göttinger Abhandlungen* **10** (1862). [29]
- [1] Little, C.H.C.  
On the number of parity sets in a graph. *Canad. J. Math.* **28** (1976), 1167 – 1171. [36]
- [1] Little, C.H.C., D.D. Grant und D.A. Holton  
On defect- $d$  matchings in graphs. *Discrete Math.* **13** (1975), 41 – 54. [117]
- [1] Liu, G. und Q.L. Yu  
Generalizations of matching extension in graphs. *Discrete Math.* **231** (2001), 311 – 320. [117]
- [1] Lovász, L.  
Subgraphs with prescribed valencies. *J. Combin. Theory* **8** (1970), 391 – 416. [129]
- [2] Lovász, L.  
Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.* **2** (1972), 253 – 267. [164, 165]
- [3] Lovász, L.  
Three short proofs in graph theory. *J. Combin. Theory Ser. B* **19** (1975), 269 – 271. [120, 228]
- [4] Lovász, L.  
On the ratio of optimal and integral fractional covers. *Discrete Math.* **13** (1975), 383 – 390. [198]
- [5] Lovász, L.  
*Combinatorial Problems and Exercises*. Akadémiai Kiadó, Budapest (1979). [18]
- [5] Lovász, L.  
Normal hypergraphs and the Weak Perfect Graph Conjecture. *Topics on perfect graphs* (Eds. C. Berge and V. Chvátal). *Ann. Discrete Math.* **21**, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo (1984), 29 – 42. [164]
- [1] Lovász, L. und M.D. Plummer  
*Matching Theory*. *Ann. Discrete Math.* **29**, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo (1986). [59, 111, 112, 140, 295]
- [1] Lucas, E.  
*Récréations mathématiques I – IV*. Paris (1882 – 1894). [51, 57]



- [1] Mader, W.  
Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen. Arch. Math. (Basel) **22** (1971), 333 – 336. [148]
- [2] Mader, W.  
Minimale  $n$ -fach kantenzusammenhängende Graphen. Math. Ann. **191** (1971), 21 – 28. [148]
- [3] Mader, W.  
1-Faktoren von Graphen. Math. Ann. **201** (1973), 269 – 282. [120]
- [4] Mader, W.  
A reduction method for edge-connectivity in graphs. Ann. Discrete Math. **3** (1978), 145 – 164. [276]
- [5] Mader, W.  
Connectivity and edge-connectivity in finite graphs. Surveys in Combinatorics (Hrsg. B. Bollobás). Cambridge University Press, Cambridge (1979), 66 – 95. [280]
- [6] Mader, W.  
Kritisch  $n$ -fach kantenzusammenhängende Graphen. J. Combin. Theory Ser. B **40** (1986), 152 – 158. [280]
- [7] Mader, W.  
Über  $(k + 1)$ -kritisch  $(2k + 1)$ -fach zusammenhängende Graphen. J. Combin. Theory Ser. B **45** (1988), 45 – 57. [280]
- [8] Mader, W.  
Private communication (1988). [120]
- [9] Mader, W.  
On critically connected digraphs. J. Graph Theory **13** (1989), 513 – 522. [280]
- [1] Mateti P. und N. Deo  
On algorithms for enumerating all circuits of a graph. SIAM J. Comput. **5** (1976), 90 – 99. [35]
- [1] Maurer, S.B.  
Cycle-complete graphs. Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference, Aberdeen (1975), Congr. Numer. **15** (1976), 447 – 453. [35]
- [1] Mendelsohn N.S. und A.L. Dulmage  
Some generalizations of the problem of distinct representatives. Canad. J. Math. **10** (1958), 230 – 241. [104]
- [1] McCarthy, P.J.  
Matchings in graphs. Bull. Austral. Math. Soc. **9** (1973), 141 – 143. [119]
- [1] McCuaig, W.  
A simple proof of Menger's theorem. J. Graph Theory **8** (1984), 427 – 429. [277]
- [1] McCuaig, W. und B. Shepherd  
Domination in graphs with minimum degree two. J. Graph Theory **13** (1989), 749 – 762. [175]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] McKay, B.D. und S.P. Radziszowski  
 $R(4, 5) = 25$ . *J. Graph Theory* **19** (1995), 309 – 322. [304]
- [1] McKay, B.D. und K.-M. Zhang  
 The value of the Ramsey number  $R(3, 8)$ . *J. Graph Theory* **16** (1992), 99 – 105. [304]
- [1] McKee, T.A.  
 Recharacterizing Eulerian: intimations of new duality. *Discrete Math.* **51** (1984), 237 – 242. [52]
- [1] McKee, T.A. und L. Volkmann  
 Parity and disparity subgraphs, *Discrete Math.* **309** (2009), 2608 – 2612. [35, 36]
- [1] Meierling, D.  
 Local Tournaments and In-Tournaments. Doktorarbeit, RWTH Aachen (2007), 160 S. [327, 328]
- [1] Meierling, D. und L. Volkmann  
 All 2-connected in-tournaments that are cycle complementary, *Discrete Math.* **308** (2008), 2115 – 2133. [327]
- [2] Meierling, D. und L. Volkmann  
 A remark on degree sequences of multigraphs, *Math. Methods Oper. Res.* **69** (2009), 369 – 374. [13]
- [1] Menger, K.  
 Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.* **10** (1927), 96 – 115. [277]
- [1] Meredith, G.H.J.  
 Coefficients of chromatic polynomials. *J. Combin. Theory Ser. B* **13** (1972), 14 – 17. [234]
- [1] Meyers, B.R. und R. Liu  
 A lower bound on the chromatic number of a graph. *Networks* **1** (1971/72), 273 – 277. [229]
- [1] Moon, J.W.  
 Solution to problem 463. *Math. Mag.* **35** (1962), 189. [83]
- [2] Moon, J.W.  
 On subtournaments of a tournament. *Canad. Math. Bull.* **9** (1966), 297 – 301. [77, 78]
- [3] Moon, J.W.  
 Topics on Tournaments. Holt, Rinehart and Winston, New York (1968). [84]
- [4] Moon, J.W.  
 On  $k$ -cyclic and pancyclic arcs in strong tournaments. *J. Combin. Inform. System Sci.* **19** (1994), 207 – 214. [90]
- [1] Munkres, J.  
 Algorithms for the assignment and transportation problems. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **5** (1957), 32 – 38. [107]
- [1] Naserasr, R. und R. Škrekovski  
 The Petersen graph is not 3-edge-colorable - a new proof. *Discrete Math.* **268** (2003), 325-326. [245]

- [1] Nash-Williams, C.St.J.A.  
On orientations, connectivity and odd-vertex-pairings in finite graphs. *Canad. J. Math.* **12** (1960), 555 – 567. [276]
- [1] Niessen, T.  
Mündliche Mitteilung (1988). [120]
- [2] Niessen, T.  
Hinreichende Bedingungen für die Existenz regulärer Faktoren in Graphen. Doktorarbeit, RWTH Aachen (1994), 84 S. [140]
- [3] Niessen, T.  
Mündliche Mitteilung (1995). [126]
- [1] Niessen, T. und B. Randerath  
Regular factors of simple regular graphs and factor-spectra. *Discrete Math.* **185** (1998), 89 – 103. [136]
- [1] Niessen, T. und L. Volkmann  
Class 1 conditions depending on the minimum degree and the number of vertices of maximum degree. *J. Graph Theory* **14** (1990), 225 – 246. [254, 255]
- [1] Nishizeki, T. und N. Chiba  
Planar Graphs: Theory and Algorithms. *Ann. Discrete Math.* **32**, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo (1988). [223]
- [1] Nordhaus, E.A. und J.W. Gaddum  
On complementary graphs. *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 175 – 177. [228]
- [1] Ore, O.  
A problem regarding the tracing of graphs. *Elem. Math.* **6** (1951), 49 – 53. [53]
- [2] Ore, O.  
Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.* **22** (1955), 625 – 639. [102]
- [3] Ore, O.  
Studies in directed graphs I, II, III. *Ann. Math.* **63** (1956), 383 – 406, **64** (1956), 142 – 153, **68** (1958), 526 – 549. [300]
- [4] Ore, O.  
Note on Hamilton circuits. *Amer. Math. Monthly* **67** (1960), 55. [64]
- [5] Ore, O.  
Theory of Graphs. *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* **38** (1962). [104, 106, 174]
- [1] Papadimitriou, C.H. und K. Steiglitz  
Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1982). [59, 112]
- [1] Parsons, T.D.  
Ramsey graphs and block designs, I. *Trans. Amer. Math. Soc.* **209** (1975), 33 – 44. [311]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [2] Parsons, T.D.  
Ramsey Graph Theory. Selected Topics in Graph Theory (Eds. L.W. Beineke and R.J. Wilson).  
Academic Press, London, New York, San Francisco (1978), 361 – 384. [309]
- [1] Parthasarathy, K.R. und G. Ravindra  
The strong perfect graph conjecture is true for  $K_{1,3}$ -free graphs. J. Combin. Theory Ser. B **22**  
(1976), 212 – 223. [169]
- [1] Payan, C.  
Sur le nombre d'absorption d'un graph simple. Cahiers Centre Études Rech. Opér. **17** (1975),  
307 – 317. [175, 178, 183, 198]
- [1] Payan, C. und N.H. Xuong  
Domination-balanced graphs. J. Graph Theory **6** (1982), 23 – 32. [182]
- [1] Petersen, J.  
Die Theorie der regulären graphs. Acta Math. **15** (1891), 193 – 220. [131, 132, 134, 135]
- [2] Petersen, J.  
Sur le théorème de Tait. L'intermédiaire des Mathématiciens **5** (1898), 225 – 227. [244]
- [1] Plesnik, J.  
Critical graphs of given diameter. Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math. **30** (1975),  
71 – 93. [265]
- [1] Plesnik, J. und S. Znám  
On equality of edge-connectivity and minimum degree of a graph. Arch. Math. (Brno) **25**  
(1989), 19 – 25. [265, 284]
- [1] Plummer, M.D.  
On minimal blocks. Trans. Amer. Math. Soc. **134** (1968), 85 – 94. [148]
- [2] Plummer, M.D.  
Graph factors and factorization: 1985-2003: A survey. Discrete Math. **307** (2007), 791 – 821.  
[140]
- [1] Pólya, G.  
Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen.  
Acta Math. **68** (1937), 145 – 254. [viii]
- [1] Preissmann, M.  
Locally perfect graphs. J. Combin. Theory Ser. B **50** (1990), 22 – 40. [166, 167]
- [1] Prim, R.C.  
Shortest connection networks and some generalizations. Bell Systems Techn. J. **36** (1957),  
1389 – 1401. [44]
- [1] Prisner, E., J. Topp und P.D. Vestergaard  
Well covered simplicial, chordal and circular arc graphs. J. Graph Theory **21** (1996), 113 –  
119. [187]
- [1] Rademacher, H. und O. Toeplitz  
Von Zahlen und Figuren. Springer, Berlin (1930). [215]

- [1] Radziszowski, S.P.  
Small Ramsey numbers. *Electronic J. Combin., Dynamic Surveys DS1* (2006), 60 S. [304, 311]
- [1] Ramsey, F.P.  
On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc. (2)* **30** (1930), 264 – 286. [302]
- [1] Randerath, B., I. Schiermeyer, M. Tewes und L. Volkmann  
Vertex pancyclic graphs. *Discrete Appl. Math.* **120** (2002), 219 – 237. [68]
- [1] Randerath, B. und L. Volkmann  
Simplicial graphs and relationships to different graph invariants. *Ars Combin.* **46** (1997), 211 – 217. [185]
- [2] Randerath, B. und L. Volkmann  
Characterization of graphs with equal domination number and covering number. *Discrete Math.* **191** (1998), 159 – 169. [181, 182, 183]
- [1] Rao, S.B.  
Solution of the Hamiltonian Problem for self-complementary graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **27** (1979), 13 – 41. [17]
- [1] Rautenbach, D.  
Domination and Degree. Doktorarbeit, RWTH Aachen, Shaker Verlag (1998), 151 S. [187]
- [1] Read, R.C.  
An introduction to chromatic polynomials. *J. Combin. Theory* **4** (1968), 52 – 71. [234]
- [1] Read, R.C. und W.T. Tutte  
Chromatic polynomials. *Selected Topics in Graph Theory* **3** (Hrsg. L.W. Beineke und R.J. Wilson). Academic Press, Orlando, FL (1988), 15 – 42. [238]
- [1] Rédei, L.  
Ein kombinatorischer Satz. *Acta Litt. Sci. Szeged* **7** (1934), 39 – 43. [75]
- [1] Reed, B.  
Paths, stars, and the number three. *Comb. Prob. Comp.* **5** (1996), 277 – 295. [175]
- [1] Reid, K.B.  
Cycles in the complement of a tree. *Discrete Math.* **15** (1976), 163 – 174. [35]
- [2] Reid, K.B.  
Two complementary circuits in two-connected tournaments. *Ann. Discrete Math.* **27** (1985), 312 – 334. [326, 327]
- [3] Reid, K.B.  
Tournaments: scores, kings, generalizations, and special topics, *Congr. Mumer.* **115** (1996), 171 – 211. [84]
- [1] Reid, K.B. und L.W. Beineke  
Tournaments. *Selected Topics in Graph Theory* (Hrsg. L.W. Beineke und R.J. Wilson). Academic Press, London, New York, San Francisco (1978), 169 – 204. [84]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.

- [1] Reiß, M.  
Über eine Steinersche kombinatorische Aufgabe, welche im 45sten Bande dieses Journals, Seite 181, gestellt worden ist. *J. Reine Angew. Math.* **56** (1859), 326 – 344. [130]
- [1] Rényi, A.  
Some remarks on the theory of trees (Ungarisch). *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **4** (1959), 73 – 85. [39]
- [1] Ringel, G.  
Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1959). [215, 220]
- [2] Ringel, G.  
Selbstkomplementäre Graphen. *Arch. Math. (Basel)* **14** (1963), 354 – 358. [16]
- [3] Ringel, G.  
Map Color Theorem. Springer, Berlin (1974). [220]
- [1] Robbins, H.E.  
A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control. *Amer. Math. Monthly* **46** (1939), 281 – 283. [23, 275]
- [1] Robertson, N., D.P. Sanders, P. Seymour und R. Thomas  
The four-colour-theorem. *J. Combin. Theory Ser. B* **70** (1997), 2 – 44. [219]
- [1] Rooij, A. van und H. Wilf  
The interchange graphs of a finite graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **16** (1965), 263 – 269. [150]
- [1] Roussopoulos, N.D.  
A  $\max\{m, n\}$  algorithm for determining the graph  $H$  from its line graph  $G$ . *Inform. Process. Lett.* **2** (1973), 108 – 112. [152]
- [1] Ryser, H.J.  
Combinatorial properties of matrices of 0's and 1's. *Canad. J. Math.* **9** (1957), 371 – 377. [300]
- [1] Sachs, H.  
Über selbstkomplementäre Graphen. *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 270 – 288. [16]
- [2] Sachs, H.  
Einführung in die Theorie der endlichen Graphen. Carl Hanser Verlag, München (1971). [22, 37]
- [3] Sachs, H.  
Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil II. Teubner, Leipzig (1972). [206]
- [3] Sachs, H.  
Einige Gedanken zur Geschichte und zur Entwicklung der Graphentheorie. *Mitt. Math. Ges. Hamburg* **9** (1989), 623 – 641. [217]

- [4] Sanders, D.P. und Y. Zhao  
Planar graphs of maximum degree seven are class 1. *J. Combin. Theory Ser. B* **83** (2001), 201 – 212. [252]
- [1] Schmidt, U.  
Buchbesprechung von: Appel, Haken [3]. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **94** (1992), 31 – 32. [218]
- [1] Schur, I.  
Über die Kongruenz  $x^m + y^m = z^m \pmod{p}$ . *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **25** (1916), 114 – 117. [308]
- [1] Sedlacek, J.  
Einführung in die Graphentheorie. *Deutsch-Taschenbücher*, Nr. 10, Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main (1972). [46]
- [1] Seidel, J.J.  
Strongly regular graphs. *Surveys in Combinatorics* (Hrsg. B. Bollobás). Cambridge University Press, Cambridge (1979), 157 – 180. [286]
- [1] Seinsche, D.  
On a property of the class of  $n$ -colorable graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **16** (1974), 191 – 193. [168]
- [1] Sekanina, M.  
An ordering of the set of vertices of a connected graph. *Publ. Fac. Sci. Univ. Brno No.* **412** (1960), 137 – 142. [153]
- [1] Shannon, C.E.  
A theorem on coloring the lines of a network. *J. Math. Phys.* **28** (1949), 148 – 151. [243]
- [1] Siemes, W., J. Topp und L. Volkmann  
On unique independent sets in graphs. *Discrete Math.* **131** (1994), 279 – 285. [161, 162]
- [1] Simić, S.K.  
An algorithm to recognize a generalized line graph and output its root graph. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **49 (63)** (1991), 21 – 26. [152]
- [1] Simon, K.  
Effiziente Algorithmen für perfekte Graphen. Teubner, Stuttgart (1992). [169]
- [1] Šoltés, Ľ.  
Forbidden induced subgraphs for line graphs. *Discrete Math.* **132** (1994), 391 – 394. [150]
- [1] Soneoka, T., H. Nakada, M. Imase und C. Peyrat  
Sufficient conditions for maximally connected dense graphs. *Discrete Math.* **63** (1987), 53 – 66. [269]
- [1] Song, Z.M.  
Complementary cycles of all length in tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B* **57** (1993), 18 – 25. [327]



- [1] Spencer, J.H.  
Ramsey's Theorem – a new lower bound. *J. Combin. Theory Ser. A* **18** (1975), 108 – 115. [306]
- [1] Stella, I. und L. Volkmann  
Each regular 3-partite tournament has a 9-cycle. *An. Univ. București Mat.* **56**, No. 1 (2007), 91 – 120. [94]
- [1] Stracke, C. und L. Volkmann  
A new domination conception. *J. Graph Theory* **17** (1993), 315 – 323. [193]
- [1] Sumner, D.P.  
Graphs with 1-factors. *Proc. Amer. Math. Soc.* **42** (1974), 8 – 12. [98, 153]
- [1] Sylvester, J.J.  
On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics – with three appendices. *Amer. J. Math.* **1** (1878), 64 – 125. [viii]
- [1] Syslo, M.M.  
A labelling algorithm to recognize a line digraph and output its root graph. *Inform. Process. Lett.* **15** (1982), 28 – 30. [152]
- [1] Szamkolowicz, L.  
Sur la classification des graphes en vue des propriétés de leurs noyaux. *Prace Nauk. Inst. Mat. Fiz. Teoret. Politechn. Wrocław. Ser. Stud. Materialy* **3** (1970), 15 – 21. [181]
- [1] Tait, P.G.  
On the colouring of maps. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **10** (1880), 501 – 503 and 729. [240]
- [1] Takács, L.  
On Cayley's formula for counting forests. *J. Combin. Theory Ser. A* **53** (1990), 321 – 323. [39]
- [1] Takahashi, M., K. Imai und T. Asano  
Graphical degree sequence problems. *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. **E77-A**, no. 3 (1994), 546 – 552. [14]
- [1] Teschner, U.  
Die Bondagezahl eines Graphen. *Doktorarbeit, RWTH Aachen* (1995), 92 S. [187]
- [2] Teschner, U.  
New results about the bondage number of a graph. *Discrete math.* **171** (1997), 249 – 259. [211]
- [1] Tewes, M.  
In-Tournaments and Semicomplete Multipartite Digraphs. *Aachener Beiträge zur Mathematik* **25** (Eds. H.H. Bock, H.Th. Jongen and W. Plesken), *Doktorarbeit, RWTH Aachen, Augustinus Buchhandlung, Aachen* (1999), 114 S. [94, 327]
- [1] Tewes, M. und L. Volkmann  
Vertex deletion and cycles in multipartite tournaments. *Discrete Math.* **197/198** (1999), 769 – 779. [93]

- [2] Tewes, M. und L. Volkmann  
Vertex pancyclic in-tournaments. *J. Graph Theory* **36** (2001), 84 – 104. [327]
- [1] Thomassen, C.  
Hamiltonian-connected tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B* **28** (1980), 142 – 163. [327, 328]
- [2] Thomassen, C.  
Kuratowski's theorem. *J. Graph Theory* **5** (1981), 225 – 241. [223]
- [3] Thomassen, C.  
A remark on the factor theorems of Lovász and Tutte. *J. Graph Theory* **5** (1981), 441 – 442. [136]
- [4] Thomassen, C.  
Landau's characterization of tournament score sequences. *The theory and applications of graphs* (Kalamazoo, Mich., 1980) Wiley, New York (1981), 589 – 591. [81]
- [5] Thomassen, C.  
A refinement of Kuratowski's theorem. *J. Comb. Theory Ser. B* **37** (1984), 245 – 253. [223]
- [1] Tian, F.  
A short proof of a theorem on the circumference of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B* **45** (1988), 373 – 375. [66]
- [1] Tian, F., Z.-S. Wu und C.-Q. Zhang  
Cycles of each length in tournaments. *J. Comb. Theory Ser. B* **33** (1982), 245 – 255. [84]
- [1] Toida, S.  
Properties of an Euler graph. *J. Franklin Inst.* **295** (1973), 343 – 345. [52]
- [1] Topp, J. und L. Volkmann  
On domination and independence numbers of graphs. *Resultate Math.* **17** (1990), 333 – 341. [184, 187]
- [2] Topp, J. und L. Volkmann  
On graphs with equal domination and independent domination numbers. *Discrete Math.* **96** (1991), 75 – 80. [187]
- [3] Topp, J. und L. Volkmann  
Sufficient conditions for equality of connectivity and minimum degree of a graph. *J. Graph Theory* **17** (1993), 695 – 700. [286]
- [1] Trent, H.  
A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **40** (1954), 1004 – 1007. [37]
- [1] Tripathi, A. und S. Vijay  
A short proof of a theorem on degree sets of graphs. *Discrete Appl. Math.* **155** (2007), 670 – 671. [14]

- [1] Tucker, A.  
The strong perfect graph conjecture for planar graphs. *Canad. J. Math.* **25** (1973), 103 – 114. [169]
- [1] Turán, P.  
An extremal problem in graph theory (Hungarian). *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1941), 436 – 452. [171]
- [1] Tutte, W.T.  
The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.* **22** (1947), 107 – 111. [115]
- [2] Tutte, W.T.  
The factors of graphs. *Canad. J. Math.* **4** (1952), 314 – 328. [122, 123]
- [3] Tutte, W.T.  
The 1-factors of oriented graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 922 – 931. [120]
- [4] Tutte, W.T.  
A short proof of the factor theorem for finite graphs. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 347 – 352. [121, 122]
- [5] Tutte, W.T.  
The subgraph problem. *Ann. Discrete Math.* **3** (1978), 289 – 295. [136]
- [6] Tutte, W.T.  
Graph factors. *Combinatorica* **1** (1981), 79 – 97. [129]
- [1] Tverberg, H.  
A proof of Kuratowski's theorem. *Ann. Discrete Math.* **41** (1989), 417 – 419. [223]
- [1] Van den Heuvel, J.  
Degree and toughness conditions for cycles in graphs. *Proefschrift, University of Twente, Enschede* (1993). [73]
- [1] Veblen, O.  
An application of modular equations in analysis situs. *Ann. of Math. (2)* **14** (1912 – 1913), 86 – 94. [51]
- [1] Vizing, V.G.  
On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph (Russisch). *Diskret. Analiz.* **3** (1964), 25 – 30. [241, 243, 256, 257, 260]
- [2] Vizing, V.G.  
An estimate on the external stability number of a graph (Russisch). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **164** (1965), 729 – 731. [180]
- [3] Vizing, V.G.  
Critical graphs with given chromatic class (Russisch). *Diskret. Analiz.* **5** (1965), 9 – 17. [247, 248, 252]
- [4] Vizing, V.G.  
The chromatic class of a multigraph (Russisch). *Kibernetika (Kiev)* **3** (1965), 29 – 39. [245, 246, 252]

- [1] Volkmann, L.  
Bemerkungen zum  $p$ -fachen Kantenzusammenhang von Graphen. *An. Univ. București Mat.* **37** (1988), 75 – 79. [284]
- [2] Volkmann, L.  
Edge-connectivity in  $p$ -partite graphs. *J. Graph Theory* **13** (1989), 1 – 6. [284]
- [3] Volkmann, L.  
Simple reduction theorems for finding minimum coverings and minimum dominating sets. *Contemporary Methods in Graph Theory* (Hrsg. R. Bodendiek). Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich (1990), 667 – 672. [162, 188]
- [4] Volkmann, L.  
Graphen und Digraphen: Eine Einführung in die Graphentheorie. Springer-Verlag, Wien New York (1991). [161, 177, 232, 244]
- [5] Volkmann, L.  
On graphs with equal domination and covering numbers. *Discrete Appl. Math.* **51** (1994), 211 – 217. [181]
- [6] Volkmann, L.  
Regular graphs, regular factors, and the impact of Petersen's Theorems. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **97** (1995), 19 – 42. [140]
- [7] Volkmann, L.  
On graphs with equal domination and edge independence numbers. *Ars Combin.* **41** (1995), 45 – 56. [187]
- [8] Volkmann, L.  
Fundamente der Graphentheorie. Springer-Verlag, Wien New York (1996). [178, 181]
- [9] Volkmann, L.  
The ratio of the irredundance and domination number of a graph. *Discrete Math.* **178** (1998), 221 – 228. [201, 203]
- [10] Volkmann, L.  
A reduction principle concerning minimum dominating sets in graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **31** (1999), 85 – 90. [189]
- [11] Volkmann, L.  
Longest paths in semicomplete multipartite digraphs. *Discrete Math.* **199** (1999), 279 – 284. [85, 92]
- [12] Volkmann, L.  
Strong subtournaments of multipartite tournaments. *Australas. J. Combin.* **20** (1999), 189 – 196. [94]
- [13] Volkmann, L.  
Cycles in multipartite tournaments: results and problems. *Discrete Math.* **245** (2002), 19 – 53. [91, 94]

- [14] Volkmann, L.  
Longest paths through an arc in strong semicomplete multipartite digraphs. *Discrete Math.* **258** (2002), 331 – 337. [80]
- [15] Volkmann, L.  
Degree sequence conditions for equal edge-connectivity and minimum degree depending on the clique number. *J. Graph Theory* **42** (2003), 234 – 245. [269]
- [16] Volkmann, L.  
On the size of odd order graphs with no almost perfect matching. *Australas. J. Combin.* **29** (2004), 119 – 126. [120]
- [17] Volkmann, L.  
Counterexamples to a conjecture of Wang concerning regular 3-partite tournaments. *J. Combin. Math. Combinat. Comput.* **51** (2004), 203 – 204. [94]
- [18] Volkmann, L.  
All regular multipartite tournaments that are cycle complementary. *Discrete Math.* **281** (2004), 255 – 266. [94]
- [19] Volkmann, L.  
The Petersen graph is not 1-factorable: postscript to ‘The Petersen graph is not 3-edge-colorable - a new proof’ [*Discrete Math.* 268 (2003) 325-326]. *Discrete Math.* **287** (2004), 193 – 194. [245]
- [20] Volkmann, L.  
Upper bounds on the domination number of a graph in terms of diameter and girth. *J. Combin. Math. Combinat. Comput.* **52** (2005), 131 – 141. [180]
- [21] Volkmann, L.  
An upper bound for the domination number of a graph in terms of order and girth. *J. Combin. Math. Combinat. Comput.* **54** (2005), 195 – 212. [180]
- [22] Volkmann, L.  
On cycles in regular 3-partite tournaments. *Discrete Math.* **306** (2006), 1198 – 1206. [94]
- [23] Volkmann, L.  
Upper bounds on the domination number of a graph in terms of order and minimum degree. *Ars Combin.* **81** (2006), 3 – 22. [183, 184]
- [24] Volkmann, L.  
Degree sequence conditions for maximally edge-connected oriented graphs. *Appl. Math. Letters* **19** (2006), 1255 – 1260. [269]
- [25] Volkmann, L.  
Graphen an allen Ecken und Kanten,  
Lehrstuhl II für Mathematik, RWTH Aachen University 2006, XVI, 377 S.,  
[http://www.math2.rwth-aachen.de/files/gt/buch/graphen\\_an\\_allen\\_Ecken\\_und\\_Kanten.pdf](http://www.math2.rwth-aachen.de/files/gt/buch/graphen_an_allen_Ecken_und_Kanten.pdf).  
[vii, 281]
- [26] Volkmann, L.  
Some remarks on lower bounds on the  $p$ -domination number in trees. *J. Combin. Math. Combinat. Comput.* **61** (2007), 159 – 167. [191]

- [27] Volkmann, L.  
A remark on cycles through an arc in strongly connected multipartite tournaments. *Appl. Math. Letters* **20** (2007), 1148 – 1150. [89, 90]
- [28] Volkmann, L.  
Lower bounds on the vertex-connectivity of oriented graphs and bipartite oriented graphs. *Utilitas Math.* **73** (2007), 45 – 54. [269]
- [29] Volkmann, L.  
Multipartite tournaments: a survey, *Discrete Math.* **307** (2007), no. 24, 3097 – 3129. [94]
- [30] Volkmann, L.  
A short proof of a theorem of Kano and Yu on factors in regular graphs, *Electron. J. Combin.* **14** no. N 10 (2007), 2 Seiten. [133]
- [31] Volkmann, L.  
On local connectivity of graphs. *Appl. Math. Letters* **21** (2008), 63 – 66. [286]
- [32] Volkmann, L.  
Some remarks on degree sets of multigraphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **77** (2011), 45 – 49. [14]
- [1] Volkmann, L. und S. Winzen  
Almost regular  $c$ -partite tournaments contain a strong subtournament of order  $c$  when  $c \geq 5$ , *Discrete Math.* **308** (2008), 1710 – 1721. [94]
- [2] Volkmann, L. und S. Winzen  
Strong subtournaments containing a given vertex in regular multipartite tournaments, *Discrete Math.* **308** (2008), 5516 – 5521. [94]
- [1] Volkmann, L. und A. Yeo  
Hamiltonian paths, containing a given path or collection of arcs, in close to regular multipartite tournaments. *Discrete Math.* **281** (2004), 267 – 276. [93, 106]
- [1] Wagner, K.  
Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **46** (1936), 26 – 32. [206]
- [2] Wagner, K.  
Graphentheorie. Bibliographisches Institut, Mannheim (1970). [206]
- [1] Wagner, K. und R. Bodendiek  
Graphentheorie I, Anwendungen auf Topologie, Gruppentheorie und Verbandstheorie. Bibliographisches Institut, Mannheim (1989). [206]
- [1] Wallis, W.D.  
The smallest regular graph without one-factors. *Ars Combin.* **11** (1981), 295 – 300. [117, 118]
- [1] Wang, J.  
Cycles of all possible lengths in diregular bipartite tournaments. *Ars Combin.* **32** (1991), 279 – 284. [94]

- [1] Watkins, M.E.  
A lower bound bound for the number of vertices of a graph. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 297. [281]
- [1] Wei, V.K.  
Coding for a multiple access channel. Ph.D. Thesis, University of Hawaii, Honolulu (1980). [159]
- [1] Whitney, H.  
A logical expansion in mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (1932), 572 – 579. [238]
- [2] Whitney, H.  
Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.* **54** (1932), 150 – 168. [149, 262, 277]
- [3] Whitney, H.  
The coloring of graphs. *Ann. of Math. (2)* **33** (1932), 688 – 718. [234]
- [4] Whitney, H.  
Non-separable and planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **34** (1932), 339 – 362. [144, 220]
- [1] Williamson, J.E.  
Panconnected graphs II. *Period. Math. Hungar.* **8** (1977), 105 – 116 [69]
- [1] Winzen, S.  
Close to Regular Multipartite Tournaments. Doktorarbeit, RWTH Aachen (2004), 170 S. [94]
- [1] Woodall, D.R.  
The binding number of a graph and its Anderson number. *J. Combin. Theory Ser. B* **15** (1973), 225 – 255. [120]
- [1] Xu, B., E.J. Cockayne, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi und S. Zhou  
Extremal graphs for inequalities involving domination parameters. *Discrete Math.* **216** (2000), 1 – 10. [183]
- [1] Xu, J.-M.  
A sufficient condition for equality of arc-connectivity and minimum degree of a digraph. *Discrete Math.* **133** (1994), 315 – 318. [272]
- [1] Yang, Y. und P. Rowlinson  
On the third Ramsey numbers of graphs with five edges. *J. Combinat. Math. Combinat. Comput.* **11** (1992), 213 – 222. [311]
- [1] Yao, T., Y. Guo und K.M. Zhang  
 $\nu$ -paths of arcs in regular multipartite tournaments. *Discrete Appl. Math.* **99** (2000), 245 – 249. [84]
- [1] Yap, H.P.  
Some Topics in Graph Theory. *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **108**, University Press, Cambridge (1986). [256]
- [2] Yap, H.P.  
Total colourings of graphs. *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 159 – 163. [259]

---

Am Ende jeder Literaturstelle werden die Seiten des entsprechenden Zitats in eckigen Klammern angegeben.



- [1] Yap, H.P. und K.H. Chew  
Total chromatic number of graphs of high degree, II. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **53** (1992), 219 – 228. [259]
- [1] Yap, H.P., J.-F. Wang und Z.-F. Zhang  
Total chromatic number of graphs of high degree. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **47** (1989), 445 – 452. [258, 259]
- [1] Yeo, A.  
One-diregular subgraphs in semicomplete multipartite digraphs. *J. Graph Theory* **24** (1997), 175 – 185. [93]
- [2] Yeo, A.  
Semicomplete Multipartite Digraphs. Ph.D. Thesis, Odense University (1998). [94]
- [3] Yeo, A.  
Diregular  $c$ -partite tournaments are vertex-pancyclic when  $c \geq 5$ . *J. Graph Theory* **32** (1999), 137 – 152. [90, 93]
- [4] Yeo, A.  
How close to regular must a semicomplete multipartite digraph be to secure Hamiltonicity? *Graphs Combin.* **15** (1999), 481 – 493. [93, 106]
- [5] Yeo, A.  
Paths and cycles containing given arcs, in close to regular multipartite tournaments (Extended Abstract). Erster Aachener Tag der Graphentheorie, on the occasion of the 60th birthday of Professor Dr. Lutz Volkmann (Hrsg. M. Fischermann, Y. Guo, A. Hellwig, A. Hoffmann, D. Meierling, B. Randerath, D. Rautenbach, M. Tewes und S. Winzen). RWTH Aachen University (2004), 109 – 120. [93, 94]
- [6] Yeo, A.  
The number of pancyclic arcs in a  $k$ -strong tournament. *J. Graph Theory* **50** (2005), 212 – 219. [84, 90]
- [7] Yeo, A.  
Paths and cycles containing given arcs, in close to regular multipartite tournaments, *J. Combin. Theory Ser. B* **97** (2007), 949 – 963. [93, 94]
- [1] Zhang, C.-Q.  
Cycles of each length in a certain kind of tournament. *Sci. Sinica* **9** (1981), 1056 – 1062. [84]
- [2] Zhang, C.-Q.  
Hamilton paths in multipartite oriented graphs. *Ann. Discrete Math.* **41** (1989), 499 – 514. [93, 107]
- [1] Zhang, H.  
Self-complementary symmetric graphs. *J. Graph Theory* **16** (1992), 1 – 5. [17]
- [1] Zhang, L.  
Every planar graph with maximum degree 7 is of class 1. *Graphs Combin.* **16**, 467 – 495. [252]

- [1] Zhao, C.  
The disjoint 1-factors of  $(d, d + 1)$ -graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **9** (1991), 195 – 198. [118]
- [1] Zhou, B.  
The maximum number of cycles in the complement of a tree. *Discrete Math.* **69** (1988), 85 – 94. [35]
- [1] Zverovich, I.E. und V.E. Zverovich  
An induced subgraph characterization of domination perfect graphs. *J. Graph Theory* **20** (1995), 375 – 395. [187]
- [1] Zverovich, V.E.  
The ratio of the irredundance number and the domination number for block-cactus graphs. *J. Graph Theory* **29** (1998), 139 – 149. [203]

# Stichwortverzeichnis

- $(g, f)$ -Faktor, 120
- $(g, f)$ -Faktorsatz von Lovász, 129
- 0-fach bogenzusammenhängend, 269
- 0-fach kantenzusammenhängend, 262
- 0-fach stark zusammenhängend, 269
- 0-fach zusammenhängend, 262
- 1-Faktorisierungs-Vermutung, 254, 255
- 1-Faktorsatz von Tutte, 116
- 3-Turnier
  - transitives, 75
  - zyklisches, 75
- $C_4$ -frei, 186
- $M$ -alternierender Weg, 99
- $M$ -alternierender Wurzelbaum, 108
- $M$ -erweiternder Weg, 99
- $M$ -zunehmender Weg, 99
- $P_4$ -freier Graph, 167
- $X$ -Dominanzmenge, 187
  - minimale, 188
- $X$ -Dominanzzahl, 188
- $[a, b]$ -Faktor, 120
- $\rho$ -Abstand, 18
- $f$ -Faktor, 115
- $f$ -Faktorproblem, 121, 122
- $f$ -Faktorsatz von Tutte, 123
- $f$ -Null, 290
- $f$ -gesättigt, 290
- $f$ -positiv, 290
- $f$ -ungesättigt, 290
- $f$ -zunehmend, 292
- $h$ -Fächer, 242
- $i, j$ -Kette, 242
- $k$ -Dominanzmenge, 190
  - minimale, 190
- $k$ -Dominanzzahl, 190
- $k$ -Hülle, 68
- $m$ -panzyklisch, 323
- $n$ -Turnier, 75
- $p$ -Färbung, 214
- $p$ -fach unabhängig, 161
- $p$ -partiter Graph, 65
- $p$ -partites Turnier, 84
- $q$ -Eckenfärbung, 225
  - echte, 216, 225
  - vollständige, 225
- $q$ -Färbung, 225
  - echte, 225
  - vollständige, 225
- $q$ -Kantenfärbung, 240
- $q$ -Kreis, 77
- $q$ -Totalfärbung, 256
- $q$ -fach bogenzusammenhängend, 269
- $q$ -fach eckenzusammenhängend, 262
- $q$ -fach erreichbar, 277
- $q$ -fach stark zusammenhängend, 269
- $q$ -fach zusammenhängend, 262, 278
- $q$ -kantenfärbbar, 240
- $q$ -kritischer Graph, 226
- $r$ -Faktor, 115
- $r$ -Faktorsatz von Belck, 127
- $r$ -faktorisierbarer Graph, 115
- $r$ -fastregulärer Graph, 136
- $r$ -regulär, 6
- Abstand, 15, 18, 82, 265, 273
- achromatische Zahl, 225
- adjazent, 1, 22
- adjazente Länder, 206
- Adjazenzlemma von Vizing, 247
- Adjazenzmatrix, 5
- Admittanzmatrix, 38
- Ahrens, Satz von, 35
- Algorithmus
  - effizienter, 12
  - von Dantzig und Dijkstra, 20
  - von Edmonds, 111
  - von Edmonds, Karp, 294
  - von Fleury, 57
  - von Ford und Fulkerson, 294

- von Hierholzer, 57
  - von Kruskal, 41
  - von Prim, 44
- Alspach, Satz von, 84
- Anfangskomponente, 317
- Anfangspunkt, 3, 7
- Außengrad, 4
- Außengradsequenz, 80, 81
- äußerer Block, 204
- äußerer privater Nachbar, 182
- äußeres Gebiet, 206
- Bäbler, Satz von, 135
- Bang-Jensen, Satz von, 316
- Baum, 21, 24, 28
  - orientierter, 24
  - spannender, 33
- Baumfaktor, 33
- Belck,  $r$ -Faktorsatz von, 127
- benachbart, 1
- benachbarte Länder, 206
- Berge, Satz von, 99
- bewerteter Graph, 18
- Bewertung, 18
- Bewertungsmatrix, 21
  - halbe, 42
- bipartit graphisch, 300
- bipartiter Graph, 65
- bipartites Turnier, 84
- Bipartition, 65
- Block, 62, 142
  - äußerer, 204
  - eckenkritischer, 147
  - kantenkritischer, 147
- Blockgraph, 146
- Boesch, Tindell, Satz von, 275
- Bogen, 3
  - panzyklischer, 77
- Bogen-panzyklischer Digraph, 77
- Bogenmenge, 2
- bogenzusammenhängend
  - 0-fach, 269
  - $q$ -fach, 269
- Bogenzusammenhangszahl, 269
- Bollobás, Satz von, 272
- Bondage Zahl, 211
- Bondy, Satz von, 72
- Briefträgerproblem, chinesisches, 56
- Brooks, Satz von, 227
- Brücke, 9
- Burr, Roberts, Satz von, 311
- Camion, Satz von, 77
- Caro, Roditty, Satz von, 192
- Cayley, Satz von, 37
- Chartrand, Satz von, 264
- Chetwynd, Hilton, Satz von, 253, 255
- chinesisches Briefträgerproblem, 56
- chordaler Graph, 163
- chromatische Zahl, 225
- chromatischer Index, 240
- chromatisches Polynom, 234
- Chvátal, Erdős, Satz von, 281
- Chvátal, Satz von, 309
- Clique, 163
  - gesättigte, 163
  - maximale, 163
- Cliquenzahl, 163
- Cliquenzerlegung, 163
- Cliquenzerlegungszahl, 163
- Cockayne, Satz von, 306
- Dankelmann, Volkmann, Satz von, 265, 271
- Darstellung, ringförmige, 319
- Diagonale, 163
- Differenz, symmetrische, 33
- Digraph, 2
  - Bogen-panzyklischer, 77
  - Ecken-panzyklischer, 77
  - endlicher, 3
  - Eulerscher, 55
  - Hamiltonsch, 61
  - kondensierter, 24
  - kreisförmig, 319
  - lokal semi-vollständiger, 315
  - panzyklischer, 77
  - regulär, 83
  - schlichter, 3
  - schwach Hamiltonsch-zusammenhängend, 327
  - semi-Eulerscher, 55
  - semi-Hamiltonsch, 62
  - semi-vollständiger, 315
  - stark Hamiltonsch-zusammenhängend, 327
  - trivialer, 2

- vollständiger, 269
  - zugeordneter, 270
  - zusammenhängender, 23
- Dijkstra-Algorithmus, 20
- Dilworth, Satz von, 168
- Dirac, Satz von, 64
- Disjunktion, 154
- Dodekaeder, 61, 209
- dominant, 174
- Dominanzmenge, 174
  - minimale, 174
- Dominanzzahl, 174
- dominieren, 76, 77
- Dreieck, 33
- Dreieck, 75
- dualer Graph, 215
- Durchmesser, 15, 82
- Durchschnitt, 6
  
- ebener Graph, 205
- echte  $q$ -Eckenfärbung, 216, 225
- echte Eckenfärbung, 216, 225
- Ecke, 1, 2
  - gute, 53, 54
  - irredundante, 199
  - isolierte, 1, 3
  - nicht-kritische, 78
- Ecken
  - maximal kantenzusammenhängend, 282
  - maximal zusammenhängend, 284
- Ecken- $m$ -panzyklisch, 323
- Ecken-panzyklischer Digraph, 77
- Ecken-panzyklischer Graph, 68
- Eckenfärbung, 225
  - echte, 216, 225
- Eckengrad, 3, 270
- eckenkritisch, 246
- eckenkritischer Block, 147
- Eckenmenge, 1, 2
  - maximale unabhängige, 157
  - unabhängige, 157
- Eckenüberdeckung, 157
- Eckenüberdeckungszahl, 157
- Eckenunabhängigkeitszahl, 157
- eckenzusammenhängend,  $q$ -fach, 262
- Eckenzusammenhangszahl, 262
- Edmonds, Algorithmus von, 111
- Edmonds, Karp
  - Algorithmus von, 294
  - Satz von, 295
- Edmonds, Satz von, 111
- effizienter Algorithmus, 12
- Einbettung, 205
- Endblock, 142
- Endecke, 4
- Endkante, 4
- Endkomponente, 317
- endlicher Digraph, 3
- endlicher Graph, 3
- Endpunkt, 1, 3, 7
- Entfernungsbaum, 21
- Erdős, Gallai, Satz von, 128
- Erdős, Satz von, 170, 305
- Erdős, Szekeres, Satz von, 302
- erreichbar, 22
  - $q$ -fach, 277
- erzeugter Teilgraph, 6
- Euklidischer Graph, 205
- Euler, Hierholzer, Satz von, 50
- Eulersche Polyederformel, 207
- Eulerscher Digraph, 55
- Eulerscher Graph, 49
- Eulerscher Kantenzug, 49
  - orientierter, 55
- Eulertour, 49
  - orientierte, 55
- Exzentrizität, 15, 82
  
- Fächer, 242
- Fächermenge, 242
- Faktor, 6, 105, 115
  - perfekter, 120
- Faktoren gleicher Parität, 34
- faktorisierbarer Graph, 115
- Fan, Satz von, 65
- Farben, 240
- Farbenklasse, 225, 240
- Färbung einer Landkarte, 214
- Färbung von Ecken, 225
- fast-perfektes Matching, 97
- Fleury's Algorithmus, 57
- Fluß, 289
  - maximaler, 289
- Flußstärke, 289

- Folkman, Fulkerson, Satz von, 100  
 Ford und Fulkerson, Algorithmus von, 294  
 Fundamentalsatz über chromatische Polynome, 235  
 Fünffarbensatz, 214  
  
 Gale, Ryser, Satz von, 300  
 Gallai, Satz von, 157  
 Gebiet, äußeres, 206  
 Geller, Harary, Satz von, 270  
 gemischter Graph, 275  
 gerader Faktor, 34  
 gerader Graph, 34  
 gerichtete Kante, 3  
 gerichteter Graph, 2  
 Gerüst, 33  
 gesättigte Clique, 163  
 gesättigte Irredundanzmenge, 199  
 gesättigter Weg, 75  
 gesättigter Wurzelbaum, 108  
 gesättigtes Matching, 97  
 geschlossene Kantenfolge, 7  
 geschlossene orientierte Kantenfolge, 22  
 Ghouila-Houri, Satz von, 66  
 Goddard, Oellermann, Satz von, 90  
 Grad, 3, 270  
 Gradmenge, 14  
 Gradsequenz, 12, 271  
 Graph, 1
  - $P_4$ -frei, 167
  - $p$ -partiter, 65
  - $q$ -kritischer, 226
  - $r$ -faktorisierbar, 115
  - $r$ -fastregulärer, 136
  - bewerteter, 18
  - bipartiter, 65
  - chordaler, 163
  - dualer, 215
  - ebener, 205
  - Ecken-panzyklischer, 68
  - endlicher, 3
  - Euklidischer, 205
  - Eulerscher, 49
  - faktorisierbar, 115
  - gemischter, 275
  - gerichteter, 2
  - Hamiltonsch, 61
  - homöomorpher, 220
  - klauenfrei, 98
  - kritischer, 226, 246
  - leerer, 1
  - lokal- $r$ -fastregulärer, 136
  - minimal imperfekt, 164
  - panzyklischer, 68
  - perfekter, 164
  - planarer, 205
  - primitiver, 134
  - regulärer, 6
  - schlichter, 1
  - semi-Eulerscher, 49
  - semi-Hamiltonsch, 62
  - transitiv orientierbar, 168
  - trianguliert, 163
  - trivialer, 1
  - ungerichteter, 1
  - untergeordneter, 3
  - vollständig  $p$ -partit, 65
  - vollständiger, 6
  - vollständiger bipartiter, 65
 Graphenhomomorphismus, 4  
 Graphenisomorphismus, 4  
 graphisch, bipartit, 300  
 Greenwood, Gleason, Satz von, 307  
 Grenze, 206  
 Größe, 3  
 Guo, Volkmann, Satz von, 88, 327  
 gute Ecke, 53, 54  
 Gutin, Satz von, 92  
  
 Hajnál, Surányi, Satz von, 167  
 Hajós-Vereinigung, 251  
 halbe Bewertungsmatrix, 42  
 Hamiltonkreis, 61
  - orientierter, 61
 Hamiltonscher Digraph, 61  
 Hamiltonscher Graph, 61  
 Hamiltonscher Weg, 62  
 Handschlaglemma, 4  
 Hansberg, Volkmann, Satz von, 196  
 Harary, Moser, Satz von, 82  
 Haus vom Nikolaus, 50  
 Havel, Hakimi, Satz von, 13  
 Heawood, Satz von, 214  
 Hellwig, Volkmann, Satz von, 266, 273

- Hendry, Satz von, 69
- Hexaeder, 209
- Hierholzers Algorithmus, 57
- Hilton, Hind, Satz von, 260
- Holtkamp, Volkmann, Satz von, 284
- Homomorphismus, 4
- homöomorpher Graph, 220
- Hülle eines Graphen, 68
  
- I. Satz von Petersen, 132
- II. Satz von Petersen, 135
- Ikosaeder, 209
- In-Turnier, 327
- Index, 10
  - chromatischer, 240
- induzierter Teildigraph, 23
- induzierter Teilgraph, 6
- Innengrad, 4
- Integral-flow-Satz, 293
- Intervallgraph, 173
- inzident, 1
- Inzidenzmatrix, 5
- inzidieren, 1, 3
  - negativ, 3
  - positiv, 3
- irredundant, 199
- irredundante Ecke, 199
- Irredundanzmenge, 199
  - gesättigte, 199
  - minimale, 199
- Irredundanzzahl, 199
- isolierte Ecke, 1, 3
- isomorph, 4
- Isomorphismus, 4
  
- Jaeger, Payan, Satz von, 178
- Jolivet, Satz von, 274
- Jordanbogen, stückweise glatt, 205
- Jordankurve, stückweise glatt, 205
- Jordanscher Kurvensatz, 206
  
- Kaktusgraph, 30
- Kano, Satz von, 140
- Kano, Yu, Satz von, 133
- Kante, 1
  - gerichtete, 3
  - orientierte, 3
  - parallele, 1
  
- Kantenfärbung, 240
- Kantenfolge, 7
  - geschlossene, 7
  - geschlossene orientierte, 22
  - offene, 7
  - offene orientierte, 22
  - optimale, 57
  - orientierte, 22
- Kantengraph eines Graphen, 148
- Kantenkontraktion, 234
- kantenkritischer Block, 147
- Kantenmenge, 1
  - unabhängige, 157
- Kantenüberdeckung, 157
  - minimale, 157
- Kantenüberdeckungszahl, 157
- Kantenunabhängigkeitszahl, 157
- Kantenzug, 7
  - Eulerscher, 49
  - orientierter, 22
- Kantenzusammenhang, lokaler, 282
- kantenzusammenhängend, 262
  - 0-fach, 262
  - $q$ -fach, 262
- Kantenzusammenhangszahl, 262
- Kapazität
  - eines Bogens, 288
  - eines Schnittes, 289
- Kapazitätsbeschränkung, 289
- Kapazitätsfunktion, 288
- kartesische Produkt, 154
- Katerinis, Satz von, 133
- Kette, 242
- Kirchhoffsche Regel, 289
- Kirkman, Reiß, Satz von, 130
- Klasse 1-Graph, 244
- Klasse 2-Graph, 244
- Klassifizierung, 252
- Klassifizierungsproblem, 252
- klauenfreier Graph, 98
- kleinste Schnittmenge, 317
- Komplement, 14
- komplementäre Kreise, 326
- Komplementärgraph, 14
- Komponente, 8
- Komponenten eines Digraphen, 23
- Komposition von Graphen, 154



- kondensierter Digraph, 24
- König, Satz von, 69
- König, Hall, Satz von, 101, 280
- König, Ore, Satz von, 102
- König, Satz von, 34, 103, 158, 280
- Königsberger Brückenproblem, 49, 52
- Konjunktion, 154
- Kontraktion einer Kante, 37, 234
- Koronagraph, 152
- Krausz, Satz von, 150
- Kreis, 7
  - orientierter, 22
- Kreisfaktor, 105
- kreisförmiger Digraph, 319
- kreuzungsfrei, 277, 278
- kritischer Graph, 226, 246
- Kruskal-Algorithmus, 41
- Kuratowski, Satz von, 221
- Kurvensatz von Jordan, 206
  
- Land, 206
- Landau, Satz von, 81
- Länder
  - adjazente, 206
  - benachbarte, 206
- Landkarte, 206
  - normale, 216
- Länge, 18
- Länge einer Kantenfolge, 7
- Las Vergnas, Satz von, 78, 79
- Lawrence, Satz von, 310
- leerer Graph, 1
- Lemma von Ore, 64
- lexikographisches Produkt, 154
- Line-Graph, 149
  - eines Graphen, 148
- Listing, König, Satz von, 29
- lokal kantenzusammenhängender Graph, maximal, 282
- lokal semi-vollständiger Digraph, 315
  - ringförmig, 319
- lokal zusammenhängender Graph, maximal, 284
- lokal- $r$ -fastregulärer Graph, 136
- lokaler Kantenzusammenhang, 282
- lokaler Zusammenhang, 284
- lokales Turnier, 315
  
- Loop, 1, 3
- Lovász,  $(g, f)$ -Faktorsatz von, 129
- Lovász, Satz von, 164, 165
  
- Matching, 97
  - fast-perfektes, 97
  - gesättigtes, 97
  - maximales, 97
  - perfektes, 97
- Matrix-Gerüst-Satz, 38
- Max-flow-min-cut-Satz, 293
- maximal kantenzusammenhängende Ecken, 282
- maximal lokal kantenzusammenhängender Graph, 282
- maximal lokal zusammenhängender Graph, 284
- maximal zusammenhängende Ecken, 284
- maximale Clique, 163
- maximale unabhängige Eckenmenge, 157
- maximaler Eckengrad, 4
- maximaler Fluß, 289
- maximales Matching, 97
- Maximalgrad, 270
- McCuaig, Shepherd, Satz von, 175
- McKee, Volkmann, Satz von, 36
- Mehrfachkante, 1
- Meierling, Volkmann, Satz von, 327
- Mengersche Sätze, 277
- minimal imperfekter Graph, 164
- minimale  $k$ -Dominanzmenge, 190
- minimale  $X$ -Dominanzmenge, 188
- minimale Dominanzmenge, 174
- minimale Irredundanzmenge, 199
- minimale Kantenüberdeckung, 157
- minimale Schnittmenge, 317
- minimale Überdeckung, 157
- minimaler Eckengrad, 4
- minimaler Schnitt, 289
- Minimalgerüst, 41
- Minimalgrad, 270
- mittlere Entfernung, 17
- Moon, Satz von, 77
- Multidigraph, 3
- Multigraph, 1
- Multigraph, Shannonscher, 244
- multipartites Turnier, 84
- Multiturier, 83
  
- Nachbar, 10

- ausserer privater, 182
- negativer, 11
- positiver, 11
- privater, 199
- Nachbarschaftsungleichung, 11
- Nash-Williams, Satz von, 276
- negativ inzidieren, 3
- negativ orientierter Wurzelbaum, 25
- negativer Nachbar, 11
- Netzwerk, 288
- nicht-kritische Ecke, 78
- Niessen, Volkmann, Satz von, 254, 255
- normale Landkarte, 216
- Null-Fluß, 289
- Nulldigraph, 2
- Nullgraph, 1
- Nullweg, 7
- offene Kantenfolge, 7
- offene orientierte Kantenfolge, 22
- Oktaeder, 209
- optimale Kantenfolge, 57
- optimaler Stundenplan, 105
- Ordnung, 3
- Ore, Lemma von, 64
- Ore, Satz von, 64, 106
- orientierte Eulertour, 55
- orientierte Kante, 3
- orientierte Kantenfolge, 22
- orientierte Wegüberdeckung, 62
- orientierte Wegüberdeckungszahl, 62
- orientierter Baum, 24
- orientierter Eulerscher Kantenzug, 55
- orientierter Hamiltonkreis, 61
- orientierter Hamiltonscher Weg, 62
- orientierter Kantenzug, 22
- orientierter Kreis, 22
- orientierter Weg, 22, 275
  - Hamiltonscher, 62
- orientierter Wurzelbaum, 24
- Orientierung, 3
- panconnected graph, 69
- panzusammenhängender Graph, 69
- panzyklische Ecke, 68
- panzyklischer Bogen, 77
- panzyklischer Digraph, 77
- panzyklischer Graph, 68
- parallel, 3
- parallele Kanten, 1
- Partition, 65, 84
- Partitionsmatrix, 109
- Payan, Satz von, 183
- Perfect Graph Conjecture, 164
- Perfect Graph Theorem, 164, 165
- perfekt unabhängig, 160
- perfekter Faktor, 120
- perfekter Graph, 164
- perfektes Matching, 97
- Personal-Zuteilungsproblem, 107
- Petersen, I. Satz von, 132
- Petersen, II. Satz von, 135
- Petersen, Satz von, 132, 135
- Petersen-Graph, 244
- planarer Graph, 205
- Platonische Körper, 210
- Plesnik, Satz von, 265
- Polyeder, 207
- Polyederformel von Euler, 207
- Polynom, chromatisches, 234
- positiv inzidieren, 3
- positiver Nachbar, 11
- Potenzgraph, 152
- primitiver Graph, 134
- Prims Algorithmus, 44
- privater Nachbar, 199
- Produkt
  - kartesisches, 154
  - lexikographisches, 154
- pseudoachromatische Zahl, 225
- quasi-Tailenweite, 322
- Quelle, 288
- Radius, 15, 82
- Ramsey-Zahl, 302
  - verallgemeinerte, 306
- Rand, 206
- Randerath, Volkmann, Satz von, 182
- Randpunkt, 206
- Rédei, Satz von, 75
- Reduktionssatz von Volkmann, 162, 188
- Reed, Satz von, 175
- regulärer Digraph, 83
- regulärer Graph, 6
- Reid, Satz von, 327

- Rekursionsformel für chromatische Polynome, 234  
 ringförmige Darstellung, 319  
 ringförmiger lokal semi-vollständiger Digraph, 319  
 Robbins, Satz von, 23  
 Rösselsprunggraph, 61  
 Rückwärtsbogen, 292  
 Satz von  
   Ahrens, 35  
   Alspach, 84  
   Bäbler, 135  
   Bang-Jensen, 316  
   Berge, 99  
   Boesch, Tindell, 275  
   Bollobás, 272  
   Bondy, 72  
   Brooks, 227  
   Burr, Roberts, 311  
   Camion, 77  
   Caro, Roditty, 192  
   Cayley, 37  
   Chartrand, 264  
   Chetwynd, Hilton, 253, 255  
   Chvátal, 309  
   Chvátal, Erdős, 281  
   Cockayne, 306  
   Dankelmann, Volkmann, 265, 271  
   Dilworth, 168  
   Dirac, 64  
   Edmonds, 111  
   Edmonds, Karp, 295  
   Erdős, 170, 305  
   Erdős, Gallai, 128  
   Erdős, Szekeres, 302  
   Euler, Hierholzer, 50  
   Fan, 65  
   Folkman, Fulkerson, 100  
   Gale, Ryser, 300  
   Gallai, 157  
   Geller, Harary, 270  
   Ghouila-Houri, 66  
   Goddard, Oellermann, 90  
   Greenwood, Gleason, 307  
   Guo, Volkmann, 88, 327  
   Gutin, 92  
   Hajnál, Surányi, 167  
   Hansberg, Volkmann, 196  
   Harary, Moser, 82  
   Havel, Hakimi, 13  
   Heawood, 214  
   Hellwig, Volkmann, 266, 273  
   Hendry, 69  
   Hilton, Hind, 260  
   Holtkamp, Volkmann, 284  
   Jaeger, Payan, 178  
   Jolivet, 274  
   Kano, 140  
   Kano, Yu, 133  
   Katerinis, 133  
   Reiß, 130  
   König, 34, 69, 103, 158, 280  
   König, Hall, 101, 280  
   König, Ore, 102  
   Krausz, 150  
   Kuratowski, 221  
   Landau, 81  
   Las Vergnas, 78, 79  
   Lawrence, 310  
   König, 29  
   Lovász, 164, 165  
   McCuaig, Shepherd, 175  
   McKee, Volkmann, 36  
   Meierling, Volkmann, 327  
   Moon, 77  
   Nash-Williams, 276  
   Niessen, Volkmann, 254, 255  
   Ore, 64, 106  
   Payan, 183  
   Petersen, 132, 135  
   Plesnik, 265  
   Randerath, Volkmann, 182  
   Rédei, 75  
   Reed, 175  
   Reid, 327  
   Robbins, 23  
   Schur, 308  
   Sekanina, 153  
   Song, 327  
   Tait, 240  
   Toida, McKee, 52  
   Turán, 171  
   Tutte, 120

- Tutte, Berge, 119
- Vizing, 241, 243
- Volkmann, 89, 133, 184
- Volkmann, Winzen, 94
- Volkmann, Yeo, 93
- Wallis, 117
- Whitney, 149, 238, 262
- Williamson, 69
- Xu, 272
- Yeo, 90, 93, 94
- Sätze, Mengersche, 277
- schlichter Digraph, 3
- schlichter Graph, 1
- Schlinge, 1, 3
- Schnitt, 289
  - minimaler, 289
- Schnittecke, 62, 142
- Schnittmenge, 317
  - kleinste, 317
  - minimale, 317
- Schur, Satz von, 308
- schwach Hamiltonsch-zusammenhängender Digraph, 327
- Sehne, 163
- Sekanina, Satz von, 153
- selbstdual, 223
- selbstkomplementär, 14
- semi-Eulerscher Digraph, 55
- semi-Eulerscher Graph, 49
- semi-Hamiltonscher Digraph, 62
- semi-Hamiltonscher Graph, 62
- semi-vollständige Zerlegung, 319
- semi-vollständiger Digraph, 315
- Senke, 288
- Shannonscher Multigraph, 244
- Simplex, 163
- simpliziale Ecke, 163
- simplizialer Graph, 204
- Song, Satz von, 327
- spannender Baum, 33
- stark Hamiltonsch-zusammenhängender Digraph, 327
- stark zusammenhängend, 22, 23, 275
  - 0-fach, 269
  - $q$ -fach, 269
- stark zusammenhängende Zerlegung, 317
- starke Zusammenhangskomponente, 23
- starke Zusammenhangszahl, 269
- Strong Perfect Graph Conjecture, 169
- Strong Perfect Graph Theorem, 169
- Struktursatz
  - I., 316
  - II., 318
  - III., 322
- stückweise glatte Jordankurve, 205
- stückweise glatter Jordanbogen, 205
- Stundenplan, optimaler, 105
- Summe zweier Graphen, 118
- Sylvester-Graph, 134
- symmetrische Differenz, 33, 34
- Tailenweite, 180
- Tait, Satz von, 240
- Teildigraph, 22
  - induzierter, 23
- Teilgraph, 6
  - erzeugter, 6
  - induzierter, 6
- Tetraeder, 209
- Toida, McKee, Satz von, 52
- totalchromatische Zahl, 256
- Totalfärbung, 256
- Totalfärbungs-Vermutung, 257, 260
- transitiv orientierbarer Graph, 168
- transitives 3-Turnier, 75
- transitives Turnier, 75
- triangulierter Graph, 163
- trivialer Digraph, 2
- trivialer Graph, 1
- Turán, Satz von, 171
- Turánscher Graph, 170
- Turnier, 75
  - $p$ -partites, 84
  - bipartites, 84
  - lokales, 315
  - multipartites, 84
  - transitives, 75
- Tutte
  - 1-Faktorsatz von, 116
  - $f$ -Faktorsatz von, 123
  - Satz von, 120
- Tutte, Berge, Satz von, 119
- Überdeckung, 157
  - minimale, 157

- Überdeckungszahl, 157
- Umfärben eines Fächers, 242
- unabhängig,  $p$ -fach, 161
- unabhängige Eckenmenge, 157
- unabhängige Kantenmenge, 157
- unabhängige Menge von Ecken und Kanten, 256
- Unabhängigkeitslemma, 159
- Unabhängigkeitszahl, 157
- Ungarische Methode, 107, 108
- ungerader Faktor, 34
- ungerader Graph, 34
- ungerichteter Graph, 1
- ungesättigter Wurzelbaum, 294
- untergeordneter Graph, 3
- Unterteilung einer Kante, 144
- Unterteilungsgraph, 144
- VAL, 247
- Valenz, 3
- verallgemeinerte Ramsey-Zahl, 306
- Vereinigung, 6
- Vierfarbenvermutung, 217
- Vizing, Satz von, 241, 243
- Vizings Adjazenz Lemma, 247
- Volkman, Reduktionssatz von, 162, 188
- Volkman, Satz von, 89, 133, 184
- Volkman, Winzen, Satz von, 94
- Volkman, Yeo, Satz von, 93
- vollständig orientierter Wurzelbaum, 24
- vollständige  $q$ -Eckenfärbung, 225
- vollständige  $q$ -Färbung, 225
- vollständiger  $p$ -partiter Graph, 65
- vollständiger bipartiter Graph, 65
- vollständiger Digraph, 269
- vollständiger Graph, 6
- Vorwärtsbogen, 292
- Wald, 21, 24, 28
- Wallis, Satz von, 117
- Weg, 7
  - $M$ -alternierender, 99
  - $M$ -erweiternder, 99
  - $M$ -zunehmender, 99
  - gesättigter, 75
  - Hamiltonscher, 62
  - orientierter, 22, 275
- Wegüberdeckung, 62
  - orientierte, 62
- Wegüberdeckungszahl, 62
  - orientierte, 62
- Whitney, Satz von, 149, 238, 262
- Williamson, Satz von, 69
- Würfel, 209
- Wurzel, 24, 108
- Wurzelbaum
  - $M$ -alternierender, 108
  - gesättigter, 108
  - negativ orientierter, 25
  - orientierter, 24
  - ungesättigter, 294
  - vollständig orientierter, 24
- Xu, Satz von, 272
- Yeo, Satz von, 90, 93, 94
- Zahl
  - achromatische, 225
  - chromatische, 225
  - pseudoachromatische, 225
  - zyklomatische, 10
- Zentrum, 15, 82
- Zerlegung, semi-vollständige, 319
- zugeordneter Digraph, 270
- Zusammenhang, lokaler, 284
- zusammenhängend, 8
  - 0-fach, 262
  - $q$ -fach, 262, 278
  - stark, 22, 23, 275
- zusammenhängender Digraph, 23
- Zusammenhangskomponente, 8
  - starke, 23
- Zusammenhangszahl, 262
  - starke, 269
- zyklisches 3-Turnier, 75
- zyklomatische Zahl, 10